

Ministerul Educației și Cercetării

Maria-Daniela Stoica
Titi Hanghiuc

MATEMATICĂ

clasa a VIII-a

Competențe generale și specifice	5	2. Funcții de forma $f: D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, unde a și b sunt numere reale și D este o mulțime finită de numere reale sau un interval nedegenerat; interpretare geometrică; lecturi grafice	82
Ghid de utilizare a manualului digital	6	3. Elemente de statistică: indicatorii tendinței centrale (frecvență, medie, mediană, mod și amplitudine a unui set de date)	94
Recapitulare inițială	7	Proiect	99
Evaluare inițială	8	Exerciții recapitulative	100
UNITATEA 1 – Mulțimi. Numere		Evaluare	102
INTERVALE DE NUMERE REALE. INECUAȚII ÎN $\mathbb{R}$	9	UNITATEA 4 – Geometrie	
1. Mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor lor	10	ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAȚIU	103
2. Intervale numerice și reprezentarea lor pe axa numerelor. Intersecția și reuniunea intervalelor	13	1. Puncte, drepte, plane: convenții de notare, reprezentări, determinarea dreptei, determinarea planului, relații între puncte, plane și drepte	104
3. Inecuații de forma $ax + b \geq 0$ ($\leq, <, >$), unde $a, b \in \mathbb{R}$	24	2. Corpuri geometrice	
Investigație	28	2.1. Piramida, piramida regulată, tetraedrul regulat; reprezentare, elemente caracteristice, desfășurări	108
Exerciții recapitulative	29	2.2. Prisma dreaptă, paralelipipedul dreptunghic, cubul; reprezentare, elemente caracteristice, desfășurări	115
Evaluare	30	Investigație	121
UNITATEA 2 – Algebră		2.3. Cilindru circular drept; con circular drept; reprezentare, elemente caracteristice, desfășurări	122
CALCUL ALGEBRIC ÎN $\mathbb{R}$	31	3. Paralelism	
1. Operații cu numere reale reprezentate prin litere (adunare, scădere, înmulțire, împărțire, ridicare la putere). Reducerea termenilor asemenea	32	3.1. Drepte paralele. Unghiul a două drepte	128
2. Formule de calcul prescurtat	39	3.2. Dreaptă paralelă cu un plan. Plane paralele	134
3. Descompuneri în factori utilizând reguli de calcul în $\mathbb{R}$ (factor comun, grupare de termeni, formule de calcul prescurtat)	44	3.3. Aplicații: secțiuni paralele cu baza în corpurile geometrice studiate; trunchiul de piramidă și trunchiul de con circular drept (descriere și reprezentare)	141
4. Frații algebrice; operații cu acestea (adunare, scădere, înmulțire, împărțire, ridicare la putere)	51	4. Perpendicularitate	
5. Ecuații de forma $ax^2 + bx + c = 0$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$	61	4.1. Drepte perpendiculare. Dreaptă perpendiculară pe un plan. Aplicații: înălțimea unei piramide, înălțimea unui con circular drept, distanța dintre două plane paralele, înălțimea prisme drepte, a paralelipipedului dreptunghic, a cilindrului circular drept, a trunchiului de piramidă/con circular drept	147
Proiect	66		
Exerciții recapitulative	67		
Îmi încerc puterile	69		
Evaluare	70		
UNITATEA 3 – Funcții. Organizarea datelor și probabilități			
FUNCȚII	71		
1. Funcții definite pe mulțimi finite, exprimate cu ajutorul unor diagrame, tabele, formule; graficul unei funcții, reprezentarea geometrică a graficului unor funcții numerice	72		

4.2. Proiecții de puncte, de segmente și de drepte pe un plan; unghiul dintre o dreaptă și un plan, aplicație: lungimea proiecției unui segment	158
4.3. Unghi diedru; unghi plan corespunzător diedrului; unghiul a două plane; plane perpendiculare, aplicații: secțiuni diagonale, secțiuni axiale în corpurile geometrice studiate	167
4.4. Teorema celor trei perpendiculare; calculul distanței de la un punct la o dreaptă; calculul distanței de la un punct la un plan; calculul distanței dintre două plane paralele	175
Exerciții recapitulative	182
Îmi încerc puterile	185
Evaluare	186

UNITATEA 5 – Geometrie

ARI ȘI VOLUME ALE CORPURILOR GEOMETRICE	187
1. Distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul corpurilor geometrice studiate (determinare prin calcul)	188
2. Ariile și volumul piramidei regulate (cu baza triunghi echilateral, pătrat sau hexagon regulat)	193
3. Ariile și volumele prisme drepte (cu baza triunghi echilateral, pătrat sau hexagon regulat), paralelipipedului dreptunghic și ale cubului	197
4. Ariile și volumele cilindrului circular drept, conului circular drept, trunchiului de piramidă regulată și ale trunchiului de con circular drept	201
5. Sfera: arie și volum	210
Exerciții recapitulative	213
Investigație	214
Evaluare	215
Recapitulare finală	216
Evaluare finală	217
Indicații și răspunsuri	218
Anexă	224



Ce vei învăța anul acesta la matematică?

1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice în contextul în care acestea apar

- 1.1. Recunoașterea apartenenței unui număr real la o mulțime
- 1.2. Identificarea componentelor unei expresii algebrice
- 1.3. Identificarea unor dependențe funcționale în diferite situații date
- 1.4. Identificarea unor figuri plane sau a unor elemente caracteristice acestora în configurații spațiale date
- 1.5. Identificarea corpurilor geometrice și a elementelor metrice necesare pentru calcularea ariei sau a volumului acestora

2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

- 2.1. Efectuarea unor operații cu intervale numerice reprezentate pe axa numerelor sau cu mulțimi definite printr-o proprietate a elementelor ei
- 2.2. Aplicarea unor reguli de calcul cu numere reale exprimate prin litere
- 2.3. Descrierea unei dependențe funcționale într-o situație dată, folosind diagrame, tabele sau formule
- 2.4. Reprezentarea, prin desen sau prin modele, a unor configurații spațiale date
- 2.5. Prelucrarea unor date caracteristice ale corpurilor geometrice studiate în vederea calculării unor elemente ale acestora

3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

- 3.1. Utilizarea unor procedee matematice pentru operații cu intervale și rezolvarea inecuațiilor în $\mathbb{R}$
- 3.2. Utilizarea formulelor de calcul prescurtat și a unor algoritmi pentru rezolvarea ecuațiilor și a inecuațiilor
- 3.3. Reprezentarea în diverse moduri a unor funcții cu scopul caracterizării acestora
- 3.4. Folosirea unor proprietăți de paralelism sau perpendicularitate pentru analiza pozițiilor relative ale dreptelor și planelor
- 3.5. Alegerea metodei adecvate pentru calcularea unor caracteristici numerice ale corpurilor geometrice

4. Expimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată

- 4.1. Folosirea terminologiei aferente noțiunilor de mulțime, de interval numeric și de inecuații
- 4.2. Expimarea matematică a unor situații concrete prin calcul algebric
- 4.3. Utilizarea unui limbaj specific pentru formularea unor opinii referitoare la diferite dependențe funcționale
- 4.4. Descrierea în limbaj matematic a elementelor unei configurații geometrice
- 4.5. Utilizarea unor termeni și expresii specifice pentru descrierea proprietăților figurilor și corpurilor geometrice

5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date

- 5.1. Interpretarea unei situații date utilizând intervale și inecuații
- 5.2. Interpretarea unei situații date utilizând calcul algebric
- 5.3. Analizarea unor funcții în context intra și interdisciplinar
- 5.4. Alegerea reprezentărilor geometrice adecvate în vederea descrierii unor configurații spațiale și a calculării unor elemente metrice
- 5.5. Analizarea condițiilor necesare pentru ca o configurație geometrică spațială să verifice anumite cerințe date

6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

- 6.1. Rezolvarea unor situații date, utilizând intervale numerice sau inecuații
- 6.2. Interpretarea matematică a unor probleme practice prin utilizarea ecuațiilor sau a formulelor de calcul prescurtat
- 6.3. Modelarea cu ajutorul funcțiilor a unor fenomene din viața reală
- 6.4. Modelarea unor situații practice în limbaj geometric, utilizând configurații spațiale
- 6.5. Interpretarea informațiilor referitoare la distanțe, arii și volume după modelarea printr-o configurație spațială a unei situații date din cotidian

Manualul digital reproduce integral versiunea tipărită, oferindu-le elevilor posibilitatea de a interacționa cu diverse elemente de conținut. Astfel, aceștia vor putea să vizioneze animații sau filme, să rezolve exerciții interactive și să navigheze prin manual.

