Introducere

„Matematica nu se rezumă doar la studiul numerelor şi al relaţiilor dintre acestea, ci este un domeniu de creaţie, bazat pe gândire logică şi inovatoare.

Matematica este o disciplină de mare profunzime, având un caracter deschis, datorat şi unor probleme încă nerezolvate. În timp s-au creat domenii noi de cercetare care au contribuit la rezolvarea unor probleme conexe altor arii de cunoaştere.

Prin specificul său, disciplina Matematică este esenţială în formarea şi dezvoltarea competenţelor necesare pentru învăţarea pe tot parcursul vieţii şi constituie un fundament solid pentru argumentare, dezvoltare de raţionament logic, spirit şi gândire critică, analizare, interpretare şi rezolvare de probleme.

Programa şcolară îşi propune să formeze la elevi iniţiativa şi capacitatea decizională, independenţa în gândire şi în acţiune, precum şi capacitatea de a aprecia rigoarea, ordinea şi eleganţa în arhitectura modelării unei situaţii date, a rezolvării unei probleme sau a construirii unei teorii.

Demersul de predare-învăţare-evaluare poate fi organizat individual, frontal sau pe grupe, cultivând la elevi spiritul de echipă, încrederea în sine şi respectul pentru ceilalţi, toleranţa, curajul de a prezenta o opinie personală şi spiritul de iniţiativă.

Programa şcolară de matematică promovează exersarea obişnuinţei de a recurge la modele matematice în abordarea unor situaţii cotidiene sau pentru rezolvarea unor probleme practice.

Aceasta a fost gândită astfel încât să poate fi parcursă în 75% din timpul alocat orelor de matematică, restul fiind la dispoziţia profesorului pentru activităţi remediale, de fixare sau progres. În clasa a VII-a aşteptările sunt ca elevul să poată dezvolta raţionamente, să utilizeze contraexemple, dacă este cazul, să folosească diferite mijloace de învăţare..." (Extrase din Programa şcolară pentru disciplina Matematică, clasele a V-a – a VIII-a)

SuperMath şi colega lui, vă vor ghida printre paginile şi aplicaţiile multimedia ale manualului, pentru a vă convinge că ***„matematicile, privite corect, nu posedă doar adevărul, ci şi suprema frumuseţe, frumuseţea rece şi austeră ca aceea a sculpturii... de o puritate sublimă şi capabilă de o perfecţiune severă, aşa cum numai arta cea mai înaltă o poate manifesta."***
(Bertrand Russell)

Rubrici din manual şi semnificaţia lor:

NE AMINTIM!
DESCOPERIM!
ACTIVITĂŢI PREGĂTITOARE
REZOLVĂM ÎMPREUNĂ
RECUNOAŞTEM!
ÎNVĂŢĂM ŞI REŢINEM!
REŢINEŢI!
SINTEZĂ

menite să implice elevii în procesul de predare-învăţare, individual sau pe echipe

Comentarii **Observaţii**
Ipoteză **Concluzie**
Demonstraţie **Consecinţă**
Contraexemplu

au scopul să dezvolte spiritul critic, rigoarea şi spiritul de observaţie

DEFINIŢIE
TEOREMĂ
TEOREMĂ RECIPROCĂ
PROPRIETATE

evidenţiază terminologia, reguli, proprietăţi

EXERSAŢI! *conţin aplicaţii simple pentru însuşirea terminologiei, formulelor şi a tehnicilor de calcul*

EXERCIŢII ŞI PROBLEME *de nivel redus şi mediu de dificultate necesare fixării cunoştinţelor şi formării deprinderilor*

După parcurgerea unui număr consistent de lecţii propunem activităţi de:

CONSOLIDARE *probleme de nivel mediu şi ridicat*

ACTUALIZARE *utilă pentru activităţi remediale şi de fixare*

APROFUNDARE *conţine exerciţii şi probleme pentru progres şi pregătire pentru examene*

