Cuvânt-înainte

Matematica este arta de a construi realitatea și de a oferi înțelesuri noi cunoașterii umane. Urmând definiția artei, matematica presupune exersare și îndemânare, cunoaștere și simț estetic și, mai ales, imaginație și intuiție. Matematica este poezia ideilor logice, iar adevărurile matematice sunt gamele muzicale în care este scrisă simfonia legilor naturii.

Matematica clasei a VII-a este povestea marilor descoperiri: începem călătoria măsurând realitatea cu mărimi și forme noi (Unitatea 1: Mulțimea numerelor reale), apoi transpunem problemele practice în modele matematice (Unitatea 2: Ecuații și sisteme de ecuații liniare) și stabilim coordonate matematice pentru lumea înconjurătoare sau pentru activitățile cotidiene (Unitatea 3: Elemente de organizare a datelor). Realitatea se descrie în forme noi, drepte (Unitatea 4: Patrulatere) sau rotunde (Unitatea 5: Cercul), și se modelează în dimensiuni mai mari sau mai mici (Unitatea 5: Asemănarea triunghiurilor). Cum orice final amintește de început, ultima aventură aduce împreună numerele și formele geometrice (Unitatea 7: Relații metrice).

Pentru ca aventura noastră matematică să fie încununată de succes, manualul ne poartă printre idei, concepte, definiții și teoreme folosind o exprimare prietenoasă, apropiată de elev, apelând la simțul practic și la intuiție. Introducerea conceptelor matematice se face plecând de la exemple din realitatea imediată, de la experiențele de zi cu zi. Matematica apare astfel ca o lume deschisă, vie, dinamică, în strânsă legătură cu toate domeniile de activitate, capabilă să formuleze, să descrie și să explice situații, probleme, fenomene sau procese.

Deși nu apare la cuprins, adevărata lecție din acest manual este aceea care ne învață să ne punem întrebarea: „De ce?“. Educația matematică este nu doar o simplă activitate de învățare, ci reprezintă *antrenarea minții pentru a gândi*. Manualul oferă, la fiecare pas, momente de investigație, de reflecție, ocazii de a pune întrebări și de a corela răspunsurile posibile cu datele situațiilor analizate.

Matematica este cea mai frumoasă și mai profundă creație a spiritului uman. Umanitatea are nevoie de matematică, pentru că tot ceea ce există în Univers nu este doar descris de matematică, ci este construit din matematică.

Acest manual este ghidul de călătorie în universul minunat al matematicii.

Autorii

Prezentarea manualului

Manualul cuprinde:
varianta tipărită

+

varianta digitală, similară cu cea tipărită, care are în plus activități multimedia interactive de învățare, cu rolul de a spori valoarea cognitivă.
Varianta digitală este accesibilă pe platforma www.manuale.edu.ro.

Manualul este împărțit în șapte unități care acoperă integral conținutul prevăzut de programa școlară. Lecțiile care compun o unitate sunt prezentate în mod coerent, unitar, într-un stil consecvent.

Fiecare lecție debutează cu o problemă practică, pe baza căreia se introduc noile concepte. Acestea sunt conturate apoi într-un limbaj matematic care echilibrează nivelul descriptiv cu rigoarea specifică matematicii. Noțiunile noi sunt însoțite de exemple semnificative, comentarii și aplicații.

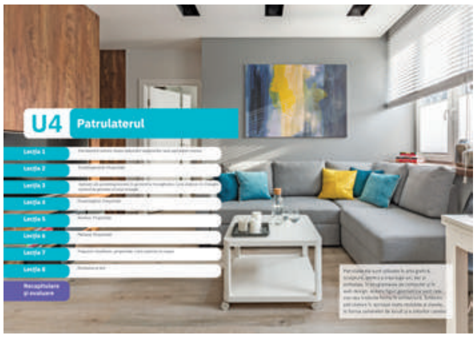
Manualul acordă o atenție sporită gândirii critice și dezvoltării calculului mintal, prin zone dedicate, încurajând în același timp activitățile de grup, independența în gândire și dezvoltarea încrederii în sine. Evaluarea se realizează prin forme și instrumente diversificate, orientate spre formarea și dezvoltarea competențelor matematice.

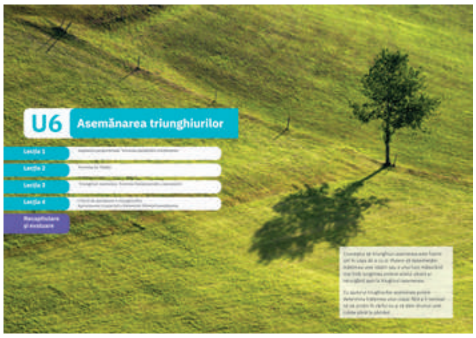
Instrucțiuni de utilizare a manualului digital

Varianta digitală a manualului este similară cu cea tipărită, având în plus 155 de AMII, activități multimedia interactive de învățare, cu rolul de a spori valoarea cognitivă. Activitățile multimedia interactive de învățare sunt de trei feluri, simbolizate pe parcursul manualului astfel:

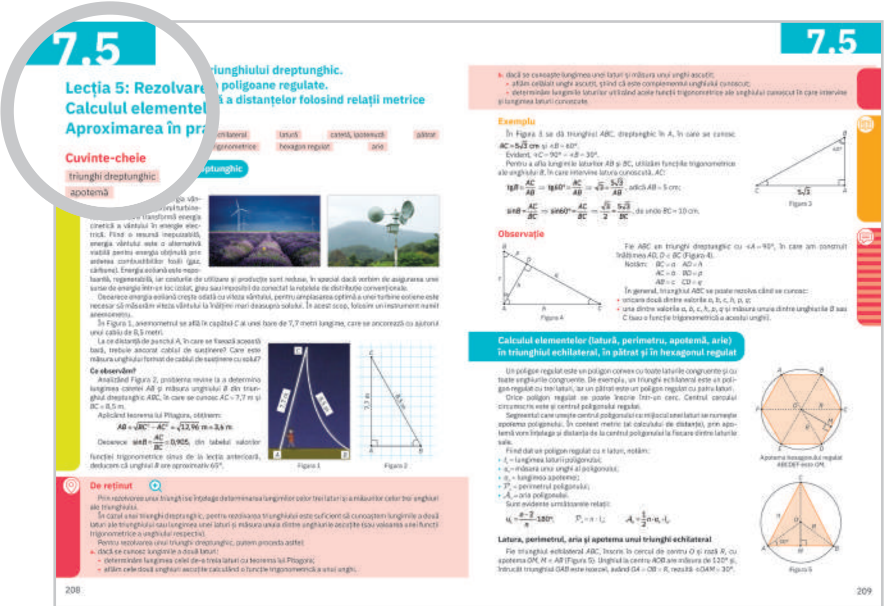
- **Activitate statică**, de ascultare activă și de observare dirijată a unei imagini semnificative
- **Activitate animată**, filmuleț sau scurtă animație
- **Activitate interactivă**, de tip exercițiu sau joc, în urma căreia elevul are feedback imediat