Simboluri:



1. Elemente grafice (AMII statice):

imagini, informații și activități suplimentare.



2. Elemente video (AMII animate):

videoclipuri cu informații și activități suplimentare, curiozități.



3. Exerciții interactive (AMII interactive):

exerciții de alegere multiplă, de tip adevărat sau fals, de asociere, de completare etc.

Cum se folosește manualul digital?

1. Meniul superior



Mărire/micșorare – se mărește sau se micșorează fereastra.



Pagina următoare – se accesează pagina următoare paginii curente.



Căutare – pot fi efectuate căutări în manualul digital după cuvinte-cheie.



Salt la ultima pagină – se accesează ultima pagină a manualului digital.



Cuprins – deschide cuprinsul manualului digital.



Adnotări – deschide o galerie de instrumente, cu funcții diferite, ce permit operații în timp real: sublinieri, adnotări, încercuiri, demarcări, mascări, evidențieri etc.



Înapoi la prima pagină – se revine la prima pagină a manualului digital.



Tipărește pagini din manualul digital.



Pagina anterioară – se accesează pagina anterioară paginii curente.



Indicații – se accesează ecranul cu indicații.

2. Ajutor în utilizarea exercițiilor interactive (AMII interactive):

Deschide exercițiul interactiv dând click pe . Citește cerința, apoi utilizează mouse-ul și/sau tastatura pentru a rezolva exercițiile conform instrucțiunilor. Apasă butonul **Verifică** pentru a vedea dacă ai ales corect. Pentru toate tipurile de exerciții apare  în cazul răspunsului corect și  în cazul răspunsului greșit. Pentru a relua rezolvarea exercițiului, apasă butonul **Mai încercă** sau reîncarcă pagina.

3. Ajutor în utilizarea elementelor video (AMII animate):

Apasă butonul  pentru a deschide videoclipul. Butonul **Play (Vizualizare)** este localizat pe bara de jos a ferestrei, alături de **Volum** și de opțiunea **Afișare completă** pe ecran. Pentru a opri temporar videoclipul, apasă butonul **Pauză**, de pe bara de jos a ferestrei. Pentru a închide videoclipul, apasă butonul  din colțul din dreapta sus al ferestrei.

4. Ajutor în utilizarea elementelor grafice (AMII statice):

Apasă butonul . Imaginea se va deschide într-o fereastră nouă. Apasă butonul  din colțul din dreapta sus, pentru a închide imaginea.

1. Calculează:

a) $\sqrt{784} - 3\sqrt{36} + 2\sqrt{256} - \sqrt{64}$;

b) $\sqrt{3^2 \cdot 5^2} - 2\sqrt{3^2 + 4^2} + 3\sqrt{6^2 + 6^2 \cdot 8}$;

c) $3\sqrt{50} - 4\sqrt{18} - \sqrt{98} - 2\sqrt{8}$;

d) $\frac{10}{\sqrt{12}} - \frac{8}{5\sqrt{3}} + \frac{5}{2\sqrt{27}}$;

e) $\left(\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{7}{\sqrt{3}}\right) \cdot \sqrt{6} + \left(\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{1}{3}\right) \cdot \sqrt{72}$;

f) $2 \cdot |4 - 2\sqrt{3}| - |5\sqrt{3} - 4\sqrt{5}| + |\sqrt{3} + \sqrt{80}|$.

2. Calculează media geometrică a numerelor: a) 2 și 32; b) 18 și 72; c) $3\sqrt{5}$ și $27\sqrt{125}$; d) $\sqrt{800}$ și $40\sqrt{8}$.

3. Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $-5 + 5x = 0$;

c) $2 + 3(1 - 2x) = -3(1 + x) + 1$;

e) $x^2 = 64$;

b) $2 - 3x = 4x - 6$;

d) $\frac{3 + 2x}{4} - \frac{3x - 5}{3} = \frac{1 - 2x}{6} + 1$;

f) $2x^2 = 144$.

4. Rezolvă sistemele de ecuații liniare cu două necunoscute:

a) $\begin{cases} x + y = -5 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 3x + 4y = 9 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 2x + 7y = 8 \\ 3x - 4y = -17 \end{cases}$.

5. Un turist parcurge un traseu în trei zile astfel: în prima zi parcurge $\frac{1}{4}$ din traseu, în ziua a doua 64% din drumul rămas, iar a treia zi ultimii 54 de kilometri.

a) Arată, fără a determina lungimea traseului parcurs de turist, că nu e posibil ca turistul să fi parcurs 25 km în prima zi.

b) Câți km a parcurs turistul în cele trei zile?

6. Într-un sistem de axe ortogonale xOy se consideră punctele $A(-3, 0)$, $B(0, 4)$, $C(12, 9)$ și $D(-12, -1)$.

a) Reprezintă într-un sistem de axe ortogonale xOy punctele A , B , C și D .

b) Arată că suma lungimilor laturilor triunghiului ABC este mai mică decât 36.

c) Demonstrează că punctele B , C și D sunt coliniare.

7. Punctele A , B și C aparțin unui cerc cu centrul în punctul O și raza egală cu 4 cm, astfel încât $\angle BAC = \angle ABC = \angle ACB$ și $\angle ABC = 2 \cdot (\angle ACB)$. Punctul M aparține exteriorului cercului $\mathcal{C}(O, 4 \text{ cm})$, astfel încât dreptele MA și MC sunt tangente la cerc.

a) Determină măsura arcului mic AB și măsura unghiului AOC .

b) Determină lungimile laturilor triunghiului ABC .

c) Determină lungimea proiecției segmentului AB pe dreapta BC .

d) Determină lungimea segmentului AM și aria triunghiului MAC .

8. Fie $ABCD$ un paralelogram cu $AB = 10 \text{ cm}$. Punctele M și N aparțin segmentelor CD și, respectiv, AC , astfel încât $CM = 8 \text{ cm}$ și $\frac{AN}{AC} = \frac{1}{5}$, $BN \cap AD = \{P\}$, $BN \cap CD = \{Q\}$. Arată că patrulaterul $MNAD$ este trapez și calculează rapoartele $\frac{A_{ANB}}{A_{QNC}}$ și $\frac{PN}{NB}$.

9. Se consideră paralelogramul $ABCD$ cu $AD = 4 \text{ cm}$, $AB = 12 \text{ cm}$ și $\angle ABC = 120^\circ$. Punctul M aparține segmentului CD , astfel încât $CM = \frac{1}{4}CD$, punctul N este mijlocul segmentului CD , punctul P e simetricul punctului B față de punctul M și $AD \cap BN = \{Q\}$.

a) Arată că aria paralelogramului $ABCD$ este mai mică decât 42 cm^2 .

b) Calculează distanța de la punctul C la dreapta MB .

c) Calculează $\cos(\angle CMB)$.

d) Calculează perimetrul triunghiului QDN .

e) Demonstrează că dreptele NB și CP sunt paralele.

f) Calculează perimetrul și aria patrulaterului $BCPN$.

10. Se consideră trapezul dreptunghiuc $ABCD$ cu $\angle A = 90^\circ$, $AB \parallel CD$, $AC \perp BD$, $CD = 6 \text{ cm}$ și $AB = 12 \text{ cm}$. Determină aria trapezului $ABCD$ și $\sin(\angle ABC)$.

Timp de lucru: 45 de minute

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Subiectul I

40 de puncte

15 puncte (5 p.) (5 p.) (5 p.)	1. Scrie litera corespunzătoare răspunsului corect pentru fiecare dintre enunțurile de mai jos. Este corectă o singură variantă de răspuns. A. Rezultatul calculului $3\sqrt{16} - 2$ este: a) $3\sqrt{14}$; b) $\sqrt{16}$; c) 10; d) 2. B. Soluția sistemului de ecuații $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = -6 \end{cases}, x, y \in \mathbb{R}$, este: a) (1, 1); b) (4, -5); c) (2, -1); d) (3, -3). C. Dacă în paralelogramul ABCD, $\angle BAD + \angle BCD = 140^\circ$, atunci măsura unghiului ABC este egală cu: a) 70°; b) 40°; c) 140°; d) 110°.
20 de puncte (5 p.) (5 p.) (5 p.) (5 p.)	2. Scrie pe foaie numai rezultatele. A. Soluția ecuației $2(x - 10) + 3x - 6 = 2, x \in \mathbb{R}$, este B. Cel mai mare număr întreg mai mic decât $a = 2\sqrt{20} - 3(2\sqrt{5} + \sqrt{5})$ este C. Lungimea cercului cu diametrul egal cu 2 cm este egală cu ... cm. D. Dacă în triunghiul ABC, dreptunghic în A, $AB = 6$ cm și $AC = 6\sqrt{5}$ cm, atunci lungimea proiecției segmentului AB pe dreapta BC este egală cu ... cm.
5 puncte	3. Scrie pe foaie litera corespunzătoare răspunsului corect. Afirmația „Diagonalele unui romb sunt congruente.” este: a) adevărată; b) falsă.