MINITEST
TEST
AUTOEVALUARE
EVALUARE
PORTOFOLIU
PROIECT
INVESTIGAŢIE

instrumente tradiţionale şi complementare de evaluare

Competențe generale	Competențe specifice
1 Identificarea unor date, mărimi și relații matematice în contextul în care acestea apar	**1.1.** Identificarea numerelor aparținând diferitelor submulțimi ale lui $\mathbb{R}$ **2.1.** Aplicarea regulilor de calcul pentru estimarea și aproximarea numerelor reale **3.1.** Utilizarea unor algoritmi și a proprietăților operațiilor în efectuarea unor calcule cu numere reale **4.1.** Folosirea terminologiei aferente noțiunii de număr real (semn, modul, opus, invers) **5.1.** Elaborarea de strategii pentru rezolvarea unor probleme cu numere reale **6.1.** Modelarea matematică a unor situații practice care implică operații cu numere reale
2 Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale	**1.2.** Identificarea unei situații date rezolvabile prin ecuații sau sisteme de ecuații liniare **2.2.** Utilizarea regulilor de calcul cu numere reale pentru verificarea soluțiilor unor ecuații sau sisteme de ecuații liniare **3.2.** Utilizarea transformărilor echivalente în rezolvarea unor ecuații și sisteme de ecuații liniare **4.2.** Redactarea rezolvării ecuațiilor și sistemelor de ecuații liniare **5.2.** Stabilirea unor metode de rezolvare a ecuațiilor sau a sistemelor de ecuații liniare **6.2.** Transpunerea matematică a unor situații date, utilizând ecuații și/sau sisteme de ecuații liniare
3 Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice	**1.3.** Identificarea unor informații din tabele, grafice și diagrame **2.3.** Prelucrarea unor date sub formă de tabele, grafice sau diagrame în vederea înregistrării, reprezentării și prezentării acestora **3.3.** Alegerea metodei adecvate de reprezentare a problemelor în care intervin dependențe funcționale și reprezentări ale acestora **4.3.** Descrierea în limbajul specific matematicii a unor elemente de organizare a datelor **5.3.** Analizarea unor situații practice prin elemente de organizare a datelor **6.3.** Transpunerea unei situații date într-o reprezentare adecvată (text, formulă, diagramă, grafic)
4 Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată	**1.4.** Identificarea patrulaterelor particulare în configurații geometrice date **2.4.** Descrierea patrulaterelor utilizând definiții și proprietăți ale acestora, în configurații geometrice date **3.4.** Utilizarea proprietăților patrulaterelor în rezolvarea unor probleme **4.4.** Exprimarea în limbaj geometric a noțiunilor legate de patrulatere **5.4.** Alegerea reprezentărilor geometrice adecvate în vederea optimizării calculării unor lungimi de segmente, măsuri de unghiuri și arii **6.4.** Modelarea matematică a unor situații date prin reprezentări geometrice cu patrulatere
5 Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date	**1.5.** Identificarea elementelor cercului și/sau poligoanelor regulate în configurații geometrice date **2.5.** Descrierea proprietăților cercului și ale poligoanelor regulate înscrise într-un cerc **3.5.** Utilizarea proprietăților cercului în rezolvarea de probleme **4.5.** Exprimarea proprietăților cercului și ale poligoanelor în limbaj matematic **5.5.** Interpretarea unor proprietăți ale cercului și ale poligoanelor regulate folosind reprezentări geometrice **6.5.** Modelarea matematică a unor situații practice în care intervin poligoane regulate sau cercuri
6 Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii	**1.6.** Identificarea triunghiurilor asemenea în configurații geometrice date **2.6.** Stabilirea relației de asemănare între triunghiuri **3.6.** Utilizarea asemănării triunghiurilor în configurații geometrice date pentru determinarea de lungimi, măsuri și arii **4.6.** Exprimarea în limbaj matematic a proprietăților unor figuri geometrice folosind asemănarea **5.6.** Interpretarea asemănării triunghiurilor în configurații geometrice **6.6.** Implementarea unei strategii pentru rezolvarea unor situații date, utilizând asemănarea triunghiurilor
	1.7. Recunoașterea elementelor unui triunghi dreptunghic într-o configurație geometrică dată **2.7.** Aplicarea relațiilor metrice într-un triunghi dreptunghic pentru determinarea unor elemente ale acestuia **3.7.** Deducerea relațiilor metrice într-un triunghi dreptunghic **4.7.** Exprimarea în limbaj matematic a relațiilor dintre elementele unui triunghi dreptunghic **5.7.** Interpretarea unor relații metrice între elementele unui triunghi dreptunghic **6.7.** Implementarea unei strategii pentru rezolvarea unor situații date, utilizând relații metrice în triunghiul dreptunghic

GHID DE UTILIZARE A MANUALULUI

Manualul cuprinde: • varianta tipărită • varianta digitală

Simboluri folosite la varianta digitală:

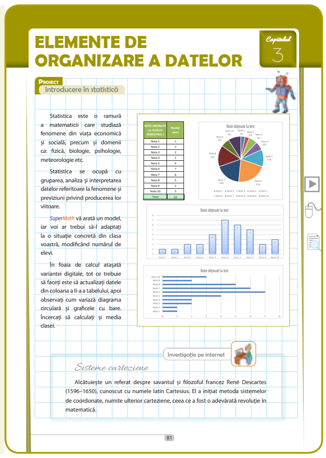
AMII animat **AMII static** **AMII interactiv**

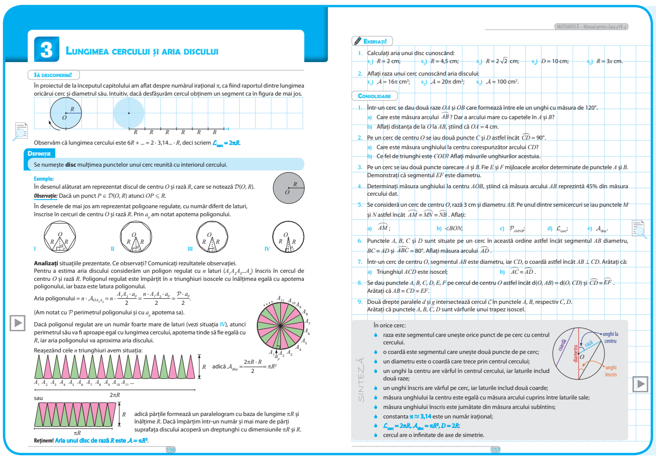


Structura: manualul este împărțit în 7 unități de învățare, fiecare cuprinzând între două și șase lecții. Există modele de rezolvare, evaluări, recapitulare finală și soluții.

PAGINĂ DE DESCHIDERE UNITATE

- *Metode și instrumente complementare de evaluare: proiect și investigație;*
- *Simboluri AMII: referințe la elemente suplimentare ce pot fi accesate utilizând varianta digitală a manualului.*



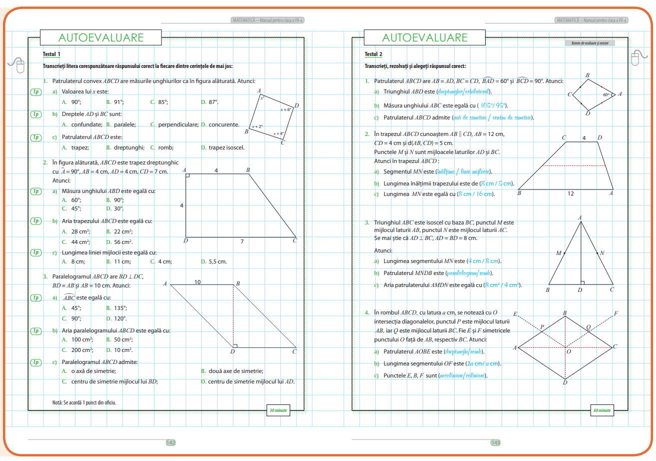


PAGINI DE PREDARE–ÎNVĂȚARE

- *informații necesare pentru o bună înțelegere și însușire a lecției, abordate din perspectiva competențelor specifice, conform programei școlare în vigoare;*
- *sinteză a noțiunilor întâlnite pe parcursul lecției.*

PAGINĂ DE EVALUARE

- *Itemi și teste de evaluare: minitest, test, evaluare inițială, autoevaluare, evaluare, evaluare finală ș.a.*



RECAPITULARE ALGEBRĂ

1. Asociați corect mulțimile de numere cu simbolul corespunzător și denumiți-le:

$\{0, 1, 2, 3, ...\}$

$\{... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

$\left\{\frac{a}{b} \mid a, b \text{ numere întregi}, b \neq 0\right\}$

$\mathbb{Z}$ mulțimea numerelor ...

