ALGEBRĂ

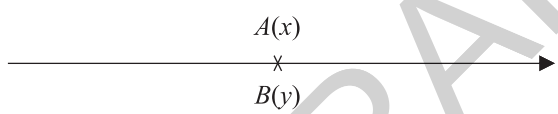
Capitolul II

ECUAȚII ȘI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

Lecția 1. Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă. Identități

Citesc și rețin

Numerele reale x şi y sunt egale, dacă punctele de pe axa numerelor care au coordonatele x, respectiv y sunt identice ($A(x) = B(y)$).



Pe mulţimea numerelor reale, relaţia de egalitate are următoarele proprietăţi:

1. Reflexivitate: $x = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

2. Simetrie: dacă $x = y$, atunci şi $y = x$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

3. Tranzitivitate: dacă $x = y$ şi $y = z$, atunci $x = z$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$.

În $\mathbb{R}$, o egalitate se transformă într-o egalitate echivalentă, dacă:

– se adună sau se scade din ambii membri ai egalităţii acelaşi termen:

$$x = y \Leftrightarrow x + z = y + z;\ x = y \Leftrightarrow x - z = y - z;$$

– se înmulţesc sau se împart ambii membri ai egalităţii cu acelaşi factor nenul:

$$x = y \Leftrightarrow x \cdot z = y \cdot z;\ x = y \Leftrightarrow x : z = y : z.$$

De asemenea, dacă se adună, se scad, se înmulţesc sau se împart membru cu membru două egalităţi, se obţine tot o egalitate.

Dacă $x = y$ şi $z = t$, atunci $x + z = y + t$, $x - z = y - t$, $x \cdot z = y \cdot t$ şi $x : z = y : t$ ($z \neq 0$, $t \neq 0$).

Definiţie: O egalitate care conţine una sau mai multe variabile şi care este adevărată pentru orice valori atribuite acestora se numeşte **identitate**.

Cum se aplică?

1. Ştiind că $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $x = y$, arătaţi că $x \cdot 2\sqrt{3} - 31 = y \cdot 2\sqrt{3} - 31$.

Soluţie:

$x = y \Leftrightarrow x \cdot 2\sqrt{3} = y \cdot 2\sqrt{3} \Leftrightarrow x \cdot 2\sqrt{3} - 31 = y \cdot 2\sqrt{3} - 31.$

2. Se consideră numerele reale a, b, c şi d, care îndeplinesc condiţiile $4a = 3b$ şi $25c = 10d$. Arătaţi că $12a - 5c = 9b - 2d$.

Soluţie:

$4a = 3b \Leftrightarrow 3 \cdot 4a = 3 \cdot 3b \Leftrightarrow 12a = 9b$; $25c = 10d \Leftrightarrow 25c : 5 = 10d : 5 \Leftrightarrow 5c = 2d$. Din $12a = 9b$ şi $5c = 2d$ rezultă că $12a - 5c = 9b - 2d$.

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Dacă $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $x = y$, stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $x + 3 = y + 3$; ☐ b) $x - 8 = y - 8$; ☐

c) $x - 1,(3) = y - 1,(3)$; ☐ d) $x + \sqrt{2} = \sqrt{2} + y$. ☐

2. Dacă $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $x = y$, stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $x \cdot 27 = y \cdot 27$; ☐ b) $x : \sqrt{5} = y : \sqrt{5}$; ☐

c) $x \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot y$; ☐ d) $x : (-23) = y : (-23)$. ☐

3. Dacă x şi y sunt două numere reale care îndeplinesc condiţia $24x = 36y$, arătaţi că:

a) $6x = 9y$; b) $4x = 6y$; c) $2x = 3y$.

c)

4. Dacă x şi y sunt două numere reale, astfel încât $x = y$, arătaţi că:

a) $x \cdot \frac{1}{2} + 53 = y \cdot \frac{1}{2} + 53$; b) $x \cdot \sqrt{2} - 41 = y \cdot \sqrt{2} - 41$.

b)

5. Se consideră numerele reale z şi t, care îndeplinesc condiţia $2z = 5t$. Arătaţi că:

a) $20z = 50t$; b) $\frac{z}{5} = \frac{t}{2}$; c) $2\sqrt{7}z = 5\sqrt{7}t$.

b)

Exerciţii şi probleme de dificultate medie

6. Se consideră numerele $x, y \in \mathbb{R}$, cu proprietatea $6x = 2\sqrt{3}y$. Arătaţi că:

a) $2\sqrt{3}x = 2y$; b) $\sqrt{3}x = y$; c) $\sqrt{6}x = \sqrt{2}y$.