Subiectul al II-lea

50 de puncte

Scrie rezolvările complete.

20 de puncte (10 p.) (10 p.)	1. Pentru noul an școlar, Mara a cumpărat 7 caiete tip dictando și 2 caiete cu foaie velină, iar David a cumpărat 8 caiete tip dictando și 3 caiete cu foaie velină, de același tip cu cele cumpărate de Mara. Pentru caietele cumpărate, Mara a plătit la casă 77 de lei, iar David a plătit 93 de lei. a) Fără a rezolva problema, arată că nu e posibil ca prețul unui caiet dictando cumpărat de Mara să fie 11 lei. b) Determină prețul unui caiet tip dictando și prețul unui caiet cu foaie velină.
30 de puncte (10 p.) (10 p.) (10 p.)	2. Se consideră rombul ABCD cu $AB = 20$ cm și $\sin(\angle OAD) = \frac{3}{5}$, unde $\{O\} = AC \cap BD$. Pe segmentele AB și AD se consideră punctele M și, respectiv, N, astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{4}$ și $MN \parallel BD$. a) Determină perimetrul triunghiului AMN. b) Determină aria rombului ABCD. c) Arată că distanța de la punctul M la dreapta BC este mai mare decât 15 cm.

Autoevaluare

Acordă pentru următoarele afirmații o notă de la 5 la 1, pentru a-ți evalua parcursul de învățare din această unitate.

LA SFÂRȘITUL ACESTEI EVALUĂRI:	5 foarte bine	4 bine	3 mediu	2 slab	1 foarte slab
Mi-a fost ușor să rezolv exercițiile.					
Am înțeles criteriile de rezolvare.					
Mi-am amintit conținuturile învățate.					

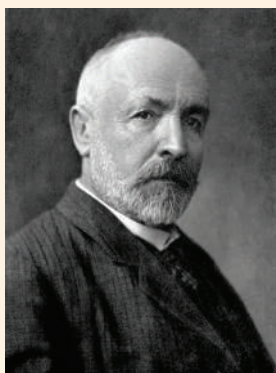
Intervale de numere reale. Inecuații în $\mathbb{R}$

- ▶ 1. Mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor lor
- ▶ 2. Intervale numerice și reprezentarea lor pe axa numerelor. Intersecția și reuniunea intervalelor
- ▶ 3. Inecuații de forma $ax + b \geq 0$ ($\leq, <, >$), unde $a, b \in \mathbb{R}$



ȘTIAI CĂ...?

• Noțiunea de *mulțime* face parte din categoria conceptelor matematice care nu se pot defini prin termeni definiți anterior (*este o noțiune primară). În limbajul matematic, aceasta se referă la un ansamblu de obiecte diferite și precis specificate.



Georg Cantor

• Matematicianul german Georg Cantor (1845-1918), părintele teoriei mulțimilor, considera că mulțimea este *o colecție de obiecte bine determinate și distincte ale intuiției sau gândirii noastre*.

1. Mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor lor

Descopăr



Se consideră mulțimile $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ și $B = \{2, 4, 6, 8\}$.

1) Reprezintă mulțimile A și B cu ajutorul diagramelor Venn-Euler.

2) Precizează valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

- | | | |
|-----------------------|-----------------------------|----------------------------------|
| a) $1 \in A$; | d) $A \subset \mathbb{N}$; | g) $A \supset B$; |
| b) $0 \notin A$; | e) $\emptyset \subset B$; | h) $\text{card } A = 9$; |
| c) $6 \in A \cap B$; | f) $A \cup B = B$; | i) $\{1, 3\} \subset A \cap B$. |

3) Scrie o proprietate caracteristică tuturor elementelor mulțimii A .

4) Scrie o proprietate caracteristică tuturor elementelor mulțimii B .

Învăț



Să considerăm mulțimea A care conține orașele din România. Această mulțime se poate scrie fie enumerând toate elementele sale (scriind denumirile tuturor orașelor din România), fie folosind o proprietate caracteristică tuturor elementelor sale și anume, aceea de a fi oraș al României. Astfel, mulțimea A se poate scrie $A = \{x \mid x \text{ este oraș al României}\}$ (citim „ A este mulțimea elementelor x cu proprietatea că x este oraș al României.”).

OBSERVAȚIE.

În anumite cazuri, cum este cel descris anterior, este convenabil să scriem o mulțime folosind o proprietate caracteristică tuturor elementelor sale.

O mulțime A se poate scrie precizând o proprietate P comună tuturor elementelor sale, astfel $A = \{x \mid x \text{ verifică } P\}$ (citim „ A este mulțimea elementelor x cu proprietatea că x verifică P ”).

De exemplu, mulțimea $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ poate fi scrisă $A = \{x \mid x \text{ este număr natural impar de o cifră}\}$.

Exerciții rezolvate

1. Scrie mulțimea $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ și } 2 < |x| \leq 4\}$ enumerând elementele sale.

Rezolvare:

$$\left. \begin{array}{l} x \in \mathbb{Z} \Rightarrow |x| \in \mathbb{N} \\ 2 < |x| \leq 4 \end{array} \right\} \Rightarrow |x| \in \{3, 4\}$$

$$|x| = 3 \Leftrightarrow x \in \{-3, 3\},$$

$$|x| = 4 \Leftrightarrow x \in \{-4, 4\}$$

$$\text{Așadar, } A = \{-4, -3, 3, 4\}.$$



2. Se consideră mulțimile $A = \left\{ n \mid n \in \mathbb{Z} \text{ și } \frac{6}{2n+3} \in \mathbb{N} \right\}$ și

$B = \left\{ n \mid n \in \mathbb{N}^* \text{ și } \frac{7n-2}{3n+4} \in \mathbb{N} \right\}$. Determină elementele mulțimii $A \cup B$.

Rezolvare:

$$\left. \begin{array}{l} n \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2n+3 \in \mathbb{Z} \\ \frac{6}{2n+3} \in \mathbb{N} \end{array} \right\} \Rightarrow 2n+3 \in \{1, 2, 3, 6\}$$

$$2n+3=1 \Leftrightarrow 2n=-2 \Leftrightarrow n=-1 \in \mathbb{Z}$$

$$2n+3=3 \Leftrightarrow 2n=0 \Leftrightarrow n=0 \in \mathbb{Z}$$

$$2n+3=2 \Leftrightarrow 2n=-1 \Leftrightarrow n=-\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$$

$$2n+3=6 \Leftrightarrow 2n=3 \Leftrightarrow n=\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$$

Așadar, $A = \{-1, 0\}$.

$$\left. \begin{array}{l} n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 7n-2 \in \mathbb{N} \text{ și } 3n+4 \in \mathbb{N} \\ \frac{7n-2}{3n+4} \in \mathbb{N} \end{array} \right\} \Rightarrow (3n+4) \mid (7n-2)$$

$$\left. \begin{array}{l} (3n+4) \mid (7n-2) \Rightarrow (3n+4) \mid 3 \cdot (7n-2) \Rightarrow (3n+4) \mid (21n-6) \\ (3n+4) \mid 7 \cdot (3n+4) \Rightarrow (3n+4) \mid (21n+28) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3n+4) \mid [(21n+28) - (21n-6)] \Rightarrow (3n+4) \mid 34 \Rightarrow 3n+4 \in \{1, 2, 17, 34\}$$

$$3n+4=1 \Leftrightarrow 3n=-3 \Leftrightarrow n=-1 \notin \mathbb{N}^*$$

$$3n+4=17 \Leftrightarrow 3n=13 \Leftrightarrow n=\frac{13}{3} \notin \mathbb{N}^*$$

$$3n+4=2 \Leftrightarrow 3n=-2 \Leftrightarrow n=-\frac{2}{3} \notin \mathbb{N}^*$$

$$3n+4=34 \Leftrightarrow 3n=30 \Leftrightarrow n=10 \in \mathbb{N}^*$$

Așadar, $B = \{10\}$. Cum $A = \{-1, 0\}$ și $B = \{10\}$, obținem $A \cup B = \{-1, 0, 10\}$.