$\mathbb{Z}^*$ mulțimea numerelor ...

$\mathbb{Q}$ mulțimea numerelor ...

$\mathbb{Q}^*$ mulțimea numerelor ...

$\mathbb{N}$ mulțimea numerelor ...

$\mathbb{N}^*$ mulțimea numerelor ...

2. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$; **b)** $-\frac{4}{2} \in \mathbb{Z}$; **c)** $0 \in \mathbb{N}^*$; **d)** $-1 \in \mathbb{N}$.

3. a) Scrieți elementele următoarelor mulțimi:

$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 5\}$; $B = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \leqslant 3\}$; $C = \left\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 = \frac{4}{9}\right\}$; $D = \{y \in \mathbb{N} \mid y \geqslant 3\}$;

$E = \{z \in \mathbb{Z} \mid -1 \leqslant z < 7\}$; $F = D \cap E$; $G = A \cup D$; $H = A \cup C \cap \varnothing$.

b) Care dintre mulțimile de mai sus sunt finite?

4. Precizați puterile care sunt numere pozitive:

$(-2)^3, 4^2, (-1)^{1001}, 0^{10}, (-2)^4, (-3)^5, \left(\frac{2}{3}\right)^2, \left(-\frac{2}{3}\right)^2, \left(\frac{1}{4}\right)^0, \left(\frac{-2024}{2025}\right)^{101}.$

5. Calculați:

a) $-3^2 - 4^2 : (-2)^3$; **b)** $(-1)^{2n} + (-1)^{2n+3} + (-1)^0$, unde $n \in \mathbb{N}$.

6. Găsiți pătratele perfecte cuprinse între:

a) $7 < \square < 15$; **b)** $15{,}9 < \square < 16\frac{1}{5}$; **c)** $25 < \square < 49$; **d)** $\frac{1201}{10} < \square < 144$.

7. Asociați fiecare număr de pe prima linie cu pătratul său:

0, 1, 2, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{3}$, $-\frac{7}{6}$, 3^{2001}, $1\frac{1}{6}$, 3^k

4, 2, $\frac{1}{4}$, 1, 0, $\frac{49}{36}$, 3^{4002}, 5, 3^{2k}, $\frac{16}{9}$, -4

8. Se dau numerele raționale: $5, -2, 4, \frac{1}{3}, -\frac{100}{7}, \frac{4}{5}, 1, -1{,}01$.

a) Scrieți opusele numerelor date.

b) Enumerați inversele numerelor date.

c) Reprezentați pe axa numerelor numerele date.

9. Transcrieți și completați tabelul pentru a obține propoziții adevărate:

p	0	1	2	5	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{6}{7}$	1,(3)	0,05	7^{1001}
p^2										

10. Efectuați împărțirile și verificați teorema împărțirii cu rest: $D = Î \cdot C + R$, cu condiția $0 \leqslant R < Î$.

Model: 5708 : 29 = 196 r 24

```
5708 | 29  ←—— împărțitorul
29   | 196 ←—— câtul
280
261
=198
 174
  24 ←—— restul
```

Verificare: 5708 = 29 · 196 + 24

Condiția restului: 24 < 29.

a) 573 : 21; **b)** 1024 : 32; **c)** 2009 : 40; **d)** 1000000 : 17.

11. Un număr natural x se împarte la 8 și se obține câtul 15.
Câte valori poate lua numărul x? Care sunt acestea?

12. Câte probleme a avut de rezolvat Ion în două zile, dacă în prima zi a efectuat $\frac{2}{3}$ din temă, iar în ziua a doua 6 probleme?

13. Maria are o pungă cu bomboane. Ea observă că dacă le împarte în grupe de câte 7 îi rămân 5 bomboane, iar dacă le împarte în grupe de câte 9 îi rămâne rest tot 5 bomboane.

a) Este posibil ca Maria să aibă în pungă 68 de bomboane?

b) Determină numărul bomboanelor din pungă, știind că este cel mai mic număr natural de trei cifre care îndeplinește condițiile.

Metode complementare de evaluare

Alături de metodele tradiționale de evaluare, probele orale, scrise și practice, cel mai des utilizate în procesul didactic sunt și metode complementare de evaluare, strategii moderne de evaluare care caută să accentueze dimensiunea acțiunii evaluative.

Acestea sunt o categorie de metode de evaluare mai ales pentru măsurarea acelor obiective mai greu cuantificabile prin metodele clasice de evaluare, cu un rol formativ pronunțat.

Principalele metode complementare de evaluare sunt:

- ✓ observarea sistematică a activității și a comportamentului elevilor;
- ✓ investigația;
- ✓ proiectul;
- ✓ referatul;
- ✓ portofoliul;
- ✓ autoevaluarea.

Profesorul utilizează primele cinci metode și vizează următoarele obiective:

- ✓ promovează evaluarea holistică a progresului elevului;
- ✓ identifică reușitele și erorile elevului;
- ✓ furnizează tehnicile de lucru, resursele materiale și resursele bibliografice necesare elevilor;
- ✓ consolidează abilitatea de autoevaluare;
- ✓ acordă un nou statut erorilor elevilor.

Elevul folosește autoevaluarea prin care contribuie la propria formare. Obiectivele elevului sunt:

- ✓ conștientizează scopul realizării sarcinii de lucru;
- ✓ înțelege criteriile realizării sarcinii;
- ✓ găsește metodele de rezolvare a sarcinii;
- ✓ utilizează mijloacele puse la dispoziția sa.

EVALUARE INIȚIALĂ ALGEBRĂ

Subiectul I (30 puncte)

Rezolvă pe caiet și transcrie litera corespunzătoare răspunsului corect.

5p **1.** Rezultatul calculului: $2^2 - 3 \cdot (4 - 2)$ este:

a) 2; b) 1; c) −2; d) 0.

5p **2.** Opusul numărului −5 este:

a) $\frac{1}{5}$; b) $-\frac{1}{5}$; c) −5; d) 5.

5p **3.** Numărul $-(-2)^4$ este:

a) pozitiv; b) și pozitiv și negativ; c) nul; d) negativ.

5p **4.** Cel mai mare număr întreg mai mic decât −2024 este:

a) −2023; b) nu există; c) 2025; d) −2025.