7. Dacă a, b, c şi d sunt numere reale care îndeplinesc condiţiile $10a = 15b$ şi $35c = 28d$, arătaţi că $2a + 5c = 3b + 4d$.

8. Se consideră numerele $a, b \in \mathbb{R}$, care îndeplinesc condiţiile $\sqrt{3}a^3 = \sqrt{6}b$ şi $2\sqrt{3}a = \sqrt{6}b^3$. Arătaţi că $|a| = |b|$.

9. Verificaţi identităţile:

a) $xy + x + y + 1 = (x + 1)(y + 1)$; b) $xy - x - y + 1 = (x - 1)(y - 1)$.

10. Verificaţi identităţile:

a) $\frac{1}{2}xy + x + y + 2 = \frac{1}{2}(x + 2)(y + 2)$; b) $\frac{1}{3}xy - x - y + 3 = \frac{1}{3}(x - 3)(y - 3)$.

Exerciţii şi probleme de dificultate avansată

11. Se consideră numerele $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, care îndeplinesc condiţiile $a + b + c = 1$ şi $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = 0$. Arătaţi că $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$.

12. Se consideră numerele $x, y, z \in \mathbb{R}$, care îndeplinesc condiţiile $x \cdot y \cdot z = 1$ şi $\frac{x^2 + yz}{1+x^3} + \frac{y^2 + zx}{1+y^3} + \frac{z^2 + xy}{1+z^3} = 0$. Arătaţi că: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$.

Ce notă merit?
Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Se consideră numerele $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $x = y$. Arătaţi că:

a) $x\sqrt{2} - 1 = y\sqrt{2} - 1$; b) $\frac{x}{2} + 3 = \frac{y}{2} + 3$.

(3p) **2.** Se consideră numerele reale z şi t, care îndeplinesc condiţia $\sqrt{10}x = \sqrt{14}y$. Arătaţi că $\sqrt{5}x + 2 = \sqrt{7}y + 2$.

(3p) **3.** Se consideră numerele reale $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, care îndeplinesc condiţiile $4a = 5b$ şi $14c = 10d$. Arătaţi că $12a + 7c = 15b + 5d$.

Lecția 2. Ecuații de forma $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$

Citesc și rețin

O ecuație de forma $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ și $x \in \mathbb{R}$ (1), se numește **ecuație de gradul I cu o necunoscută**.

Definiție: Un număr $u \in \mathbb{R}$ se numește **soluție a ecuației** (1), dacă

$au + b = 0$ (u verifică ecuația).

A rezolva ecuația (1) înseamnă a determina **mulțimea de soluții**

$$S = \{u \in \mathbb{R} \mid au + b = 0\}.$$

Definiție: Două ecuații de gradul I cu o necunoscută se numesc **echivalente**, dacă au aceeași mulțime de soluții.

Pentru a rezolva ecuația (1) putem folosi proprietățile relației de egalitate pe $\mathbb{R}$.

Cum se aplică?

1. Rezolvați în $\mathbb{R}$ următoarele ecuații:

a) $-20x = -35$; b) $3\sqrt{2}x = -6\sqrt{6}$.

Soluție:

a) $-20x = -35 \Leftrightarrow x = \dfrac{-35}{-20} \Leftrightarrow x = +\dfrac{35^{(5}}{20} \Leftrightarrow x = \dfrac{7}{4} \Leftrightarrow x = 1\dfrac{3}{4}$;

b) $3\sqrt{2}x = -6\sqrt{6} \Leftrightarrow x = \dfrac{-6\sqrt{6}}{3\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = -\dfrac{6\sqrt{6}}{3\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = -2\sqrt{3}$.