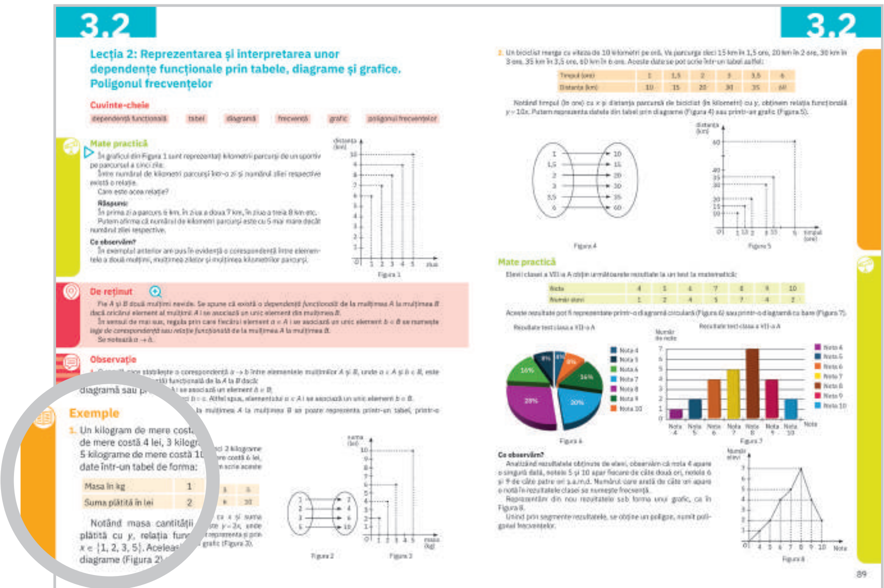
Manualul este structurat în 7 unități de învățare

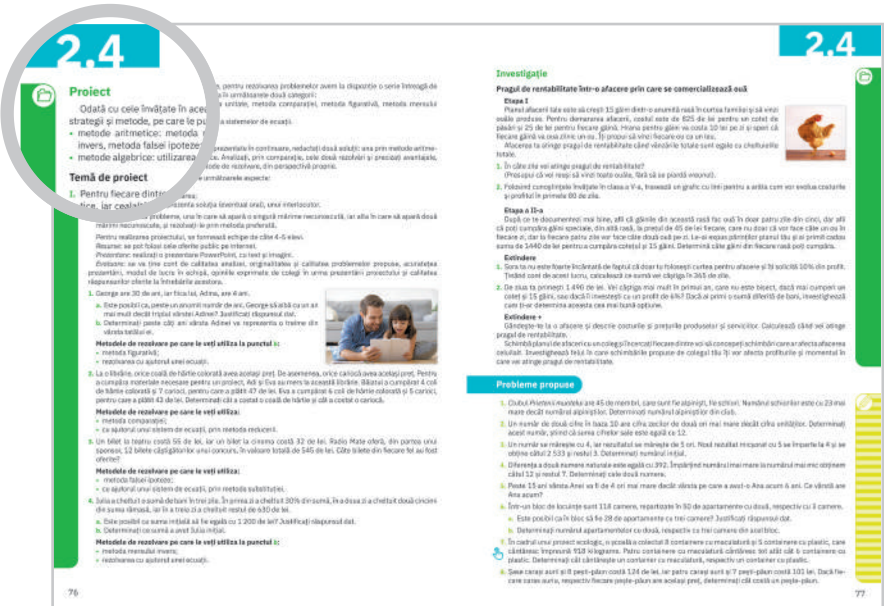


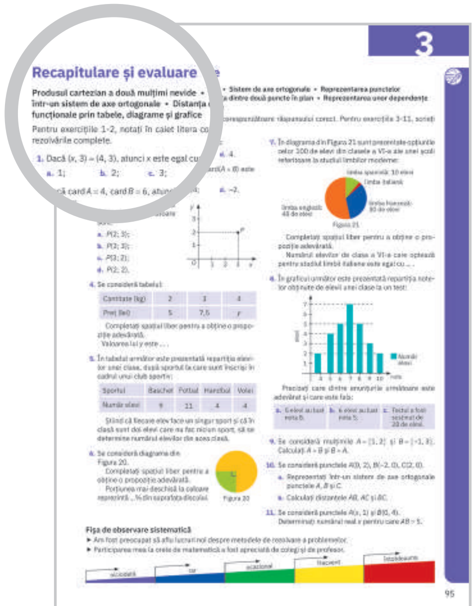


Structura unității de învățare









Alte butoane folosite în varianta digitală:

- Cuprins
- Ecran complet
- Mod de afișare 2 pagini (tip carte)
- Mod de afișare pagină lată (pagină sub pagină)
- Mod de afișare digital responsive
- Mod de afișare comutare automată
- Notițe
- Ajutor
- Navigare către pagina precedentă
- Navigare către pagina următoare

Cuprins

Competențe generale și specifice

Competențe generale

1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar
2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale
3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice
4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată
5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date
6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