5p **5.** Dintre următoarele seturi de numere, cel scris în ordine crescătoare este:

a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$; b) $\frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}$; c) $-\frac{1}{5}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}$; d) $\frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$.

5p **6.** Bogdan afirmă: „Inversul numărului 7 este $-\frac{1}{7}$ ”. Afirmația lui Bogdan este:

a) adevărată; b) falsă.

EVALUARE INIȚIALĂ ALGEBRĂ

Subiectul II (30 puncte)

Transcrie și completează răspunsul corect:

5p 1. Numărul care reprezintă $\frac{2}{5}$ din 150 este egal cu ... .

5p 2. Produsul dintre numărul 4 și opusul său este egal cu ... .

5p 3. Ecuația $3x + x - 2x + 4 = -4$ are soluția ... .

5p 4. Scris sub formă de fracție ordinară numărul 2,1(6) este ... .

5p 5. Suma dintre numărul 5 și inversul său este egală cu ... .

5p 6. În tabelul de mai jos este reprezentat numărul de bilete vândute pentru două filme care au rulat la cinematograful *Patria* într-o zi de sâmbătă în funcție de ora începerii:

Ora începerii filmelor	13^{30}	15^{30}	17^{30}	19^{30}
Numărul biletelor vândute la filmul F1	54	72	101	92
Numărul biletelor vândute la filmul F2	69	81	76	84

Cel mai mare număr de bilete vândute a fost pentru filmele cu începere de la ora ... .

Subiectul III (30 puncte)

Scrie pe caiet rezolvările complete.

1. La ora de geometrie, fiecare dintre cei 25 de elevi ai unei clase a desenat fie un unghi, fie un triunghi.

5p a) Dacă exact 11 elevi au desenat câte un triunghi, este posibil ca numărul total de laturi desenate să fie 60? Justifică răspunsul dat.

5p b) Determină numărul unghiurilor desenate de toți cei 25 de elevi ai clasei.

2. Un excursionist a parcurs un traseu în 3 zile. În prima zi a parcurs 40% din lungimea traseului, iar în a doua zi jumătate din distanța parcursă în prima zi.

5p a) Este posibil ca distanța parcursă în ziua a doua să reprezinte o pătrime din lungimea întregului traseu? Justifică răspunsul dat.

5p b) Determină lungimea traseului, știind că în a treia zi excursionistul a parcurs 40 km.

3. Dacă împărțim numărul $\overline{abc}$, scris în baza 10, la numărul $\overline{bc}$ obținem câtul 6 și restul 25.

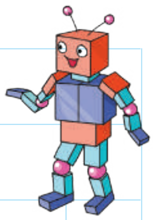
5p a) Este posibil ca numărul $\overline{bc}$ să fie egal cu 25? Justifică răspunsul dat.

5p b) Determină toate numerele $\overline{abc}$ care îndeplinesc condițiile problemei.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

50 minute

MULȚIMEA NUMERELOR REALE

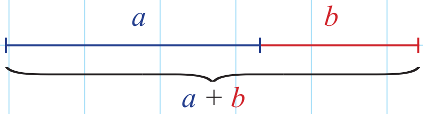


PROIECT
Dreptunghiul de aur

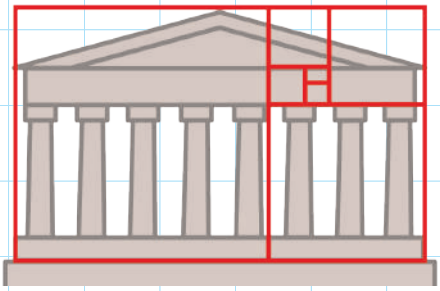
Având convingerea că „reținem 20% din ce vedem, 30% din ce auzim și 80% din ce experimentăm”, împreună cu *SuperMath* vă îndrumăm în realizarea propriilor proiecte și teme pentru portofoliu.

✓ „Secțiunea de aur” a segmentului de lungime $a+b$ este realizată atunci când $\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}$.

Numărul $\frac{a}{b}$, notat φ, a cărui valoare aproximativă este 1,61803398875... a fost denumit **numărul de aur,** proporția divină sau, pur și simplu, PHI (de la Phidias, cel mai mare sculptor al lumii antice). Este un număr care are o infinitate de cifre zecimale care nu se repetă periodic.



✓ Se numește **dreptunghi de aur** un dreptunghi în care raportul dintre lungime și lățime este egal cu numărul de aur.

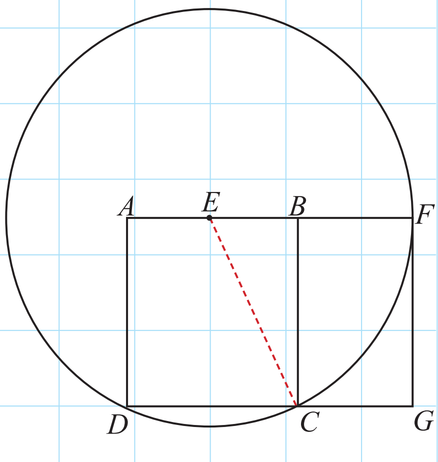


✓ Un frumos exemplu de utilizare a dreptunghiului de aur în arhitectură este Partenonul, capodoperă a arhitecturii grecești.

✓ Construcția dreptunghiului de aur se face urmând pașii:

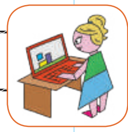
1. Desenați un pătrat $ABCD$;
2. Notați cu E mijlocul laturii AB;
3. Trasați un cerc cu centrul în E și cu raza $r = EC$;
4. Prelungiți AB până intersectează cercul în F.
5. Duceți $FG \perp CD$, unde $G \in CD$.

Finalizare: dreptunghiul $AFGD$ este **dreptunghi de aur**.



✓ Verificați și construiți dreptunghiul de aur în cazul particular $AB = 10$ cm.

Investigație pe internet



Numere celebre

Realizați un referat despre numărul de aur, alegând una dintre temele: *numărul de aur în artă, numărul de aur în muzică, numărul de aur și corpul omenesc*, apoi prezentați lucrarea întregii clase.