Aplic

1. Scribe mulțimea A , folosind o proprietate comună a elementelor sale.

a) $A = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81\}$;

f) $A = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}\}$;

b) $A = \{0, 1, 8, 27, 64, 125\}$;

g) $A = \{-5, -4, -3, -2, -1\}$;

c) $A = \{1, 2, 5, 10\}$;

h) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$;

d) $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$;

i) $A = \{-2, -1, 1, 2\}$;

e) $A = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35\}$;

j) $A = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{99}{100} \right\}$.

2. Scribe mulțimea A , enumerând elementele sale.

a) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } x \leq 3\}$;

j) $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}^* \text{ și } |x| \leq 5\}$;

b) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } x \text{ e număr prim de o cifră}\}$;

k) $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ și } |x| < 3\}$;

c) $A = \{x \mid x = \overline{ab}, a \text{ și } b \text{ sunt cifre și } a+b=7\}$;

l) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 2 \leq |x| < 7\}$;

d) $A = \{x \mid x = \overline{abc}, a, b \text{ și } c \text{ sunt cifre și } a \cdot b \cdot c = 8\}$;

m) $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ și } 1 < |x| < 5\}$;

e) $A = \{x \mid x = \overline{ab}, a \text{ și } b \text{ sunt cifre și } \overline{ab} + \overline{ba} = 88\}$;

n) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } x^2 \leq 36\}$;

f) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 9 < x \leq 54 \text{ și } x : 9\}$;

o) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } x^2 \leq 140\}$;

g) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ e multiplu al lui } 10 \text{ și } x \leq 100\}$;

p) $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ și } x^2 < 100\}$;

h) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } x \text{ e divizor al lui } 7\}$;

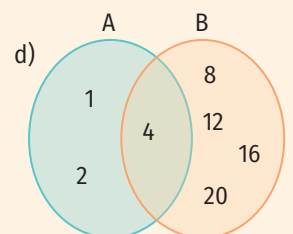
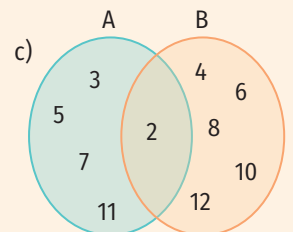
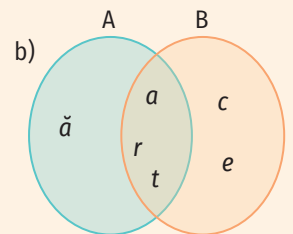
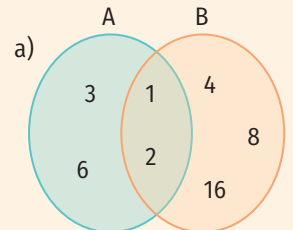
q) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 10 < x^2 \leq 90\}$;

i) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } x \mid 24\}$;

r) $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ și } 100 \leq x^2 \leq 200\}$.

EXERSEAZĂ!

Scribe mulțimile A , B , $A \cap B$, $A \setminus B$ și $B \setminus A$ folosind o proprietate caracteristică a elementelor lor.



SĂ NE AMINTIM!



Se notează cu:

$\mathbb{N}$ – mulțimea numerelor naturale

$\mathbb{Z}$ – mulțimea numerelor întregi

$\mathbb{Q}$ – mulțimea numerelor raționale

$\mathbb{R}$ – mulțimea numerelor reale

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ – mulțimea numerelor iraționale

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

INDICAȚII PENTRU PORTOFOLIU

Pregătește o mapă de dimensiunea A4 la care să adaugi fișele de lucru realizate de tine pe parcursul anului școlar. Fiecare fișă trebuie să aibă un titlu adecvat, trebuie să fie rezultatul activității și documentării tale individuale și poate fi prezentată în fața clasei.

3. Se consideră mulțimile $A = \{x | x \in \mathbb{N}, x : 3 \text{ și } x \leq 10\}$, $B = \{x | x \in \mathbb{N}, x : 2 \text{ și } x < 10\}$ și $C = \{x | x \in \mathbb{N}, x = a + b, a \in A, b \in B\}$.
 - a) Scrie mulțimile A , B și C , enumerându-le elementele.
 - b) Determină mulțimile $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cap C$, $B \cap C$, $(A \cap C) \cup (B \cap C)$.
4. Se consideră mulțimile $A = \{x | x \in \mathbb{N}, x \leq 40\}$, $B = \{x | x \in A, x : 5\}$, $C = \{x | x \in A, x | 36\}$ și $D = \{x | x \in A, x \text{ e număr prim}\}$.
 - a) Scrie mulțimile B , C și D , enumerându-le elementele.
 - b) Determină mulțimile $B \cap C$, $B \cap D$, $C \cap D$, $C \setminus B$, $B \setminus D$.
 - c) Scrie mulțimile $C \cap D$ și $B \setminus D$, folosind o proprietate caracteristică a elementelor lor.
5. Demonstrează că mulțimile A și B sunt disjuncte.
 - a) $A = \{x | x \in \mathbb{Q} \text{ și } 5x - 2 = 2\}$, $B = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } 2(x - 1) + 3x = 7x - 2\}$;
 - b) $A = \{x | x \in \mathbb{Z} \text{ și } x^2 = 25\}$, $B = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } 10\sqrt{2}x - 5 = -5 + 2\sqrt{2}\}$.
6. Se consideră mulțimile $A = \{\sqrt{2}; 5; 1,2(3); -4; \frac{20}{5}; -2\sqrt{3}; \sqrt{36}; 0; -1,5; \frac{3}{6}\}$,
 $B = \{x | x \in A \cap \mathbb{N}\}$, $C = \{x | x \in A \cap \mathbb{Z}\}$, $D = \{x | x \in A \cap \mathbb{Q}\}$,
 $E = \{x | x \in A \cap (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})\}$, $F = \{x | x \in A \cap (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})\}$ și $G = \{x | x \in A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})\}$.
 Scrie mulțimile B , C , D , E , F și G , enumerându-le elementele.
7. Se consideră mulțimile $A = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ și } 0 \leq x < 6\}$, $B = \{y | y \in \mathbb{N}, y = x^2 \text{ și } x \in A\}$,
 $C = \{y | y \in \mathbb{N}, y^2 = x \text{ și } x \in A\}$, $D = \{y | y \in \mathbb{Z}, y^2 = x \text{ și } x \in A\}$ și $E = \{y | y \in \mathbb{R}, y^2 = x \text{ și } x \in A\}$.
 - a) Scrie mulțimile B , C , D și E , enumerându-le elementele.
 - b) Determină mulțimile $A \cap B$, $A \cap C$ și $E \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.
8. Determină $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ și $B \setminus A$.
 - a) $A = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ și } x < \sqrt{11}\}$, $B = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ și } x \leq 2\sqrt{3}\}$;
 - b) $A = \{x | x \in \mathbb{Z} \text{ și } -\sqrt{3} < x \leq 2\}$, $B = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ și } x < \sqrt{17}\}$;
 - c) $A = \{x | x \in \mathbb{Z} \text{ și } -2\sqrt{7} < x \leq 3\sqrt{2}\}$, $B = \{x | x \in \mathbb{Z} \text{ și } -3\sqrt{5} < x < 2\sqrt{3}\}$.
9. Scrie mulțimea A , enumerându-i elementele.

a) $A = \{n n \in \mathbb{N} \text{ și } \frac{5}{2n+1} \in \mathbb{N}\}$;	e) $A = \{n n \in \mathbb{N}^* \text{ și } \frac{10n-8}{5n+2} \in \mathbb{N}\}$;
b) $A = \{n n \in \mathbb{Z} \text{ și } \frac{8}{3n+1} \in \mathbb{N}\}$;	f) $A = \{n n \in \mathbb{N} \text{ și } \frac{7n+16}{3n+4} \in \mathbb{N}\}$;
c) $A = \{n n \in \mathbb{N} \text{ și } \frac{2n+1}{n+3} \in \mathbb{N}\}$;	g) $A = \{n n \in \mathbb{N} \text{ și } \frac{7n+10}{4n+2} \in \mathbb{N}\}$;
d) $A = \{n n \in \mathbb{N} \text{ și } \frac{6n+10}{2n+1} \in \mathbb{N}\}$;	h) $A = \{n n \in \mathbb{N}^* \text{ și } \frac{8n+4}{5n-2} \in \mathbb{N}\}$.