Competențe specifice

1.1. Identificarea numerelor aparținând diferitelor submulțimi ale lui $\mathbb{R}$
1.2. Identificarea unei situații date rezolvabile prin ecuații sau sisteme de ecuații liniare
1.3. Identificarea unor informații din tabele, grafice și diagrame
1.4. Identificarea patrulaterelor particulare în configurații geometrice date
1.5. Identificarea elementelor cercului și/sau poligoanelor regulate în configurații geometrice date
1.6. Identificarea triunghiurilor asemenea în configurații geometrice date
1.7. Recunoașterea elementelor unui triunghi dreptunghic într-o configurație geometrică dată
2.1. Aplicarea regulilor de calcul pentru estimarea și aproximarea numerelor reale
2.2. Utilizarea regulilor de calcul cu numere reale pentru verificarea soluțiilor unor ecuații sau sisteme de ecuații liniare
2.3. Prelucrarea unor date sub formă de tabele, grafice sau diagrame în vederea înregistrării, reprezentării și prezentării acestora
2.4. Descrierea patrulaterelor utilizând definiții și proprietăți ale acestora, în configurații geometrice date
2.5. Descrierea proprietăților cercului și ale poligoanelor regulate înscrise într-un cerc
2.6. Stabilirea relației de asemănare între triunghiuri
2.7. Aplicarea relațiilor metrice într-un triunghi dreptunghic pentru determinarea unor elemente ale acestuia
3.1. Utilizarea unor algoritmi și a proprietăților operațiilor în efectuarea unor calcule cu numere reale
3.2. Utilizarea transformărilor echivalente în rezolvarea unor ecuații și sisteme de ecuații liniare
3.3. Alegerea metodei adecvate de reprezentare a problemelor în care intervin dependențe funcționale și reprezentări ale acestora
3.4. Utilizarea proprietăților patrulaterelor în rezolvarea unor probleme
3.5. Utilizarea proprietăților cercului în rezolvarea de probleme
3.6. Utilizarea asemănării triunghiurilor în configurații geometrice date pentru determinarea de lungimi, măsuri și arii
3.7. Deducerea relațiilor metrice într-un triunghi dreptunghic
4.1. Folosirea terminologiei aferente noțiunii de număr real (semn, modul, opus, invers)
4.2. Redactarea rezolvării ecuațiilor și sistemelor de ecuații liniare
4.3. Descrierea în limbajul specific matematicii a unor elemente de organizare a datelor
4.4. Exprimarea în limbaj geometric a noțiunilor legate de patrulatere
4.5. Exprimarea proprietăților cercului și ale poligoanelor în limbaj matematic
4.6. Exprimarea în limbaj matematic a proprietăților unor figuri geometrice folosind asemănarea
4.7. Exprimarea în limbaj matematic a relațiilor dintre elementele unui triunghi dreptunghic
5.1. Elaborarea de strategii pentru rezolvarea unor probleme cu numere reale
5.2. Stabilirea unor metode de rezolvare a ecuațiilor sau a sistemelor de ecuații liniare
5.3. Analizarea unor situații practice prin elemente de organizare a datelor
5.4. Alegerea reprezentărilor geometrice adecvate în vederea optimizării calculării unor lungimi de segmente, a unor măsuri de unghiuri și a unor arii
5.5. Interpretarea unor proprietăți ale cercului și ale poligoanelor regulate folosind reprezentări geometrice
5.6. Interpretarea asemănării triunghiurilor în configurații geometrice
5.7. Interpretarea unor relații metrice între elementele unui triunghi dreptunghic
6.1. Modelarea matematică a unor situații practice care implică operații cu numere reale
6.2. Transpunerea matematică a unor situații date, utilizând ecuații și/sau sisteme de ecuații liniare
6.3. Transpunerea unei situații date într-o reprezentare adecvată (text, formulă, diagramă, grafic)
6.4. Modelarea unor situații date prin reprezentări geometrice cu patrulatere
6.5. Modelarea matematică a unor situații practice în care intervin poligoane regulate sau cercuri
6.6. Implementarea unei strategii pentru rezolvarea unor situații date, utilizând asemănarea triunghiurilor
6.7. Implementarea unei strategii pentru rezolvarea unor situații date, utilizând relații metrice în triunghiul dreptunghic

U1 Mulțimea numerelor reale

Majoritatea numerelor pe care le utilizăm cotidian sunt numere reale. Printre acestea se află: numărul banilor pe care îi avem în portofel, statisticile pe care le vedem la emisiunile sportive, măsurile din cărțile de bucate. Apelăm la numere reale pentru a indica viteza vântului, cantitățile de precipitații, distanțele, dar și volumul de benzină din rezervor și pulsul cardiac.

Lecția 1: Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural. Estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional pozitiv

Cuvinte cheie

pătrat perfect   rădăcină pătrată   radical

Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural

Mate practică

Terenul din imagine are forma unui pătrat, iar aria sa este egală cu 6 400 m^2.

Ce lungime are latura terenului?

Aria unui pătrat este egală cu pătratul lungimii laturii pătratului.

Notând cu l lungimea laturii terenului, exprimată în metri, aria terenului este l^2 metri pătrați.

Așadar, $l^2 = 6\,400$. Cum $80^2 = 6\,400$, obținem $l = 80$ m.

Ce observăm?

În anumite situații practice, este necesar să determinăm un număr natural n cunoscând cât este pătratul său n^2. Această operație se numește *extragerea rădăcinii pătrate* a numărului n^2.

Un număr natural care este pătratul unui alt număr natural se numește pătrat perfect.

De reținut

Fie a un număr natural pătrat perfect. Se numește *rădăcina pătrată* a sa numărul natural n astfel încât $n^2 = a$.

Numărul n se notează $\sqrt{a}$ și se citește *radical din a*. Astfel, se poate scrie:

$$\sqrt{a} = n \text{ dacă și numai dacă } n^2 = a.$$

Exemple

1. $\sqrt{0} = 0$, deoarece $0^2 = 0$;
2. $\sqrt{25} = 5$, deoarece $5^2 = 25$;
3. $\sqrt{121} = 11$, deoarece $11^2 = 121$;
4. $\sqrt{729} = 27$, deoarece $27^2 = 729$;
5. $\sqrt{1024} = 32$, deoarece $32^2 = 1\,024$;
6. $\sqrt{7225} = 85$, deoarece $85^2 = 7\,225$.

Observație

Legătura dintre operația de ridicare la pătrat și operația de extragere a rădăcinii pătrate

Din definiția rădăcinii pătrate a unui număr natural pătrat perfect rezultă imediat că:

1. $\sqrt{n^2} = n$, pentru orice număr natural n;
2. $(\sqrt{a})^2 = a$, pentru orice număr natural pătrat perfect a.

$$\begin{tikzcd} n \arrow[r, bend left, "\text{ridicarea la pătrat}"] & n^2 \arrow[l, bend left, "\text{extragerea rădăcinii pătrate}"] \end{tikzcd}$$

Cu alte cuvinte, operațiile de ridicare la pătrat și de extragere a rădăcinii pătrate sunt operații inverse una celeilalte.

Exemple

1. $\sqrt{7^2} = 7$, deoarece $\sqrt{7^2} = \sqrt{49} = 7$;
2. $(\sqrt{16})^2 = 16$, deoarece $(\sqrt{16})^2 = 4^2 = 16$;
3. $\sqrt{5^2} = 5$, deoarece $\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$;
4. $(\sqrt{81})^2 = 81$, deoarece $(\sqrt{81})^2 = 9^2 = 81$.

Rădăcina pătrată a pătratului unui număr rațional pozitiv

În paragraful anterior, am văzut că dacă un număr natural a se poate scrie ca pătratul unui alt număr natural n, atunci a se numește pătrat perfect, iar n se numește rădăcina pătrată (sau radicalul) lui a.

Vom extinde această definiție și pentru pătratele unor numere raționale pozitive.

Activitate pe grupe

1. Lucrând în echipe de câte 2 elevi, copiați și completați tabelul:

x	0,7	1,2	1,3	1,4	1,5	4,5	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{9}{13}$	$\frac{11}{101}$
x^2	0,49					20,25		$\frac{49}{25}$		

2. Transcrieți pe caiete tabelul de mai jos, verificați corectitudinea datelor și determinați, prin încercări, valorile numerelor raționale pozitive x care trebuie scrise în cea de a doua linie a tabelului astfel încât să existe corespondența indicată între x^2 și x:

x^2	0,01	1,69	1,96	2,25	8,41	30,25	$\frac{4}{9}$	$\frac{49}{25}$	$\frac{169}{81}$	$\frac{256}{625}$
x	0,1				2,9		$\frac{2}{3}$			

3. Comparați, între echipe, rezultatele obținute, atât pentru primul, cât și pentru al doilea tabel, și analizați legăturile ce există între datele din cele două tabele.