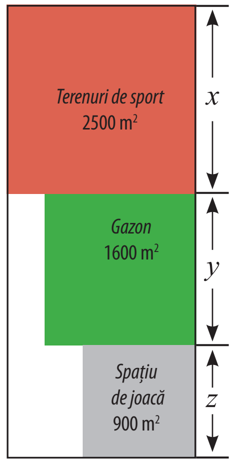
Încercați să faceți ca dimensiunile paginii pe care realizați referatul să respecte proporția de aur!

1 Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural; Estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional

Activități pregătitoare

Deseori, în practică, suntem în situația de a afla lungimea laturii unui pătrat căruia i se cunoaște aria.

Problemă: „Pe terenul unei pensiuni dintr-o stațiune montană se află: zona terenurilor de sport în formă de pătrat cu suprafața de 2500 m^2, gazonul sub formă pătrată cu suprafața de 1600 m^2, iar locul de joacă pentru copii este amenajat tot în formă de pătrat cu suprafața de 900 m^2."



?

1) Care este lungimea laturii pătratului ce reprezintă terenurile de sport?
2) Care este lungimea laturii terenului pe care este gazonul?
3) Care este lungimea pătratului pe care este amenajat locul de joacă pentru copii?
4) Care sunt dimensiunile terenului pe care se află pensiunea?

Răspunsuri:

1) Notăm cu x lungimea laturii pătratului ce reprezintă terenurile de sport.
   $x^2 = 2500 \Rightarrow x^2 = 50^2 \Rightarrow x = 50$ m.
2) Notăm cu y lungimea laturii terenului ce reprezintă gazonul.
   $y^2 = 1600 \Rightarrow y^2 = 40^2 \Rightarrow y = 40$ m.
3) Notăm cu z lungimea laturii pătratului ce reprezintă spațiul de joacă.
   $z^2 = 900 \Rightarrow z^2 = 30^2 \Rightarrow x = 30$ m.
4) Dreptunghiul care reprezintă suprafața totală a pensiunii are lungimea de 120 m și lățimea de 50 m.

Definiție

Operația prin care determinăm un număr natural a cunoscând pătratul său a^2, se numește **extragerea rădăcinii pătrate** a numărului natural a^2.

Ne amintim!

✔ Un număr natural este pătrat perfect dacă se poate scrie ca puterea a doua a altui număr natural.

Exemple: Numărul 64 este **pătrat perfect** fiindcă există numărul natural 8 astfel încât $64 = 8^2$.

Numărul natural 1 este **pătrat perfect** deoarece putem scrie $1 = 1^2$.

Numărul 6 nu este pătrat perfect!

Exersați!

1. Care dintre următoarele numere naturale: 4, 16, 20, 25, 35, 47, 81, 100 sunt pătrate perfecte?
2. Enumerați numerele naturale pătrate perfecte mai mici decât 100. Ce puteți spune despre ultima cifră a unui număr natural pătrat perfect?

Definiție

Fie n un număr natural pătrat perfect.
Se numește **rădăcină pătrată** a numărului n acel număr natural x care verifică relația: $x^2 = n$.
Se notează: $\sqrt{n}$ și se citește: „radicalul numărului natural n".

$$\sqrt{n} = x \Leftrightarrow n = x^2$$

Exemple: $\sqrt{49} = 7$ deoarece $7^2 = 49$; $\sqrt{25} = 5$, deorece $5^2 = 25$; $\sqrt{324} = 18$, deoarece $18^2 = 324$.

Exersați!

Extrageți rădăcina pătrată a numerelor naturale pătrate perfecte: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 81, 100.

Să rezolvăm împreună!

Aplicând egalitatea: $\sqrt{n^2} = n$, pentru orice număr natural n, calculați $\sqrt{7056}$.

Soluție: Vom scrie numărul 7056 ca pătratul unui număr natural.

Pentru aceasta îl descompunem în factori primi și avem: $7056 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \Leftrightarrow 7056 = (2^2 \cdot 3 \cdot 7)^2$.

Obținem: $\sqrt{7056} = \sqrt{\left(2^2 \cdot 3 \cdot 7\right)^2} = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$.

Verificare: $84^2 = 84 \cdot 84 = 7056$.

Rețineți!

Pentru extragerea rădăcinii pătrate a unui număr natural pătrat perfect se procedează astfel:
- se descompune numărul natural în produs de puteri de numere prime;
- se scrie numărul sub forma unui pătrat perfect;
- se aplică regula: $\sqrt{n^2} = n$, pentru orice număr natural n.

Exemplu: $\sqrt{1024} = \sqrt{2^{10}} = \sqrt{\left(2^5\right)^2} = \sqrt{32^2} = 32$.

Exersați!

Extrageți radicalii: $\sqrt{121}$, $\sqrt{256}$, $\sqrt{289}$, $\sqrt{361}$, $\sqrt{400}$, $\sqrt{441}$, $\sqrt{529}$, $\sqrt{576}$, $\sqrt{625}$, $\sqrt{676}$, $\sqrt{729}$, $\sqrt{784}$, $\sqrt{900}$, $\sqrt{2704}$ și $\sqrt{15876}$.

Verificați rezultatele între voi.

Observație: Rădăcina pătrată a unui număr natural se poate obține și cu ajutorul calculatorului electronic, apăsând tasta $\sqrt{\ }$.

Exerciții și probleme

1. Transcrieți și subliniați numerele naturale care sunt pătrate perfecte din următorul șir: 9, 12, 16, 30, 36, 57, 81, 99.

2. Stabiliți valoarea de adevăr a afirmațiilor:

a) „$25 = 5^2$“; b) „$169 = 13^2$“; c) „$400 \neq 20^2$“; d) „$144 = 12^2$“;

e) „$\sqrt{25} \neq 5$“; f) „$\sqrt{169} = -13$“; g) „$\sqrt{400} = 20$“; h) „$\sqrt{144} = -12$“.

3. a) Enumerați toate valorile pe care le poate lua ultima cifră a unui pătrat perfect.

b) Arătați că numerele naturale: 2348, 1002, 907, 1233 nu sunt pătrate perfecte.

Indicație: studiați ultima cifră a fiecărui număr.

Portofoliu

Alcătuiți o fișă cu pătratele perfecte până la 400, după model:

0	1	4	9	...	...	...	...	...	...
0	1	2	3						
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
10	11								
...									
20									

Estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional

Ne propunem să extindem noțiunea de rădăcină pătrată la numerele raționale pozitive care reprezintă pătratul altor numere raționale pozitive.