2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $1{,}5 + 0{,}(6)x = 2$; b) $8\sqrt{6} : x - \sqrt{2} = \sqrt{2}$.

Soluție:

a) $1{,}5 + 0{,}(6)x = 2 \Leftrightarrow 0{,}(6)x = 2 - 1{,}5 \Leftrightarrow 0{,}(6)x = 0{,}5 \Leftrightarrow \dfrac{6^{(3}}{9}x = \dfrac{5^{(5}}{10} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{3}x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2} : \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{4}$;

b) $8\sqrt{6} : x - \sqrt{2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow 8\sqrt{6} : x = \sqrt{2} + \sqrt{2} \Leftrightarrow 8\sqrt{6} : x = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = (8\sqrt{6}) : (2\sqrt{2}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 4\sqrt{3}$.

3. Rezolvați ecuația $\dfrac{3x}{5} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2(7x+5)}{15}$, unde $x \in \mathbb{R}$.

Soluție:

$\dfrac{^{6)}3x}{5} - \dfrac{^{15)}1}{2} = \dfrac{^{2)}2(7x+5)}{15} \Leftrightarrow 18x - 15 = 4(7x + 5) \Leftrightarrow 18x - 15 = 28x + 20 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 18x - 28x = 20 + 15 \Leftrightarrow -10x = 35 \Leftrightarrow x = \dfrac{35^{(5}}{-10} \Leftrightarrow x = -\dfrac{7}{2}$.

GEOMETRIE

Capitolul III

ASEMĂNAREA TRIUNGHIURILOR

Lecţia 1. Segmente proporţionale. Teorema paralelelor echidistante

Citesc şi reţin

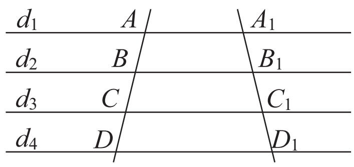
Definiţie: Raportul a două segmente este **raportul lungimilor** lor exprimate în aceleaşi unităţi de măsură.

Definiţie: Segmentele A_1B_1, A_2B_2, …, A_nB_n şi E_1F_1, E_2F_2, …, E_nF_n se numesc **proporţionale** dacă rapoartele lungimilor lor, exprimate cu aceleaşi unităţi de măsură, formează şirul de rapoarte egale:

$$\frac{A_1B_1}{E_1F_1} = \frac{A_2B_2}{E_2F_2} = \ldots = \frac{A_nB_n}{E_nF_n}.$$

Teorema paralelelor echidistante: Dacă trei sau mai multe drepte paralele determină pe o secantă segmente congruente, atunci acestea determină pe orice secantă segmente congruente.

$d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel d_4$, $AB \equiv BC \equiv CD \Rightarrow$
$\Rightarrow A_1B_1 \equiv B_1C_1 \equiv C_1D_1$.



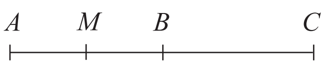
Cum se aplică?

1. Determinaţi raportul segmentelor AB şi EF cu lungimile de 4 cm, respectiv 140 mm.

Soluţie:

Exprimăm lungimea segmentului EF în centimetri: $EF = 140$ mm $= 140 : 10$ cm $= 14$ cm, deci $\frac{AB}{EF} = \frac{4\text{ cm}}{14\text{ cm}} = \frac{2}{7}$.

2. Pe o dreaptă considerăm punctele A, B şi C, în această ordine, astfel încât $AB \equiv BC$ şi notăm cu M mijlocul segmentului AB. Arătaţi că segmentele AM, MB, AB şi BC sunt proporţionale.



Soluţie:

Notăm $AB = 2x$, deci $BC = 2x$, $AM = x$ şi $MB = x$;

$\frac{AM}{AB} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$ şi $\frac{MB}{BC} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$, prin urmare $\frac{AM}{AB} = \frac{MB}{BC}$.