De reținut

Fie a un număr rațional pozitiv care se poate scrie ca pătratul unui număr rațional.
Numărul rațional pozitiv x cu proprietatea $x^2 = a$ se numește *rădăcina pătrată* a numărului rațional a.

Ca mai înainte, x se notează $\sqrt{a}$ și se citește *radical din a*. Astfel, dacă numărul rațional $a > 0$ este pătratul unui număr rațional, se poate scrie:

$$\sqrt{a} = x \text{ dacă și numai dacă } x^2 = a \text{ și } x > 0.$$

Întrucât $\sqrt{0} = 0$, relația anterioară se scrie mai general, pentru $a \geq 0$, sub forma:

$$\sqrt{a} = x \text{ dacă și numai dacă } x^2 = a \text{ și } x \geq 0.$$

Exemple

1. $\sqrt{0{,}04} = 0{,}2$, deoarece $(0{,}2)^2 = 0{,}04$;

2. $\sqrt{11{,}56} = 3{,}4$, deoarece $3{,}4^2 = 11{,}56$;

3. $\sqrt{\frac{9}{49}} = \frac{3}{7}$, deoarece $\left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{9}{49}$;

4. $\sqrt{\frac{121}{729}} = \frac{11}{27}$, deoarece $\left(\frac{11}{27}\right)^2 = \frac{121}{729}$.

Observații

1. Dacă numărul rațional $a > 0$ este pătratul unui număr rațional x, atunci $a = x^2 = (-x)^2$.

Exemple: **a.** $\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2$; **b.** $5{,}76 = (2{,}4)^2 = (-2{,}4)^2$.

Definiția de mai sus arată că rădăcina pătrată a lui a este un număr pozitiv. Ca urmare:

a. $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ și $\sqrt{\frac{1}{4}} \neq -\frac{1}{2}$; **b.** $\sqrt{5{,}76} = 2{,}4$ și $\sqrt{5{,}76} \neq -2{,}4$.

2. Legătura dintre operația de ridicare la pătrat și extragerea rădăcinii pătrate se păstrează și în cazul numerelor raționale, cu respectarea condiției de pozitivitate de mai sus. Deoarece modulul unui număr rațional este nenegativ și $|-x| = |x|$, pentru orice număr rațional x, din definiția rădăcinii pătrate rezultă că:

a. $(\sqrt{a})^2 = a$, pentru orice număr rațional $a \geq 0$ care este pătratul unui număr rațional;

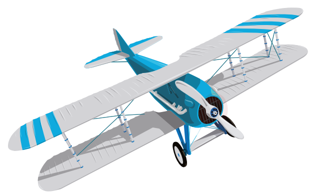
b. $\sqrt{x^2} = |x|$, pentru orice număr rațional x.

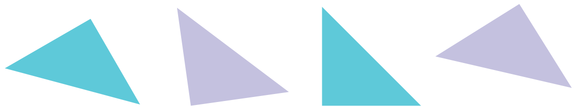
1.1

Rădăcina pătrată a unui număr rațional pozitiv

Mate practică

Pentru realizarea unui model de avion precum cel din imaginea alăturată, sunt necesare patru piese identice din placaj, sub forma unor triunghiuri dreptunghice isoscele cu catetele având lungimea de 1 dm.





Piesele se pot obține în două moduri:

1. Desenăm pe foaia de placaj un dreptunghi cu dimensiunile de 1 dm și 2 dm, îl împărțim în două pătrate de latură 1 dm, apoi facem două tăieturi pe diagonalele acestor pătrate, ca în Figura 1, obținând cele patru piese.

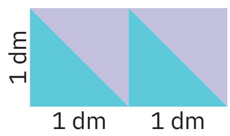


Figura 1

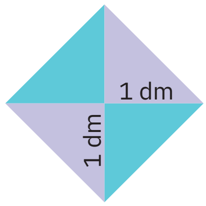


Figura 2

2. Observăm că piesele pot fi aranjate astfel încât să formeze un pătrat (Figura 2). Ne propunem să aflăm lungimea laturii acestui pătrat, pentru ca, decupându-l din altă bucată de placaj, să nu facem risipă de material.

Deoarece patrulaterele din figurile 1 și 2 au aceeași arie, de 2 dm^2, lungimea laturii pătratului este numărul pozitiv x, cu proprietatea că $x^2 = 2$. Cum nu există niciun număr rațional al cărui pătrat să fie egal cu 2, căutăm o aproximare a acestuia.

Deoarece $1^2 < 2 < 2^2$, deducem că x trebuie să fie cuprins între 1 și 2.

De fapt, pentru că $1{,}4^2 = 1{,}96$ și $1{,}5^2 = 2{,}25$, înseamnă că $1{,}4 < x < 1{,}5$. Mai precis, $1{,}41 < x < 1{,}42$, întrucât $1{,}41^2 = 1{,}9881 < 2$ și $1{,}42^2 = 2{,}0164 < 2$.

Ce observăm?

Situația practică descrisă mai sus demonstrează că există un număr pozitiv x, cu proprietatea $x^2 = 2$, a cărui valoare, chiar dacă nu poate fi indicată cu exactitate, poate fi aproximată la un număr întreg sau la o fracție zecimală finită cu una, două sau mai multe zecimale.

Asemănător, putem arăta că, pentru orice număr rațional pozitiv a, există un număr pozitiv x al cărui pătrat este a. Mai mult, se poate demonstra că x este unicul număr cu această proprietate.

Astfel, noțiunea de rădăcină pătrată se extinde la numere raționale pozitive oarecare.

De reținut

Rădăcina pătrată a unui număr rațional pozitiv a este un număr pozitiv x, cu proprietatea $x^2 = a$.

Ca mai înainte, notăm $x = \sqrt{a}$ și spunem că x este *radicalul* numărului a (sau *radical din* a).

De asemenea, sunt valabile relațiile:

a. $\sqrt{a} = x$ dacă și numai dacă $x^2 = a$;

b. $(\sqrt{a})^2 = a$, pentru orice număr rațional $a \geq 0$;

c. $\sqrt{a^2} = |a|$, pentru orice număr rațional a.

Exemple

În problema practică de mai înainte, lungimea x a laturii pătratului verifică relația $x^2 = 2$, deci, conform definiției, $x = \sqrt{2}$.

În mod asemănător, alte probleme practice conduc la concluzia că există numerele pozitive $\sqrt{3}$, $\sqrt{3{,}14}$ sau $\sqrt{\frac{5}{12}}$.

Estimarea rădăcinii pătrate a unui număr rațional pozitiv

A *estima* o cantitate înseamnă a indica o valoare aproximativă a acesteia, fără a cunoaște toate datele necesare pentru a putea formula un răspuns exact. Pentru a putea utiliza în practică un număr de forma $\sqrt{a}$, unde a este număr rațional pozitiv, vom folosi aproximări ale sale la numere întregi sau la fracții zecimale finite, încadrând numărul rațional a între pătratele a două numere raționale.