Activitate pe echipe

Lucrați în perechi!

Se propun spre rezolvare următoarele exerciții:

Grupa 1:

a) Copiați și completați tabelul:

p	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1,2	0	$-\frac{4}{5}$	0,02
p^2						

b) Compară rezultatele cu colegul de bancă!

c) Verificați rezultatele cu ajutorul calculatorului.

Grupa 2:

a) Transcrieți și completați tabelul:

p^2	49	100	0,04	4,41	$\frac{25}{256}$	0
p						

b) Calculați, prin încercări, toate valorile lui p și completați tabelul.

c) Studiați și spuneți ce observați. Ați găsit și numere negative?

Definiție

Fie un număr rațional pozitiv p, care reprezintă pătratul altui număr rațional.

Se numește **rădăcina pătrată a numărului *p***, acel număr rațional pozitiv x care verifică relația $x^2 = p$.

Se notează $x = \sqrt{p}$.

$$\sqrt{p} = x \Leftrightarrow p = x^2$$

Exemple: 1. $\sqrt{\frac{9}{25}} = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$ pentru că $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$;

2. $\sqrt{1,96} = \sqrt{(1,4)^2} = 1,4$ sau $\sqrt{1,96} = \sqrt{\frac{196}{100}} = \sqrt{\left(\frac{14}{10}\right)^2} = \frac{14}{10} = 1,4$.

Observații: 1) Numărul $\frac{3}{5}$ este rădăcina pătrată a lui $\frac{9}{25}$, dar $-\frac{3}{5}$ nu este rădăcina pătrată a lui $\frac{9}{25}$, deși $\left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$. De ce? (Prin definiție, rădăcina pătrată este un număr pozitiv sau 0.)

2) $\sqrt{0,36} \neq -0,6$ deși $(-0,6)^2 = 0,36$. *Justificare:* prin definiție rădăcina pătrată nu poate fi număr negativ.

Concluzie: Rădăcina pătrată a unui număr rațional pozitiv se poate obține (estima) prin calcul (aplicând definiția) sau prin încadrare între două numere raționale.

Modele de rezolvare:

1. $\sqrt{\frac{25}{16}} = \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$, deci $1 < 1\frac{1}{4} < 2$.

2. $5 < \sqrt{29} < 6$.

3. Dacă numărul rațional nu este pătrat, putem scrie, de exemplu pentru $\sqrt{\frac{29}{49}}$:

$$\sqrt{\frac{25}{49}} < \sqrt{\frac{29}{49}} < \sqrt{\frac{36}{49}} \Leftrightarrow \frac{5}{7} < \sqrt{\frac{29}{49}} < \frac{6}{7}.$$

Exerciții

1. Asociați fiecare număr din coloana A cu rădăcina pătrată corespunzătoare din coloana B.

A	B
a) 49	❶ 10
b) 144	❷ 1
c) 625	❸ 7
d) 324	❹ 12
e) 100	❺ 25
	❻ 18
	❼ 14

2. Completați tabelul:

n	$3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$		$2^8 \cdot 3^6$		$2^3 \cdot 18$	
n^2		$3^2 \cdot 5$		$9 \cdot 2$		15

3. Calculați:

a) $\sqrt{2^2}$; $\sqrt{3^2}$; $\sqrt{4^2}$; $\sqrt{8^2}$; $\sqrt{9^2}$; $\sqrt{11^2}$; $\sqrt{71^2}$; $\sqrt{101^2}$; $\sqrt{3^2 \cdot 5^2}$; $\sqrt{7^4}$; $\sqrt{3^6}$; $\sqrt{2^4 \cdot 5^4}$; $\sqrt{4^3}$; $\sqrt{25^3}$; $\sqrt{16^3}$; $\sqrt{81^3}$.

b) $\sqrt{36}$; $\sqrt{121}$; $\sqrt{196}$; $\sqrt{289}$; $\sqrt{361}$; $\sqrt{676}$; $\sqrt{1089}$; $\sqrt{10000}$; $\sqrt{12321}$; $\sqrt{640000}$.

c) $\sqrt{\frac{16}{81}}$; $\sqrt{\frac{64}{256}}$; $\sqrt{\frac{144}{100}}$; $\sqrt{0{,}81}$; $\sqrt{0{,}01}$; $\sqrt{0{,}04}$; $\sqrt{0{,}16}$; $\sqrt{0{,}25}$; $\sqrt{0{,}0001}$; $\sqrt{0{,}0049}$.

4. Folosind descompunerea în factori primi, calculați:

a) $\sqrt{81}$; $\sqrt{144}$; $\sqrt{169}$; $\sqrt{441}$; $\sqrt{529}$; $\sqrt{576}$; $\sqrt{625}$; $\sqrt{729}$; $\sqrt{784}$; $\sqrt{841}$; $\sqrt{900}$; $\sqrt{961}$.

b) $\sqrt{1024}$; $\sqrt{1089}$; $\sqrt{1156}$; $\sqrt{1225}$; $\sqrt{1296}$; $\sqrt{1369}$; $\sqrt{1600}$; $\sqrt{8464}$; $\sqrt{7569}$; $\sqrt{3249}$.

c) $\sqrt{10404}$; $\sqrt{41616}$; $\sqrt{21025}$; $\sqrt{90000}$.

5. Verificați, folosind calculatorul electronic, rezultatele obținute la exercițiul precedent.

6. Determinați numerele naturale x și y astfel încât:

a) $\sqrt{x} = 11$; b) $\sqrt{x} = 10^2$; c) $\sqrt{10201} = x$; d) $\sqrt{25 + x} = 26$;

e) $\sqrt{196 \cdot x} = 28$; f) $\sqrt{2^x \cdot y} = 2$; g) $\sqrt{2^x \cdot 5^y} = 10$; h) $\sqrt{46 - x} = 5$.

7. Extrageți rădăcina pătrată a numerelor:

a) 3^{200}; b) 9^3; c) $2^{2k}, k \in \mathbb{N}$; d) $49^k, k \in \mathbb{N}$.

MINITEST

(4p) 1. Calculați rădăcina pătrată a numerelor:

a) $\frac{4}{9}$; b) $\frac{16}{25}$; c) 121; d) $1\frac{9}{16}$.