3. Se consideră segmentul EF şi punctul D interior acestuia EF, astfel încât $\frac{DE}{DF}=\frac{3}{5}$.

Aflaţi rapoartele: $\frac{DF}{DE}$, $\frac{DE}{EF}$ şi $\frac{EF}{DF}$.

Soluţie:

Deoarece $\frac{DE}{DF}=\frac{3}{5}$, rezultă că $\frac{DF}{DE}=\frac{5}{3}$. În continuare aplicăm proprietăţile proporţiilor derivate cu alţi termeni: $\frac{DE}{DF}=\frac{3}{5}$, deci $\frac{DE}{DE+DF}=\frac{3}{3+5}$, aşadar $\frac{DE}{EF}=\frac{3}{8}$; $\frac{DE}{DF}=\frac{3}{5}$, deci $\frac{DE+DF}{DF}=\frac{3+5}{5}$, aşadar $\frac{EF}{DF}=\frac{8}{5}$.

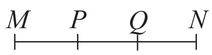
Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. În figura alăturată este reprezentat segmentul EF şi punctul M, mijlocul acestuia. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $\frac{EM}{EF}=\frac{1}{2}$; ☐ b) $\frac{EM}{MF}=1$; ☐ c) $\frac{EF}{EM}=2$; ☐ d) $\frac{FM}{FE}=\frac{1}{3}$. ☐

2. În figura alăturată este reprezentat segmentul MN şi punctele P şi Q interioare acestuia, astfel încât $MP\equiv PQ\equiv QN$. Completaţi spaţiile punctate cu răspunsul corect.



a) $\frac{MP}{MN}=$ ....; b) $\frac{MQ}{MN}=$ ....; c) $\frac{MQ}{PN}=$ ....; d) $\frac{NQ}{NP}=$ ....

3. Determinaţi raportul segmentelor AB şi CD în următoarele cazuri:

a) $AB = 12$ cm şi $CD = 18$ cm; b) $AB = 36$ dm şi $CD = 24$ dm;
c) $AB = 32$ dm şi $CD = 40$ dm; d) $AB = 63$ cm şi $CD = 72$ cm.

c)

d)

4. În figura alăturată, pe dreapta d au fost construite punctele A, B, C, D şi E în această ordine, astfel încât $AB\equiv BC\equiv CD\equiv DE$. Completaţi spaţiile punctate cu răspunsul corect.

a) $\frac{AB}{BE}=$ ....; b) $\frac{AC}{BE}=$ ....; c) $\frac{EA}{EB}=$ ....; d) $\frac{DE}{DA}=$ ....

5. Determinaţi raportul segmentelor AB şi CD în următoarele cazuri:

a) $AB = 15$ m şi $CD = 2{,}4$ dam;
b) $AB = 28$ m şi $CD = 0{,}08$ hm;
c) $AB = 6$ dam şi $CD = 450$ dm;
d) $AB = 72$ dm şi $CD = 450$ cm.

c)

6. Arătaţi că segmentele AB, CD, EF şi MN sunt proporţionale, ştiind că:

a) $AB = 12$ cm, $CD = 9$ cm, $EF = 28$ cm şi $MN = 21$ cm;
b) $AB = 8$ cm, $CD = 25$ cm, $EF = 20$ cm şi $MN = 10$ cm.

b)

Exerciţii şi probleme de dificultate medie

7. Dacă notăm cu M mijlocul segmentului AB şi cu P mijlocul segmentului AM, aflaţi rapoartele:

a) $\frac{AM}{AB}$; b) $\frac{AP}{AB}$; c) $\frac{PB}{AM}$; d) $\frac{AB}{PB}$.

8. Punctul C este mijlocul segmentului AB, iar punctul D este interior segmentului BC astfel încât $BC = 3BD$. Aflaţi:

a) $\frac{BD}{BC}$; b) $\frac{DC}{DA}$; c) $\frac{CD}{AB}$; d) $\frac{AB}{AD}$.