Estimarea rădăcinii pătrate a unui număr rațional pozitiv prin încadrarea între pătrate de numere raționale

Să considerăm, de exemplu, numărul rațional 5,61. Încadrăm acest număr între două pătrate perfecte consecutive: $2^2 < 5{,}61 < 3^2$, de unde rezultă că $2 < \sqrt{5{,}61} < 3$.

Prin urmare, aproximarea lui $\sqrt{5{,}61}$ la ordinul unităților este egală cu 2, dacă aproximarea se face prin lipsă, respectiv cu 3, dacă aproximarea se face prin adaos.

Pentru a determina aproximările lui $\sqrt{5{,}61}$ la ordinul zecimilor și al sutimilor, vom proceda astfel:

Pasul 1: Calculăm pătratele numerelor de forma $\overline{2{,}a}$, unde $a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$.
Obținem $2{,}3^2 < 5{,}61 < 2{,}4^2$, deci $\sqrt{5{,}61} \simeq 2{,}3\ldots$.

Pasul 2: Calculăm pătratele numerelor de forma $\overline{2{,}3a}$, unde $a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$.
Obținem $2{,}36^2 < 5{,}61 < 2{,}37^2$, de unde rezultă $\sqrt{5{,}61} \simeq 2{,}36\ldots$.

Continuând în acest fel se pot obține aproximări cu oricâte zecimale.

Utilizarea minicalculatorului pentru aflarea valorii aproximative a rădăcinii pătrate

Folosind minicalculatorul (sau aplicații mobile sau tablete), rădăcina pătrată a unui număr rațional pozitiv se află introducând în calculator numărul respectiv, în formă zecimală, și apăsând apoi tasta pe care este marcat semnul *radical*.

De exemplu, valoarea aproximativă a lui $\sqrt{2}$ se află apăsând, în ordine, tastele:

2 → $\sqrt{\ }$ → 1,4142135

Dacă numărul rațional este dat sub forma unei fracții ordinare, atunci folosim tasta de împărțire pentru a aduce numărul la forma zecimală, apoi apăsăm tasta radical.

Portofoliu

Consultați manualul digital pentru a studia:

- metoda babiloniană pentru determinarea valorii aproximative a rădăcinii pătrate a unui număr rațional pozitiv;
- algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional pozitiv exprimat printr-o fracție zecimală finită. Folosind algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate, calculați, cu două zecimale exacte, radicalul dintr-un număr natural care nu este pătrat perfect.

Observație

Tabel cu valorile radicalilor numerelor naturale cuprinse între 1 și 25

$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{6} = 2{,}4494\ldots$	$\sqrt{11} = 3{,}3166\ldots$	$\sqrt{16} = 4$	$\sqrt{21} = 4{,}5825\ldots$
$\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$	$\sqrt{7} = 2{,}6457\ldots$	$\sqrt{12} = 3{,}4641\ldots$	$\sqrt{17} = 4{,}1231\ldots$	$\sqrt{22} = 4{,}6904\ldots$
$\sqrt{3} = 1{,}7320\ldots$	$\sqrt{8} = 2{,}8284\ldots$	$\sqrt{13} = 3{,}6055\ldots$	$\sqrt{18} = 4{,}2426\ldots$	$\sqrt{23} = 4{,}7958\ldots$
$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{14} = 3{,}7416\ldots$	$\sqrt{19} = 4{,}3588\ldots$	$\sqrt{24} = 4{,}8989\ldots$
$\sqrt{5} = 2{,}2360\ldots$	$\sqrt{10} = 3{,}1622\ldots$	$\sqrt{15} = 3{,}8729\ldots$	$\sqrt{20} = 4{,}4721\ldots$	$\sqrt{25} = 5$

1.1

Investigație

Pe tablă sunt scrise numerele $a=7{,}84$ și $b=1{,}44$. Efectuați următoarele sarcini de lucru și verificați validitatea răspunsurilor voastre prin discuții cu colegii, și apoi cu profesorul. Scrieți în portofoliul personal concluziile corecte.

1. Calculați cu două zecimale exacte următoarele numere, eventual folosind calculatorul de buzunar:

$$\sqrt{a+b},\ \sqrt{a}+\sqrt{b},\ \sqrt{a-b},\ \sqrt{a}-\sqrt{b},\ \sqrt{a\cdot b},\ \sqrt{a}\cdot\sqrt{b},\ \sqrt{\frac{a}{b}} \text{ și } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

2. Decideți care dintre numerele $\sqrt{a+b}$ și $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ este mai mare. Faceți același lucru pentru $\sqrt{a-b}$ și $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, pentru $\sqrt{a\cdot b}$ și $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$, și apoi pentru $\sqrt{\frac{a}{b}}$ și $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

3. Repetați cerințele de la sarcinile de lucru 1 și 2, dacă $a=\frac{225}{256}$ și $b=\frac{4}{25}$.

Exerciții și probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. Arătați că numărul a este pătrat perfect, apoi calculați $\sqrt{a}$:

a. $a=25\cdot13+25\cdot20-25\cdot17$; **b.** $a=12\cdot(1+2+3+\ldots+24)$; **c.** $a=14^{60}$; **d.** $a=3^{24}\cdot7^{12}$.

Rezolvare:

a. $a=25\cdot13+25\cdot20-25\cdot17=25\cdot(13+20-17)=25\cdot16=5^2\cdot4^2=(5\cdot4)^2=20^2$, deci a este pătrat perfect. Obținem apoi $\sqrt{a}=\sqrt{20^2}=20$.

b. $a=12\cdot(1+2+3+\ldots+24)=12\cdot\frac{24\cdot25}{2}=12\cdot\frac{24}{2}\cdot25=12\cdot12\cdot25=12^2\cdot5^2=(12\cdot5)^2=60^2$, deci a este pătrat perfect. Obținem apoi $\sqrt{a}=\sqrt{60^2}=60$.

c. $a=14^{60}=14^{30\cdot2}=(14^{30})^2$, deci a este pătrat perfect. Obținem apoi $\sqrt{a}=\sqrt{(14^{30})^2}=14^{30}$.

d. $a=3^{24}\cdot7^{12}=(3^{12})^2\cdot(7^6)^2=(3^{12}\cdot7^6)^2$, deci a este pătrat perfect. Obținem apoi $\sqrt{a}=\sqrt{(3^{12}\cdot7^6)^2}=3^{12}\cdot7^6$.

2. Calculați:

a. $\sqrt{16}\cdot\sqrt{9}+\sqrt{100}:\sqrt{25}+\sqrt{25\cdot\sqrt{81}}$; **b.** $\sqrt{4^2\cdot15+4^2\cdot5^2-4^3}$.

Rezolvare:

a. Calculăm mai întâi radicalii, apoi respectăm ordinea efectuării operațiilor cu numere raționale:

$\sqrt{16}\cdot\sqrt{9}+\sqrt{100}:\sqrt{25}+\sqrt{25\cdot\sqrt{81}}=4\cdot3+10:5+\sqrt{25\cdot9}=12+2+\sqrt{5^2\cdot3^2}=14+\sqrt{15^2}=$
$=14+15=29$.

b. $\sqrt{4^2\cdot15+4^2\cdot5^2-4^3}=\sqrt{4^2\cdot(15+5^2-4)}=\sqrt{4^2\cdot36}=\sqrt{4^2\cdot6^2}=\sqrt{24^2}=24$.