Portofoliu

1. Scrie două mulțimi finite A și B , astfel încât $A \cap B \neq \emptyset$.
2. Reprezintă mulțimile A și B cu ajutorul diagramelor Venn-Euler.
3. Scrie fiecare dintre mulțimile A și B , folosind o proprietate comună a elementelor sale.
4. Determină elementele mulțimilor $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ și $B \setminus A$.
5. Scrie fiecare dintre mulțimile $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ și $B \setminus A$, folosind o proprietate comună a elementelor sale.

2. Intervale numerice și reprezentarea lor pe axa numerelor. Intersecția și reuniunea intervalelor

Descopăr

Se consideră mulțimea $A = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } -2 < x \leq 4\}$.

a) Scrie câte trei elemente din fiecare dintre mulțimile: $A \cap \mathbb{N}$, $A \cap \mathbb{Z}$, $A \cap \mathbb{Q}$, $A \cap (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})$, $A \cap (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})$, $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

b) Care dintre numerele reale: -2 ; -4 ; $-\sqrt{5}$; 0 ; 3 ; 4 ; $\sqrt{6}$; $-\sqrt{3}$; $\frac{16}{5}$; $-\frac{3}{4}$; $1, (2)$; $-3,5$; $5,12$; $\sqrt{37}$ aparțin mulțimii A ?

c) Reprezintă pe axa numerelor numerele reale: 0 ; 3 ; $\sqrt{6}$; $-\sqrt{3}$; $\frac{16}{5}$; $-\frac{3}{4}$; $1, (2)$. Cum sunt poziționate punctele prin care se reprezintă acestea față de segmentul MN , unde $M(-2)$ și $N(4)$?

d) Reprezintă pe axa numerelor numerele reale: -4 ; $-\sqrt{5}$; $-3,5$; $5,12$; $\sqrt{37}$. Punctele prin care se reprezintă acestea aparțin segmentului MN , unde $M(-2)$ și $N(4)$?

JOC!

Privește cu atenție orarul de mai jos și stabilește intervalul de timp în care învață elevii din clasa a VIII-a.

Clasa	Interval orar	Luni
a VIII-a	8-8 ⁵⁰	Educație fizică
	9-9 ⁵⁰	Fizică
	10-10 ⁵⁰	Geografie
	11-11 ⁵⁰	Biologie
	12-12 ⁵⁰	Matematică

Învăț

2.1. Intervale mărginite

Definiția 1. Fie a și b două numere reale, astfel încât $a < b$. Se numește interval deschis de extremități a și b mulțimea formată din numerele reale x cu proprietatea $a < x < b$. Se notează (a, b) .

$$(a, b) = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } a < x < b\}$$

EXEMPLE:

1. $(-5, 7) = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } -5 < x < 7\}$;

2. $\left(\frac{2}{5}, \frac{16}{3}\right) = \left\{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } \frac{2}{5} < x < \frac{16}{3}\right\}$.

OBSERVAȚIE.

Numerele reale a și b nu aparțin intervalului deschis de extremități a și b .

$$a \notin (a, b), b \notin (a, b)$$

De exemplu, $-5 \notin (-5, 7)$ și $7 \notin (-5, 7)$.

Dacă A și B sunt punctele de pe axa numerelor reale care au coordonatele a și, respectiv, b , atunci intervalului (a, b) îi va corespunde, pe axa numerelor, segmentul cu capetele A și B (figura 1).

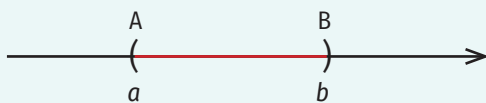


Figura 1

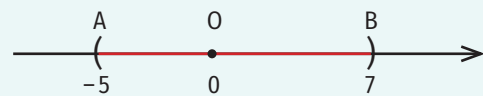


Figura 2

EXEMPLU:

Segmentul AB (unde $A(-5)$ și $B(7)$) din figura 2 este reprezentarea intervalului $(-5, 7)$ pe axa numerelor reale.

Definiția 2. Fie a și b două numere reale, astfel încât $a < b$. Se numește interval închis de extremități a și b mulțimea formată din numerele reale x cu proprietatea $a \leq x \leq b$. Se notează $[a, b]$.

$$[a, b] = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } a \leq x \leq b\}$$

EXEMPLE:

1. $[3, 4] = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } 3 \leq x \leq 4\};$

2. $[-1, 2\sqrt{3}] = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } -1 \leq x \leq 2\sqrt{3}\}.$

OBSERVAȚIE.

Numerele reale a și b aparțin intervalului închis de extremități a și b .

$$a \in [a, b], b \in [a, b]$$

De exemplu, $3 \in [3, 4]$ și $4 \in [3, 4]$.

Dacă A și B sunt punctele de pe axa numerelor reale care au coordonatele a și, respectiv, b , atunci intervalului $[a, b]$ îi va corespunde, pe axa numerelor, reuniunea segmentului AB cu mulțimea formată din punctele A și B (figura 3).



Figura 3



Figura 4

EXEMPLU:

În figura 4, reprezentarea intervalului $[3, 4]$ pe axa numerelor reale este $AB \cup \{A, B\}$, unde AB este segment, $A(3)$ și $B(4)$.

Definiția 3. Fie a și b două numere reale, astfel încât $a < b$. Se numește interval de extremități a și b , deschis la stânga și închis la dreapta, mulțimea formată din numerele reale x cu proprietatea $a < x \leq b$. Se notează $(a, b]$.

$$(a, b] = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } a < x \leq b\}$$

EXEMPLE:

1. $\left(2, \frac{15}{4}\right] = \left\{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } 2 < x \leq \frac{15}{4}\right\};$

2. $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right] = \left\{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } \frac{1}{2} < x \leq \sqrt{3}\right\}.$

OBSERVAȚIE.

Numărul real a nu aparține intervalului de extremități a și b deschis la stânga și închis la dreapta, dar numărul real b aparține intervalului de extremități a și b deschis la stânga și închis la dreapta.

$$a \notin (a, b], b \in (a, b]$$

De exemplu, $2 \notin \left(2, \frac{15}{4}\right]$ și $\frac{15}{4} \in \left(2, \frac{15}{4}\right]$.

Dacă A și B sunt punctele de pe axa numerelor reale care au coordonatele a și, respectiv, b , atunci intervalului $(a, b]$ îi va corespunde, pe axa numerelor, reuniunea segmentului AB cu mulțimea formată din punctul B (figura 5).



Figura 5

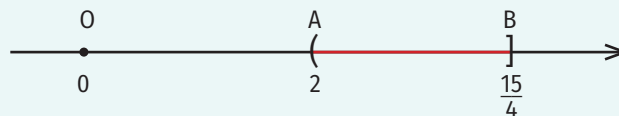


Figura 6

EXEMPLU:

În figura 6, reprezentarea intervalului $\left(2, \frac{15}{4}\right]$ pe axa numerelor reale este $AB \cup \{B\}$, unde AB este segment, $A(2)$ și $B\left(\frac{15}{4}\right)$.

Definiția 4. Fie a și b două numere reale, astfel încât $a < b$. Se numește interval de extremități a și b închis la stânga și deschis la dreapta, mulțimea formată din numerele reale x cu proprietatea $a \leq x < b$. Se notează $[a, b)$.

$$[a, b) = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } a \leq x < b\}$$

EXEMPLE:

1. $[-5, 1) = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } -5 \leq x < 1\}$;

2. $[3, 4) = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } 3 \leq x < 4\}$.

OBSERVAȚIE.

Numărul real a aparține intervalului de extremități a și b închis la stânga și deschis la dreapta, dar numărul real b nu aparține intervalului de extremități a și b închis la stânga și deschis la dreapta.

$$a \in [a, b), b \notin [a, b)$$

De exemplu, $-5 \in [-5, 1)$ și $1 \notin [-5, 1)$.

Dacă A și B sunt punctele de pe axa numerelor reale care au coordonatele a și, respectiv, b , atunci intervalului $[a, b)$ îi va corespunde, pe axa numerelor, reuniunea segmentului AB cu mulțimea formată din punctul A (figura 7).