9. Punctul M este interior segmentului AB. Dacă:

a) $\frac{MA}{MB} = \frac{4}{5}$, aflaţi $\frac{MB}{MA}, \frac{MA}{AB}, \frac{AB}{MB}$; b) $\frac{MA}{AB} = \frac{2}{7}$, aflaţi $\frac{AB}{AM}, \frac{MB}{MA}, \frac{MB}{AB}$.

10. Se consideră triunghiul echilateral ABC şi punctele E_1, E_2 interioare laturii AB, astfel încât $AE_1 \equiv E_1E_2 \equiv E_2B$. Paralelele la dreapta BC, construite prin punctele E_1 şi E_2, intersectează latura AC în punctele F_1, respectiv F_2. Ştiind că $AF_1 = 7{,}5$ cm, calculaţi $\mathscr{P}_{ABC}$.

11. Pe o dreaptă considerăm punctele A, B, C şi D, în această ordine, astfel încât $AB \equiv BC \equiv CD$ şi notăm cu M mijlocul segmentului AB. Arătaţi că:

a) segmentele AB, MB, AD şi MC sunt proporţionale;
b) segmentele DB, DA, BC şi MC sunt proporţionale.

12. Se consideră trapezul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, şi punctele M_1, M_2, M_3 interioare laturii AD, astfel încât $AM_1 \equiv M_1M_2 \equiv M_2M_3 \equiv M_3D$. Paralelele la dreapta AB, construite prin punctele M_1, M_2 şi M_3, intersectează latura BC în punctele N_1, N_2, respectiv N_3. Dacă $AD = 16$ cm şi $BC = 20$ cm, calculaţi lungimile segmentelor:

a) AM_1, M_1M_2, M_2M_3 şi M_3D;
b) BN_1, N_1N_2, N_2N_3 şi N_3C.

13. Pe dreapta d se consideră punctele A, B, C, D şi E în această ordine, astfel încât $BC = 2AB$, $BC \equiv CD$ şi $DE \equiv AB$. Arătaţi că:

a) segmentele AB, AC, CE şi DE sunt proporţionale;

b) segmentele AC, BC, CD şi CE sunt proporţionale.

Exerciţii şi probleme de dificultate avansată

14. Fie D şi E două puncte interioare segmentului AB. Dacă $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EB}$, arătaţi că punctele D şi E sunt identice.

15. În triunghiul ABC, notăm cu M mijlocul laturii BC şi construim $ME \perp AB$, $E \in AB$ şi $MF \perp AC$, $F \in AC$. Arătaţi că segmentele AB, AC, ME şi MF sunt proporţionale.

Ce notă merit?
Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Se consideră segmentul EF şi punctul D interior acestuia, astfel încât $ED = 2DF$. Determinaţi rapoartele:

a) $\frac{ED}{EF}$; b) $\frac{FD}{FE}$; c) $\frac{FD}{DE}$.

(3p) **2.** Arătaţi că segmentele AB, CD, MN şi PQ sunt proporţionale, ştiind că $AB = 18$ cm, $CD = 35$ cm, $MN = 45$ cm şi $PQ = 14$ cm.

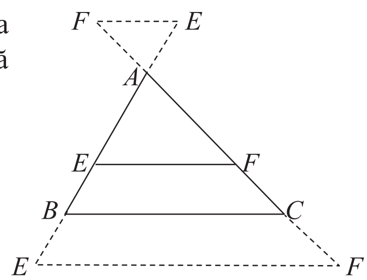
(3p) **3.** Se consideră segmentul MN şi punctul P interior acestuia, astfel încât $\frac{MP}{PN} = \frac{5}{4}$. Aflaţi rapoartele $\frac{MP}{MN}$ şi $\frac{PN}{MN}$.

Lecţia 2. Teorema lui Thales

Citesc şi reţin

Teorema lui Thales: O paralelă construită la una dintre laturile unui triunghi determină pe celelalte două laturi ale triunghiului **segmente proporţionale**.

$$EF \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC}$$



Cuprins