Probleme propuse

1. Precizați care dintre numerele următoare este pătrat perfect:

a. 9; **b.** 24; **c.** 63; **d.** 81; **e.** 196; **f.** 144; **g.** 336; **h.** 400; **i** 625.

2. Scrieți pătratele perfecte cuprinse între 10 și 150.

3. Copiați în caiet, apoi completați tabelul următor:

x	3	7	9		15		23		
x^2		49		100		400		625	900

4. Stabiliți dacă următoarele egalități sunt adevărate sau false:

a. $\sqrt{4}=2$; **b.** $\sqrt{5}=25$; **c.** $\sqrt{225}=15$; **d.** $\sqrt{100}=50$; **e.** $\sqrt{64}=4$; **f.** $\sqrt{144}=12$.

5. Calculați:

a. $\sqrt{25}$; **b.** $\sqrt{81}$; **c.** $\sqrt{1}$; **d.** $\sqrt{400}$; **e.** $\sqrt{576}$; **f.** $\sqrt{900}$.

6. Calculați:

a. $\sqrt{4}+\sqrt{36}$; **b.** $\sqrt{49}-\sqrt{9}$; **c.** $\sqrt{1}+\sqrt{0}+\sqrt{16}$; **d.** $\sqrt{100}\cdot\sqrt{9}-\sqrt{25}:5$.

7. Folosind eventual minicalculatorul, calculați:

a. $\sqrt{441}+\sqrt{961}$; **b.** $\sqrt{4096}-\sqrt{1225}$; **c.** $\sqrt{2209}+2\cdot\sqrt{1369}$; **d.** $(\sqrt{17424}-\sqrt{1024}):\sqrt{4}$.

8. Calculați:

a. $\sqrt{3^2}$; **b.** $\sqrt{14^2}$; **c.** $\sqrt{45^2}$; **d.** $\sqrt{5^4}$; **e.** $\sqrt{8^6}$; **f.** $\sqrt{2^8}$; **g.** $\sqrt{3^{10}}$.

9. Calculați:

a. $\sqrt{5^2-3^2}+\sqrt{3^2+4^2}$; **b.** $\sqrt{9^2+12^2}-\sqrt{3\cdot12}$; **c.** $\sqrt{25^2-20^2}:3+2\cdot\sqrt{121}$.

10. Calculați:

a. $(\sqrt{196}-\sqrt{169})\cdot\sqrt{100}+\sqrt{225}$; **b.** $(\sqrt{400}-\sqrt{144}):4+\sqrt{196}:7$;

c. $\sqrt{3+\sqrt{36}}+\sqrt{16-\sqrt{49}}$; **d.** $\sqrt{6\cdot\sqrt{36}}+\sqrt{9\cdot\sqrt{81}}-\sqrt{20\cdot\sqrt{25}}$.

11. Arătați că numărul a este pătrat perfect, apoi calculați $\sqrt{a}$:

a. $1+3+5+7+9+11$; **b.** $(1+2+3+...+17):17$; **c.** $a=41\cdot(1+2+3+...+81)$.

12. Efectuați:

a. $\sqrt{2^2\cdot5+2^2\cdot4}$; **b.** $\sqrt{3^2\cdot15+3^2\cdot14-3^2\cdot4}$; **c.** $\sqrt{10^2\cdot81+10^2\cdot18+10^2}$;

d. $\sqrt{2^4\cdot3^2+2^4\cdot11+2^4\cdot5}$; **e.** $\sqrt{5^4\cdot20-5^4\cdot16+5^5}$; **f.** $\sqrt{6^4\cdot13+6^4\cdot5^2-6^4\cdot2}$.

13. Calculați x din relațiile următoare:

a. $\dfrac{x}{\sqrt{4}}=\dfrac{\sqrt{36}}{\sqrt{16}}$; **b.** $\dfrac{\sqrt{25}}{x}=\dfrac{\sqrt{100}}{\sqrt{144}}$; **c.** $\dfrac{2\cdot\sqrt{121}}{x}=\dfrac{\sqrt{49}-\sqrt{9}}{\sqrt{64}}$; **d.** $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{196}}}{x}=\dfrac{\sqrt{6^2+8^2}}{\sqrt{5+\sqrt{400}}}$.

14. Efectuați:

a. $\sqrt{3^2\cdot6^2}$; **b.** $\sqrt{8^2\cdot5^2\cdot2^2}$; **c.** $\sqrt{3^4\cdot5^4}$; **d.** $\sqrt{5^{20}\cdot6^{20}}$; **e.** $\sqrt{2^8\cdot3^{10}}$; **f.** $\sqrt{7^{16}\cdot10^{28}}$.

15. Folosind eventual minicalculatorul, efectuați:

a. $(\sqrt{15129}+\sqrt{2116}):\sqrt{169}-(\sqrt{13225}+\sqrt{841}):\sqrt{144}$;

b. $(3\cdot\sqrt{91809}+\sqrt{8281}):(\sqrt{32400}+2\cdot\sqrt{25600}):(\sqrt{168100}-\sqrt{166464})$.

16. Asociați fiecărui radical din prima linie valoarea sa din cea de-a doua linie:

a. $\sqrt{\dfrac{64}{49}}$	**b.** $\sqrt{3\dfrac{1}{16}}$	**c.** $\sqrt{\dfrac{441}{169}}$	**d.** $\sqrt{\dfrac{529}{144}}$	**e.** $\sqrt{\dfrac{1024}{361}}$	**f.** $\sqrt{\dfrac{1}{676}}$

A. $\dfrac{23}{12}$	**B.** $\dfrac{8}{7}$	**C.** $\dfrac{21}{13}$	**D.** $\dfrac{32}{19}$	**E.** $\dfrac{3}{4}$	**F.** $\dfrac{1}{24}$	**G.** $\dfrac{1}{26}$	**H.** $\dfrac{7}{4}$

17. Efectuați:

a. $\sqrt{0{,}04}$; **b.** $\sqrt{0{,}36}$; **c.** $\sqrt{0{,}0001}$; **d.** $\sqrt{2{,}56}$; **e.** $\sqrt{1{,}44}$; **f.** $\sqrt{10{,}24}$.

18. Efectuați:

a. $\sqrt{144\cdot36}$; **b.** $\sqrt{\dfrac{1{,}44}{25}}$; **c.** $\sqrt{4\cdot0{,}36}$; **d.** $\sqrt{0{,}04\cdot0{,}49}$; **e.** $\sqrt{\dfrac{1{,}69}{4}}$; **f.** $\sqrt{\dfrac{1}{2{,}56}}$.