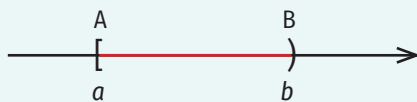


Figura 7

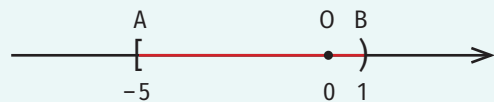


Figura 8

EXEMPLU:

În figura 8, reprezentarea intervalului $[-5, 1)$ pe axa numerelor reale este $AB \cup \{A\}$, unde AB este segment, $A(-5)$ și $B(1)$.

Intervalele de forma (a, b) , $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, unde $a, b \in \mathbb{R}$ și $a < b$, sunt intervale mărginite.

OBSERVAȚII.

1. În scrierea unui interval, numărul mai mic este întotdeauna în stânga celui mai mare.

2. Dacă a și/sau b sunt scrise ca fracții zecimale, atunci intervalele de extremități a și b se vor nota $(a; b)$, $[a; b]$, $(a; b]$, $[a; b)$.

De exemplu, vom scrie $(-5,2; 4)$, $[3,65; 12,1]$, $(1; 2,03]$, $[-5; 0,4)$.

2.2. Intervale nemărginite

Pentru a scrie intervalele nemărginite vom folosi simbolurile $+\infty$ (citim „plus infinit”) și $-\infty$ (citim „minus infinit”) care nu reprezintă numere reale. Astfel, axa numerelor poate fi reprezentată ca în figura 9.



Figura 9

Definiția 5. Fie a un număr real. Se numește interval de extremitate a deschis la stânga și nemărginit la dreapta, mulțimea formată din numerele reale x cu proprietatea $a < x$. Se notează $(a, +\infty)$.

$$(a, +\infty) = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } a < x\}$$

EXEMPLE:

1. $(3, +\infty) = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } 3 < x\}$;

2. $\left(-\frac{2}{3}, +\infty\right) = \left\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ și } -\frac{2}{3} < x\right\}$.

OBSERVAȚIE.

Numărul real a nu aparține intervalului de extremitate a deschis la stânga și nemărginit la dreapta.

$$a \notin (a, +\infty)$$

De exemplu, $3 \notin (3, +\infty)$.

Dacă A este punctul de pe axa numerelor reale care are coordonata a atunci intervalului $(a, +\infty)$ îi va corespunde, pe axa numerelor, semidreapta cu originea în punctul A , care conține punctele situate la dreapta acestuia (figura 10).

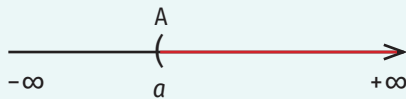


Figura 10

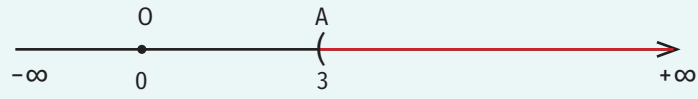


Figura 11

EXEMPLU:

În figura 11, reprezentarea intervalului $(3, +\infty)$ pe axa numerelor reale este semidreapta cu originea în punctul $A(3)$, care conține punctele situate la dreapta acestuia.

Definiția 6. Fie a un număr real. Se numește **interval de extremitate a închis la stânga și nemărginit la dreapta**, mulțimea formată din numerele reale x cu proprietatea $a \leq x$. Se notează $[a, +\infty)$.

$$[a, +\infty) = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } a \leq x\}$$

EXEMPLE:

$$1. [-4, +\infty) = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } -4 \leq x\};$$

$$2. [\sqrt{5}, +\infty) = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } \sqrt{5} \leq x\}.$$

OBSERVAȚIE.

Numărul real a aparține intervalului de extremitate a închis la stânga și nemărginit la dreapta.

$$a \in [a, +\infty)$$

De exemplu, $-4 \in [-4, +\infty)$.

Dacă A este punctul de pe axa numerelor reale care are coordonata a , atunci intervalului $[a, +\infty)$ îi va corespunde, pe axa numerelor, semidreapta cu originea în punctul A , care conține punctul A și punctele situate la dreapta acestuia (figura 12).

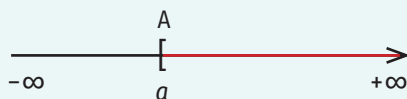


Figura 12



Figura 13

EXEMPLU:

În figura 13, reprezentarea intervalului $[-4, +\infty)$ pe axa numerelor reale este semidreapta cu originea în punctul $A(-4)$, care conține punctul A și punctele situate la dreapta acestuia.

Definiția 7. Fie a un număr real. Se numește **interval de extremitate a deschis la dreapta și nemărginit la stânga**, mulțimea formată din numerele reale x cu proprietatea $x < a$. Se notează $(-\infty, a)$.

$$(-\infty, a) = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } x < a\}$$

EXEMPLE:

$$1. (-\infty, \sqrt{15}) = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } x < \sqrt{15}\};$$

$$2. (-\infty, -2) = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } x < -2\}.$$

OBSERVAȚIE.

Numărul real a nu aparține intervalului de extremitate a deschis la dreapta și nemărginit la stânga.

$$a \notin (-\infty, a)$$

De exemplu, $\sqrt{15} \notin (-\infty, \sqrt{15})$.

Dacă A este punctul de pe axa numerelor reale care are coordonata a atunci intervalului $(-\infty, a)$ îi va corespunde, pe axa numerelor, semidreapta cu originea în punctul A, care conține punctele situate la stânga acestuia (figura 14).



Figura 14

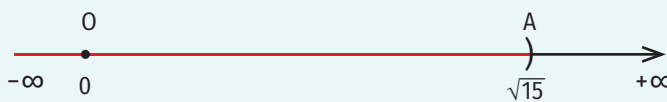


Figura 15

EXEMPLU:

În figura 15, reprezentarea intervalului $(-\infty, \sqrt{15})$ pe axa numerelor reale este semidreapta cu originea în punctul $A(\sqrt{15})$, care conține punctele situate la stânga acestuia.

Definiția 8. Fie a un număr real. Se numește **interval de extremitate a închis la dreapta și nemărginit la stânga**, mulțimea formată din numerele reale x cu proprietatea $x \leq a$. Se notează $(-\infty, a]$.

$$(-\infty, a] = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } x \leq a\}$$

EXEMPLE:

$$1. (-\infty, \frac{1}{2}] = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } x \leq \frac{1}{2}\};$$

$$2. (-\infty, -3\sqrt{2}] = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } x \leq -3\sqrt{2}\}.$$

OBSERVAȚIE.

Numărul real a aparține intervalului de extremitate a deschis la dreapta și nemărginit la stânga.

$$a \in (-\infty, a]$$

De exemplu, $\frac{1}{2} \in (-\infty, \frac{1}{2}]$.

Dacă A este punctul de pe axa numerelor reale care are coordonata a atunci intervalului $(-\infty, a]$ îi va corespunde, pe axa numerelor, semidreapta cu originea în punctul A, care conține punctul A și punctele situate la stânga acestuia (figura 16).



Figura 16

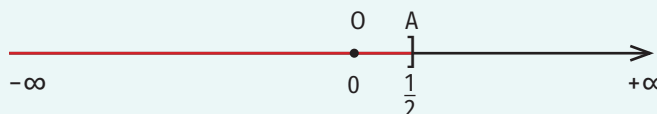


Figura 17

EXEMPLU:

În figura 17, reprezentarea intervalului $(-\infty, \frac{1}{2}]$ pe axa numerelor reale este semidreapta cu originea în punctul $A(\frac{1}{2})$, care conține punctul A și punctele situate la stânga acestuia.

OBSERVAȚII.

1. Intervalele de numere reale sunt submulțimi ale mulțimii numerelor reale. Altfel spus, $(a, b) \subset \mathbb{R}$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $(a, b) \subset \mathbb{R}$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $(c, +\infty) \subset \mathbb{R}$, $[c, +\infty) \subset \mathbb{R}$, $(-\infty, c) \subset \mathbb{R}$, $(-\infty, c] \subset \mathbb{R}$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b$.

2. $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

2.3. Intersecția și reuniunea intervalelor

Intervalele numerice sunt mulțimi de numere reale, deci toate operațiile care se pot efectua cu mulțimi (reuniunea, intersecția, diferența) se pot efectua și cu intervale.

Fie I și J două intervale de numere reale. Atunci, $I \cup J = \{x | x \in I \text{ sau } x \in J\}$ și $I \cap J = \{x | x \in I \text{ și } x \in J\}$.

EXEMPLE:

1. $I = [-1, 5]$, $J = (2, 6]$

Pentru a determina $I \cup J$ și $I \cap J$ vom reprezenta cele două intervale ca în figura 18.

Astfel, $I \cup J = [-1, 6]$ și $I \cap J = (2, 5]$.