(4p) 2. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

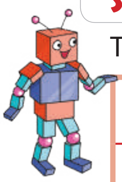
a) $\sqrt{101} = 11$; b) $\sqrt{90} = 30$; c) $\sqrt{144} = 12$; d) $\sqrt{1{,}16} = 1{,}4$.

(1p) 3. Efectuați: $2 \cdot \sqrt{144} + 3 \cdot \sqrt{2025} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1000000}$.

Se acordă 1 punct din oficiu.

20 minute

2 SCOATEREA FACTORILOR DE SUB RADICAL; INTRODUCEREA FACTORILOR SUB RADICAL



SĂ DESCOPERIM!

Transcrieți și completați tabelul pentru a obține propoziții adevărate:

a	b	$a \cdot b$	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	$\sqrt{a \cdot b}$	$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
4	25					
$\frac{9}{16}$	$\frac{4}{81}$					

Comparați $\sqrt{a \cdot b}$ cu $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$. Ce observați? Formulați proprietatea descoperită.

SĂ REZOLVĂM ÎMPREUNĂ!

Stabilim dacă are loc egalitatea: $\sqrt{3^2 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$.

Soluție:

Metoda I: Se folosește proprietatea: $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, $a, b \in \mathbb{Q}$, $a, b \geqslant 0$.

$\sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2} = 3 \cdot \sqrt{2}$. (Am folosit relația $\sqrt{3^2} = 3$.)

Metoda a II-a: Putem proceda și astfel: aplicăm proprietatea $a^n = \sqrt{a^{2n}}$, $a \in \mathbb{Q}$, $a > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$.

$3\sqrt{2} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{3^2 \cdot 2}$

Observație: Prin metoda I am procedat la operația de scoatere a factorului 3^2 de sub radicalul $\sqrt{3^2 \cdot 2}$, iar prin metoda a II-a am procedat la introducerea factorului 3 sub radicalul $\sqrt{2}$.

REȚINEȚI!

Prin egalitatea $\sqrt{a^2 \cdot b} = a\sqrt{b}$, $a, b \in \mathbb{Q}$, $a, b \geqslant 0$, spunem că **am scos factorul** a **de sub radicalul** $\sqrt{a^2 \cdot b}$;

$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 \cdot b}$, $a, b \in \mathbb{Q}$, $a, b \geqslant 0$, spunem că **am introdus factorul** a **sub radicalul** $\sqrt{a^2 \cdot b}$.

De asemenea, are loc și egalitatea: $-a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2 \cdot b}$.

Observații:

1. Pentru a scoate factori de sub radical, se descompune numărul de sub radical în produs de puteri de numere prime și se folosește proprietatea $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, $a, b \in \mathbb{Q}$, $a, b \geqslant 0$.
2. Factorii literali se scot de sub radical în modul: $\sqrt{a^2} = |a|$, $a \in \mathbb{Q}$.

   Consecințe: $\sqrt{a^{2k}} = |a|^k$, $k \in \mathbb{N}$

   $\sqrt{a^{2k+1}} = |a|^k \cdot \sqrt{a}$, $a \geqslant 0$.

   Exemplu: $\sqrt{4a^3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{a^3} = 2a\sqrt{a}$, $a \geqslant 0$.

EXERSAȚI!

1. Prin egalitatea:
   a) $\sqrt{4 \cdot 9 \cdot 5} = 2 \cdot 3\sqrt{5}$, spuneți ce factori au fost scoși de sub radical și prin ce procedeu?
   b) În egalitatea $3\sqrt{5} = \sqrt{3^2 \cdot 5}$, ce factor a fost introdus sub radical și prin ce procedeu?
2. Scoateți factorii de sub următorii radicali: $\sqrt{7 \cdot 5^2 \cdot 3^4}$; $\sqrt{25 \cdot 3 \cdot 121}$; $\sqrt{72}$.
3. Introduceți următorii factori sub radicali: $2\sqrt{3}$, $5\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$, $2\sqrt{5}$, $2\sqrt{7}$, $3\sqrt{6}$, $6\sqrt{3}$, $3 \cdot 5 \cdot \sqrt{6}$. Verificați reciproc rezultatele.

Exerciții și probleme

1. Scoateți factorii de sub radicali:

$\sqrt{20}$; $\sqrt{54}$; $\sqrt{63}$; $\sqrt{75}$; $\sqrt{18}$; $\sqrt{48}$; $\sqrt{700}$; $\sqrt{80}$; $\sqrt{200}$; $\sqrt{300}$; $\sqrt{60}$; $\sqrt{90}$; $\sqrt{288}$; $\sqrt{450}$.

2. Introduceți factorii sub radical:

a) $5\sqrt{3}$; $3\sqrt{5}$; $2\sqrt{14}$; $4\sqrt{7}$; $10\sqrt{18}$; $6\sqrt{10}$.

b) $-2\sqrt{2}$; $-4\sqrt{5}$; $\frac{1}{2}\sqrt{6}$; $\frac{4}{5}\sqrt{\frac{25}{16}}$; $0{,}5\sqrt{2}$.

3. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a) „$7\sqrt{3}=\sqrt{147}$”; b) „$2\sqrt{10}=\sqrt{20}$”; c) „$\sqrt{50}=5\sqrt{2}$”;

d) „$\frac{3}{5}\sqrt{75}=\sqrt{27}$”; e) „$1{,}2\sqrt{3}=\sqrt{3{,}6}$”; f) „$\sqrt{50}=-5\sqrt{2}$”.

4. Scoateți factorii de sub radical:

a) $\sqrt{2^6\cdot 5^2}$; b) $\sqrt{4^7\cdot 7^6}$; c) $\sqrt{25\cdot 3^2}$; d) $\sqrt{3^{12}\cdot 2^3}$;

e) $\sqrt{90\cdot 147\cdot 30}$; f) $\sqrt{\frac{1}{3^2}\cdot 5^2}$; g) $\sqrt{3\frac{13}{4}}$; h) $\sqrt{81\cdot\frac{16}{225}}$;

i) $\sqrt{\frac{30}{40}\cdot\frac{1}{3}}$; j) $\sqrt{2^{2019}}$; k) $\sqrt{1,(6)}$; l) $\sqrt{0,(7)\cdot 0,1(5)}$;

m) $\sqrt{5^2\cdot 289}$; n) $\sqrt{243}$; o) $\sqrt{507}$; p) $\sqrt{36764}$;

q) $\sqrt{1352}$; r) $\sqrt{1445}$; s) $\sqrt{4732}$; t) $\sqrt{1000000}$.