Minitest

1. Calculați:

a. $\sqrt{16}$; **b.** $\sqrt{3{,}24}$; **c.** $\sqrt{25}+\sqrt{49}-\sqrt{36}$; **d.** $\sqrt{6^2+8^2}:\sqrt{4\cdot5^2}$. (3p)

2. Alegeți varianta corectă. Rezultatul calculului $\sqrt{5\cdot\sqrt{144}+4\cdot\sqrt{400}+\sqrt{16}}:\sqrt{3^3-5^2+2-\sqrt{8+\sqrt{49}+7\cdot\sqrt{9}}}$ este:

a. 0; **b.** 1; **c.** 2; **d.** 3. (3p)

3. Calculați $\sqrt{a}$, unde:

a. $a=2^4\cdot3^4\cdot5^4$; **b.** $a=17\cdot(1+2+3+...+17)$; **c.** $a=6^4\cdot47+6^4\cdot11+6^5$. (3p)

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 20 de minute.

1.2

Lecția 2: Mulțimea numerelor reale

Cuvinte-cheie

număr natural | număr irațional | axa numerelor | număr întreg | număr real | modulul unui număr real | număr rațional | $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ | opusul unui număr real

Numere iraționale. Mulțimea numerelor reale

Situație-problemă

După cum am văzut în Lecția 1, pătratul din Figura 1 are latura de lungime $\sqrt{2}$. Ce fel de număr este $\sqrt{2}$?

Folosind calculatorul de buzunar, obținem o aproximare cu 8 zecimale:

$$\sqrt{2} \simeq 1{,}4142135\ldots .$$

Este posibil ca ecranul calculatorului să afișeze cel mult 8 cifre; în acest caz putem folosi o aplicație a telefonului mobil, pentru a obține 15 zecimale:

$$\sqrt{2} \simeq 1{,}414213562373095\ldots .$$

Utilizând o aplicație de pe computer numită calculator științific, găsim:

$$\sqrt{2} \simeq 1{,}4142135623730950488016887242097\ldots .$$

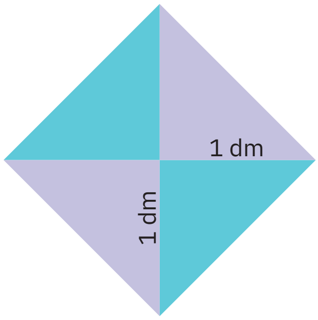


Figura 1

Zecimalele obținute până acum nu se repetă periodic, iar numerele raționale se pot scrie ca fracții zecimale finite sau periodice. Așadar, ce fel de număr este $\sqrt{2}$?

Ce observăm?

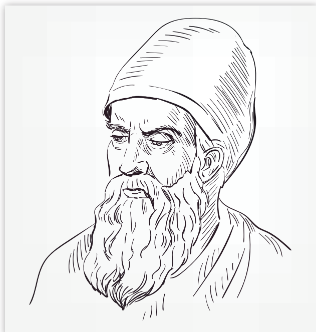
Aproximările făcute arată că *este posibilă* existența unor numere exprimate ca fracții zecimale neperiodice (în care zecimalele nu se repetă periodic). Cu alte cuvinte, aceste numere nu sunt nici fracții zecimale finite, nici fracții zecimale periodice (simple sau mixte), deci nu sunt numere raționale.

Istoria matematicii

Chiar dacă mai sus am identificat, prin diverse metode, un număr suficient de mare de zecimale ale lui $\sqrt{2}$, am studiat doar un număr *finit* de zecimale. Bazându-ne doar pe aceste estimări, oferite de calculator, nu putem decide dacă $\sqrt{2}$ este număr rațional sau nu.

În cartea sa *Elementele*, Euclid (n. aprox. 325 î.H.) a demonstrat că:

$$\sqrt{2} \text{ nu este număr rațional.}$$


Euclid

Într-adevăr, presupunând, prin absurd, că $\sqrt{2}$ ar fi număr rațional, ar exista numerele naturale nenule p și q, prime între ele, astfel încât $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, sau, echivalent, $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$.

Rezultă $p^2 = 2q^2$, deci p este divizibil cu 2. Dacă $p = 2s$, atunci $4s^2 = 2q^2$, adică $q^2 = 2s^2$, deci și q este divizibil cu 2. Am obținut că numerele p și q au divizorul comun 2, contradicție cu faptul că p și q sunt prime între ele. Presupunerea făcută este falsă, deci $\sqrt{2}$ nu este număr rațional.

În consecință, întrucât nu este număr rațional, $\sqrt{2}$ se scrie ca fracție zecimală infinită și neperiodică.

De reținut

Numerele care se pot scrie ca fracții zecimale infinite și neperiodice se numesc *numere iraționale*.

Astfel, $\sqrt{2}$ și $-\sqrt{2}$ sunt numere iraționale.

Mai general, dacă numărul natural n nu este pătrat perfect, atunci $\sqrt{n}$ este irațional.

Evident, dacă x este un număr irațional pozitiv, atunci $\sqrt{x}$ este irațional. În consecință, putem vorbi despre radicalul dintr-un număr real pozitiv.

Exemple

1. Raportul dintre lungimea cercului și diametrul său este un număr irațional, notat cu litera grecească π (*pi*). Valoarea aproximativă este $\pi = 3{,}1415926535...$.

2. Raportul de aur, notat cu litera grecească φ (*phi*), este primul număr irațional descoperit și definit în istoria matematicii. Valoarea aproximativă este 1,6180339887... . Raportul de aur a fost descoperit de Euclid. Acesta a împărțit un segment de dreaptă în două părți, pe care le-a numit „medie” și „extremă rație”, astfel încât raportul φ dintre lungimea segmentului inițial și cea a segmentului mai mare este egal cu raportul dintre lungimea segmentului mare și a celui mai mic:

$$\varphi = \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

Studii contemporane arată că numărul de aur apare în proporțiile corpului uman, la numeroase animale și plante; în structura ADN-ului și în alcătuirea sistemului solar; în arte (pictură, muzică, sculptură) și în arhitectură; dar și în rata de creștere a populației și pe piața acțiunilor.

3. Numărul $A = 1{,}010010001000010000010...$, în scrierea căruia, după fiecare cifră de 1, numărul cifrelor de 0 crește cu o unitate, este număr irațional.

Într-adevăr, dacă A ar fi o fracție zecimală periodică, cu perioada de n cifre, printre cele n cifre ar trebui să se afle neapărat cifra 1, pentru că perioada nu poate conține doar cifra 0. Ca urmare, printre orice n zecimale consecutive ale lui A ar trebui să se afle măcar un 1. Însă imediat după cea de-a n-a cifră 1 din A urmează de $n+1$ ori cifra 0, deci A este irațional.