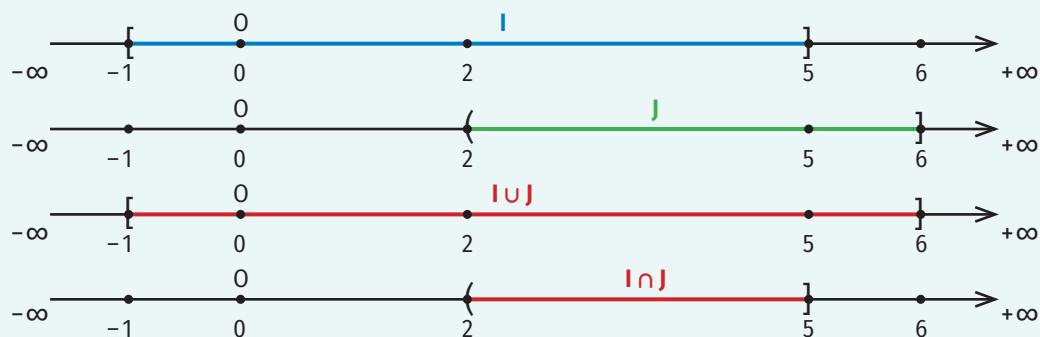


Figura 18

2. $[-1, \sqrt{10}] \cup (2, +\infty) = [-1, +\infty)$ (figura 19).

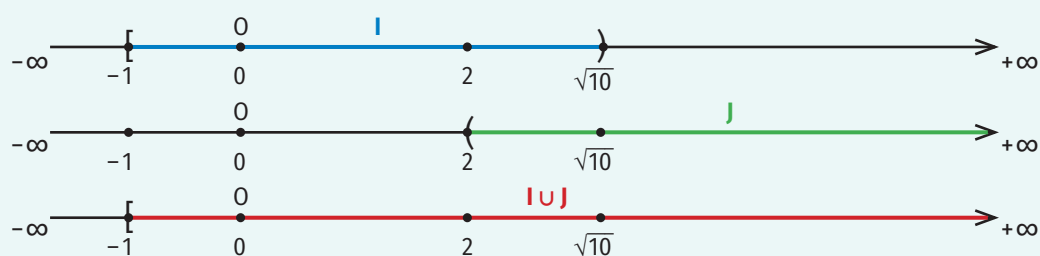


Figura 19

3. $[-1, \sqrt{10}] \cap (2, +\infty) = (2, \sqrt{10})$ (figura 20).

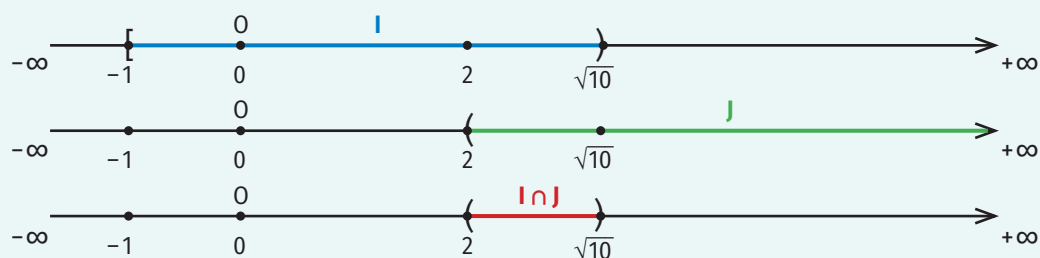


Figura 20

4. $(-\infty, 3] \cup [-1, +\infty) = \mathbb{R}$ (figura 21).

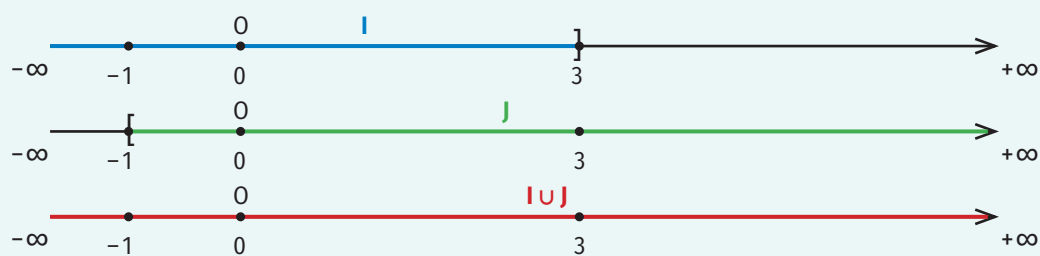


Figura 21

5. $(-\infty, 3] \cap (3, +\infty) = \emptyset$ (figura 22).

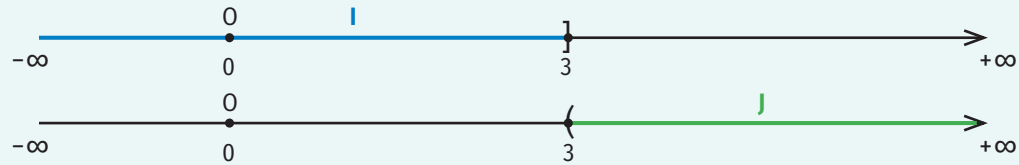


Figura 22

OBSERVAȚIE.

Dacă $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, atunci

$$|x| \leq a \Leftrightarrow x \in [-a, a],$$

$$|x| < a \Leftrightarrow x \in (-a, a).$$

Într-adevăr, dacă $x \geq 0$, atunci $|x| = x$ și $|x| \leq a \Leftrightarrow x \leq a$. Cum $x \geq 0$, obținem $x \in [0, a]$.

Dacă $x < 0$, atunci $|x| = -x$ și $|x| \leq a \Leftrightarrow -x \leq a \Leftrightarrow x \geq -a$. Cum $x < 0$, obținem $x \in [-a, 0)$.

Exerciții rezolvate

1. Calculează suma numerelor întregi care aparțin intervalului de numere reale $I = [-4\sqrt{2}, 2\sqrt{6}]$.

Rezolvare:

$$-4\sqrt{2} = -\sqrt{4^2 \cdot 2} = -\sqrt{16 \cdot 2} = -\sqrt{32} \text{ și } 2\sqrt{6} = \sqrt{2^2 \cdot 6} = \sqrt{4 \cdot 6} = \sqrt{24}$$

$$-\sqrt{36} < -\sqrt{32} < -\sqrt{25} \Leftrightarrow -6 < -4\sqrt{2} < -5$$

$$\sqrt{16} < \sqrt{24} < \sqrt{25} \Leftrightarrow 4 < 2\sqrt{6} < 5$$

Numerale întregi din intervalul de numere reale $I = [-4\sqrt{2}, 2\sqrt{6}]$ sunt: $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$, iar suma acestora este $(-5) + (-4) + (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = -5$.

2. Se consideră intervalele de numere reale $I = (-3\sqrt{7}, 5]$ și $J = (-\frac{25}{4}, \frac{29}{5})$. Determină $I \cup J$ și $I \cap J$.

Rezolvare:

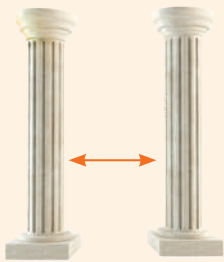
Reprezentăm pe axa numerelor intervalul $I = (-3\sqrt{7}, 5]$ (figura 23).

Pentru a reprezenta pe axa numerelor reale intervalul J , trebuie să comparăm numerele $-3\sqrt{7}$ și $-\frac{25}{4}$, respectiv, 5 și $\frac{29}{5}$ (evident, $-\frac{25}{4} < 5$ și $-3\sqrt{7} < \frac{29}{5}$).

Cum $-3\sqrt{7} = -\sqrt{3^2 \cdot 7} = -\sqrt{9 \cdot 7} = -\sqrt{63}$, $-\frac{25}{4} = -\sqrt{\left(\frac{25}{4}\right)^2} = -\sqrt{\frac{625}{16}}$ și $-\sqrt{63} < -\sqrt{\frac{625}{16}}$, obținem $-3\sqrt{7} < -\frac{25}{4}$.

$5 < \frac{29}{5}$ (pentru că $5 = \frac{25}{5}$).





ȘTIAI CĂ...?

Conform DEX,
interval, **intervale** –
substantiv comun, gen
neutru (lat. *inter-*
vallum, *vallum* = val,
ridicătură de pământ).
La *intervale*, din loc în
loc; din timp în timp.