5. Introduceți factorii sub radical: $11\sqrt{5}$; $41\sqrt{1681}$; $2^2\cdot 3\sqrt{2}$; $3\cdot 7\sqrt{441}$; $-6\sqrt{6}$; $3\cdot(-2)\cdot\sqrt{3}$.

6. Rezolvați ecuația: $\sqrt{x^2}=23$.

a) în $\mathbb{N}$; b) în $\mathbb{Z}$.

7. Determinați mulțimile: $A=\{x\in\mathbb{Z}\mid\sqrt{x^2}=0\}$, $B=\{x\in\mathbb{Z}\mid\sqrt{x^2}=2\}$, $C=\{x\in\mathbb{Z}\mid\sqrt{x^2}=-7\}$.

SINTEZĂ

- $\sqrt{a}\geqslant 0$, oricare ar fi $a\in\mathbb{Q}$, $a\geqslant 0$.
- $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$, oricare ar fi $a\in\mathbb{Q}$, $a\geqslant 0$.
- $\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$, $a,b\in\mathbb{Q}$, $a,b\geqslant 0$.
- $\sqrt{a^2\cdot b}=a\sqrt{b}$, $a,b\in\mathbb{Q}$, $a,b\geqslant 0$.
- $a\sqrt{b}=\sqrt{a^2\cdot b}$, $a,b\in\mathbb{Q}$, $a,b\geqslant 0$.
- $\sqrt{a}$ nu există, dacă $a\in\mathbb{Q}$, $a<0$.
- $\sqrt{a^2}=|a|$, oricare ar fi $a\in\mathbb{Q}$.
- $\sqrt{a^{2k}}=|a|^k$, $k\in\mathbb{N}$.
- $\sqrt{a^{2k+1}}=|a|^k\cdot\sqrt{a}$, $a\geqslant 0$.

MINITEST

(3p) **1.** Scoateți factorii de sub radicali:

a) $\sqrt{2^2\cdot 5^2\cdot 7}$; b) $\sqrt{150}$; c) $\sqrt{25x^2}$.

(3p) **2.** Introduceți factorii sub radicali:

a) $2\sqrt{5}$; b) $-5\sqrt{6}$; c) $x\sqrt{3}$, $x\in\mathbb{N}$.

(3p) **3.** Determinați mulțimile: $A=\{x\in\mathbb{N}\mid\sqrt{x^2}=1\}$, $B=\{x\in\mathbb{Z}\mid\sqrt{x^2}=1\}$, $C=\{x\in\mathbb{Z}\mid\sqrt{x^2}=-1\}$.

Se acordă 1 punct din oficiu.

20 minute

3 Numere iraționale, exemple. Mulțimea numerelor reale; incluziunile $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Modulul unui număr real (definiție, proprietăți); compararea și ordonarea numerelor reale; reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor prin aproximări

Activitate pregătitoare

Se împart elevii clasei în 3 grupe: Grupa 1, Grupa 2 și Grupa 3;

Se consideră mulțimea: $A = \left\{-3;\ \frac{8}{5};\ 0,(3);\ \frac{-16}{4};\ 0;\ \frac{-32}{1};\ 0,6;\ 4;\ 3^2;\ -1,2(3)\right\}$;

Se solicită elevilor să-și reamintească definițiile mulțimilor de numere învățate, apoi:

Grupa 1: să selecteze dintre elementele mulțimii A toate numerele naturale;

Grupa 2: să selecteze toate numerele întregi dintre elementele mulțimii A;

Grupa 3: să selecteze toate numerele raționale dintre elementele mulțimii A.

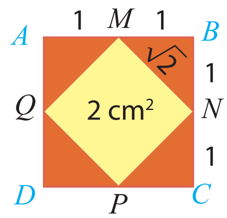
Câte un reprezentant al fiecărei grupe va completa coloana corespunzătoare din tabelul următor:

Grupa 1	Grupa 2	Grupa 3
$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$
$0;\ 4;\ 3^2$	$-3;\ \frac{-16}{4};\ 0;\ \frac{-32}{1};\ 4;\ 3^2$	$-3;\ \frac{8}{5};\ 0,(3);\ \frac{-16}{4};\ 0;\ \frac{-32}{1};\ 0,6;\ 4;\ 3^2;\ -1,2(3)$

Ce observați? Se solicită elevilor să-și reamintească relația de incluziune a mulțimilor și să formuleze enunțul $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Să descoperim!

În cele ce urmează vom dovedi existența rădăcinilor pătrate din numere care nu sunt pătrate perfecte.



- În desenul alăturat, pătratul $ABCD$, cu latura de 2 cm, are aria de 4 cm^2;
- mijloacele laturilor acestui pătrat determină pătratul $MNPQ$ cu aria 2 cm^2;
- dacă notăm $MN = NP = PQ = QM = x$, avem $x^2 = 2$, rezultă $x = \sqrt{2}$.

Exemplu:

Vom demonstra că $\sqrt{2}$ nu este număr rațional (după ce ne-am convins intuitiv de existența acestuia).

Presupunem (prin absurd) că $\sqrt{2}$ se poate scrie ca un număr rațional de forma $\frac{a}{b}$, cu a, b numere întregi, prime între ele și $b \neq 0$. Scriem $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^*$, $(a, b) = 1$.

Prin ridicare la pătrat, obținem: $2 = \frac{a^2}{b^2}$ sau $2b^2 = a^2$. Rezultă că $2 \mid a$, adică $a = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. Atunci $2b^2 = a^2$ devine $2b^2 = 4k^2$, de unde $2 \mid b$. Am obținut $2 \mid a$ și $2 \mid b$, ceea ce contrazice faptul că a și b sunt prime între ele. Prin urmare, presupunerea făcută este falsă.

În concluzie, nu există $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^*$, a și b prime între ele, astfel încât $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ (altfel spus, numărul $\sqrt{2}$ nu este rațional deoarece nu se poate scrie sub formă de fracție ordinară).

Asemănător, putem arăta că există numerele: $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$ etc. adică rădăcinile pătrate ale unor numere care nu sunt pătrate perfecte (verifică cu ajutorul unui minicalculator).