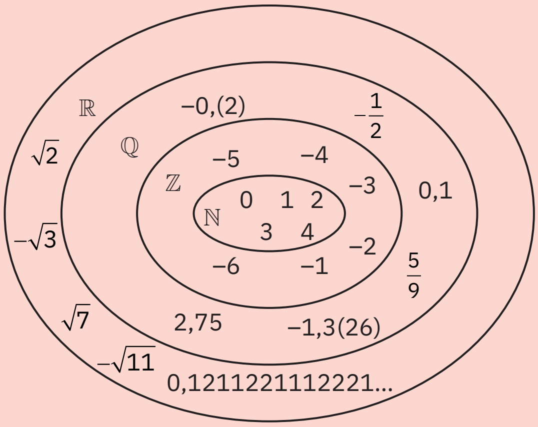
De reținut

Mulțimea numerelor reale, notată $\mathbb{R}$, este reuniunea dintre mulțimea numerelor raționale și mulțimea numerelor iraționale.

Deoarece mulțimea numerelor reale conține mulțimea numerelor raționale, rezultă $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

În consecință, are loc șirul de incluziuni $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Mulțimea numerelor iraționale se notează cu $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Așadar, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.



Reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor

Mate practică

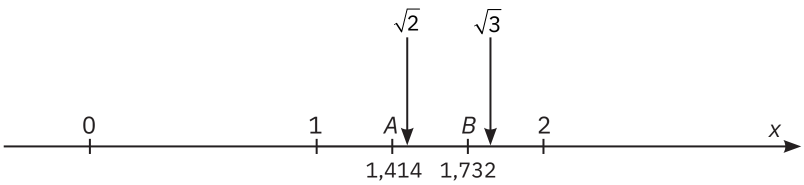
Dorim să construim din hârtie două pătrate cu ariile de 2 cm^2, respectiv 3 cm^2.

Laturile celor două pătrate au lungimile egale cu $\sqrt{2}$ cm, respectiv $\sqrt{3}$ cm, așadar trebuie să construim segmente de aceste dimensiuni.

Considerăm mai întâi aproximările lor: $\sqrt{2} = 1{,}414...$, $\sqrt{3} = 1{,}732...$.

Reprezentăm aceste aproximări pe axa numerelor, pe care fixăm unitatea de măsură de 1 cm, și obținem, pe axă, punctele A și B (Figura 2). Segmentele OA și OB au lungimile aproximativ egale cu $\sqrt{2}$ cm, respectiv $\sqrt{3}$ cm.

Figura 2



Ce observăm?

Un număr irațional se reprezintă printr-un punct pe axa numerelor. Poziția acestui punct poate fi estimată folosind o aproximare rațională, suficient de precisă, a numărului irațional respectiv.

1.2

De reținut

O dreaptă pe care se fixează un punct numit *origine*, un sens de parcurgere de la stânga spre dreapta, indicat de o săgeată, numit *sens pozitiv*, și un segment numit *unitate de măsură* se numește *axa numerelor*. Axa *Ox* are originea în punctul *O*, iar sensul pozitiv de parcurgere a punctelor sale este de la *O* spre *x*.

Fiecărui număr real îi corespunde, pe axa numerelor, un singur punct. Reciproc, fiecărui punct de pe axa numerelor îi corespunde un unic număr real, numit *coordonata* sau *abscisa* punctului. Originea axei are coordonata 0 (zero). Abscisa punctului *A* de pe axa numerelor se notează cu x_A. Scriem acest lucru astfel: $A(x_A)$.

Intuitiv, numerele reale ocupă toate punctele de pe axă. Întrucât unor numere reale diferite le corespund puncte distincte pe axa numerelor, putem identifica fiecare punct al axei cu un număr real.

Observații

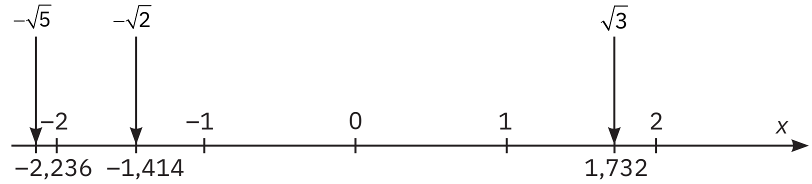
1. Numerele reale care se reprezintă în dreapta originii se numesc numere reale *pozitive*, iar în scrierea lor zecimală, înainte de prima cifră, se scrie semnul „+”.
La fel ca în cazul numerelor raționale, semnul unui număr pozitiv poate fi omis.
Mulțimea numerelor reale pozitive se notează $\mathbb{R}_+$.
Exemple de numere reale pozitive: $+3=3$; $+\sqrt{6}=\sqrt{6}$; $+7,(51)=7,(51)$ etc.
2. Numerele reale care se reprezintă în stânga originii se numesc numere reale *negative*, iar în scrierea lor zecimală, înainte de prima cifră, se scrie semnul „–”.
Mulțimea numerelor reale negative se notează $\mathbb{R}_-$.
Exemple de numere reale negative: -2; $-\sqrt{11}$; $-7,1$; $-1,(3)$ etc.
3. Numărul real 0 nu are semn (nu este nici pozitiv, nici negativ).
Mulțimea numerelor reale nenule se notează $\mathbb{R}^*$.
Avem $\mathbb{R}=\mathbb{R}^*\cup\{0\}=\mathbb{R}_-\cup\{0\}\cup\mathbb{R}_+$.
4. Deoarece numerele iraționale se exprimă ca fracții zecimale infinite, aproximările acestora prin lipsă sau prin adaos, precum și rotunjirile la un anumit ordin, se fac după aceleași reguli ca în cazul numerelor raționale.
De exemplu, aproximările prin lipsă și prin adaos ale lui $\sqrt{2}$ la ordinul sutimilor sunt 1,41, respectiv 1,42, iar rotunjirea lui $\sqrt{7}=2,6457\ldots$ la ordinul miimilor este 2,646.

Exemple

În Figura 3, utilizând aproximările zecimale, sunt reprezentate următoarele numere reale:

a. $-\sqrt{2}=-1,414\ldots$; **b.** $\sqrt{3}=1,732\ldots$; **c.** $-\sqrt{5}=-2,236\ldots$.

Figura 3



Mate practică

Reprezentați un triunghi dreptunghic cu catetele de lungime 1 cm. Folosind teorema lui Pitagora, constatăm că ipotenuza acestuia are lungimea de $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ cm.

Desenați un triunghi dreptunghic cu o catetă de lungime $\sqrt{2}$ cm, care să coincidă cu ipotenuza triunghiului precedent, și cu cealaltă catetă de lungime 1 cm, ca în Figura 4. Folosind teorema lui Pitagora, deducem că ipotenuza celui de-al doilea triunghi are lungimea de $\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+1^2}=\sqrt{2+1}=\sqrt{3}$.

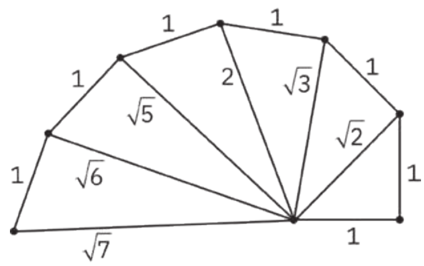


Figura 4

Continuând procedeul, construiți segmente cu lungimile de $\sqrt{4}$ cm, $\sqrt{5}$ cm, $\sqrt{6}$ cm, respectiv $\sqrt{7}$ cm.