1. distanță în timp
între două fenomene,
perioade, evenimente
consecutive.

(sinonim: *răstimp*);

2. distanță în spațiu
între două puncte,
sau lucruri;

2.1. (*matematică)
ansamblu de puncte,
de numere cuprinse
între două valori date;
3. raportul de înălțime
între două sunete
muzicale.

Obținem $I \cup J = \left(-3\sqrt{7}, \frac{29}{5}\right)$ și $I \cap J = \left(-\frac{25}{4}, 5\right]$ (figura 23).

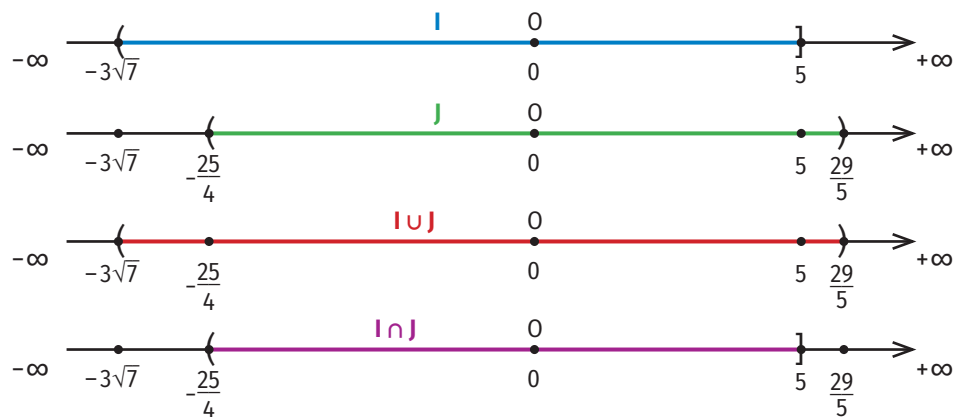


Figura 23

Aplică

1. Scrie litera corespunzătoare răspunsului corect.

a) Un număr întreg din intervalul de numere reale $(1, 2]$ este:

- A. 1; B. 2; C. 0; D. -1. ☐

b) Media aritmetică a numerelor întregi din intervalul de numere reale $(-4, 4]$ este egală cu:

- A. 0,5; B. 4; C. 0; D. 2,5. ☐

c) Numărul real $2\sqrt{7}$ aparține intervalului de numere reale:

- A. $(2, 3)$; B. $[3, 4]$; C. $(4, 5)$; D. $[5, 6)$. ☐

d) Numărul real $-3\sqrt{2}$ aparține intervalului de numere reale:

- A. $(-4, 0)$; B. $[3, 4]$; C. $(-4, -3)$; D. $[-5, -4)$. ☐

2. Scrie în casetă **A**, dacă propoziția este adevărată, și **F**, dacă propoziția este falsă.

- | | | |
|--|---|--|
| a) $-5 \notin (-\infty, -5]$; ☐ | f) $-\frac{5}{2} \notin (-2, 0)$; ☐ | k) $-2 \notin \left[-\frac{11}{3}, 0\right)$; ☐ |
| b) $0 \in [-3, 2)$; ☐ | g) $-7\frac{1}{4} \in (-\infty, -7]$; ☐ | l) $-1 \in \left(-\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right]$; ☐ |
| c) $\sqrt{10} \notin [3, 4]$; ☐ | h) $-6 \in [-5, +\infty)$; ☐ | m) $0,5 \in \left(\frac{3}{7}, +\infty\right)$; ☐ |
| d) $-\sqrt{15} \in (-5, -4)$; ☐ | i) $-2 \in [-1, 4]$; ☐ | n) $\sqrt{5} \in \left(-\frac{1}{2}, 5\right]$; ☐ |
| e) $\frac{2}{7} \in [0, +\infty)$; ☐ | j) $4 \notin \left[\frac{15}{4}, 8\right)$; ☐ | o) $-\sqrt{90} \in \left(-\frac{17}{2}, +\infty\right)$. ☐ |

3. Se consideră mulțimile $A = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } -2 \leq x < 7\}$, $B = \{x | x \in \mathbb{Z} \text{ și } -7 \leq x \leq 8\}$, $C = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ și } x \leq 5\}$, $D = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } -6 \geq x\}$, $E = \{x | x \in \mathbb{Q} \text{ și } \frac{1}{2} \leq x < 17\}$ și $F = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } x \geq \sqrt{10}\}$. Care dintre aceste mulțimi reprezintă intervale de numere reale?

4. Scrie sub formă de interval de numere reale mulțimea A.

- | | |
|--|---|
| a) $A = \{x x \in \mathbb{R} \text{ și } -5 \leq x < 6\}$; | d) $A = \{x x \in \mathbb{R} \text{ și } \sqrt{5} < x < \frac{11}{2}\}$; |
| b) $A = \{x x \in \mathbb{R} \text{ și } -3 < x < 7\}$; | e) $A = \{x x \in \mathbb{R} \text{ și } 2 > x \geq -6\}$; |
| c) $A = \{x x \in \mathbb{R} \text{ și } -\frac{1}{2} \leq x \leq 0\}$; | f) $A = \{x x \in \mathbb{R} \text{ și } -5 > x > -10\sqrt{2}\}$; |

g) $A = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } 2,5 \geq x > 0,7\};$

h) $A = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } -3 \geq x \geq -\sqrt{11}\};$

i) $A = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } x < 7\};$

j) $A = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } x > -\frac{7}{3}\};$

k) $A = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } -3,25 < x\};$

l) $A = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } 2\sqrt{7} \geq x\};$

m) $A = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } \frac{1}{4} > x\};$

n) $A = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } 2\frac{2}{3} \leq x\};$

o) $A = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } -4\sqrt{10} > x\};$

p) $A = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } x > -\frac{7}{3}\}.$

5. Se consideră mulțimile $A = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } |x| \leq 2\}$, $B = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } |x| \leq 1\}$, $C = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } |x| < 4,2\}$, $D = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } \frac{1}{4} > |x| \}$, $E = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } 2\sqrt{6} > |x| \}$.
Scrie sub formă de intervale de numere reale mulțimile A, B, C, D și E.

6. Se consideră intervalele de numere reale: $(-\infty, 6)$, $[2, 5]$; $[-3\sqrt{10}, +\infty)$, $[-5, \frac{7}{2})$, $(-\infty, -\frac{3}{4}]$, $(\frac{2}{3}, \frac{3}{2})$, $(-7, +\infty)$, $(\sqrt{2}, 5]$.

a) Scrie intervalele folosind o proprietate caracteristică elementelor lor.

b) Reprezintă intervalele pe axa numerelor.

7. Asociază fiecărui interval de numere reale din coloana A, scrierea sa ca mulțime folosind o proprietate caracteristică elementelor sale din coloana B.

A.	B.
$[4, 5]$	$\{x x \in \mathbb{R} \text{ și } 4 > x\}$
$[5, +\infty)$	$\{x x \in \mathbb{R} \text{ și } 5 \leq x\}$
$(-\infty, 4]$	$\{x x \in \mathbb{R} \text{ și } 4 < x \leq 5\}$
$(-\infty, 4)$	$\{x x \in \mathbb{R} \text{ și } 5 \geq x \geq 4\}$
$(4, 5]$	$\{x x \in \mathbb{R} \text{ și } x \leq 4\}$
	$\{x x \in \mathbb{R} \text{ și } x < 5\}$

8. Scrie cel mai mare număr întreg care aparține intervalului de numere reale I.

a) $I = (-\infty, 3];$ c) $I = (-\infty; 3,2);$ e) $I = (-\frac{17}{8}, -\frac{5}{6});$
b) $I = (-2, 7);$ d) $I = (-5,6; -\sqrt{10});$ f) $I = (-\infty; 1,25].$

9. Scrie cel mai mare număr întreg care nu aparține intervalului de numere reale I.

a) $I = (-5, +\infty);$ c) $I = [-2\sqrt{5}, +\infty);$ e) $I = (\frac{17}{3}, +\infty);$
b) $I = [-10, +\infty);$ d) $I = [-\frac{7}{4}, +\infty);$ f) $I = (\sqrt{15}, +\infty).$

10. Determină cel mai mic număr întreg care aparține intervalului de numere reale I.

a) $I = (-3, +\infty);$ c) $I = (-\frac{19}{3}; -1];$ e) $I = [-4\sqrt{2}, +\infty);$
b) $I = [-7, \frac{2}{3});$ d) $I = (-2\sqrt{3}, +\infty);$ f) $I = (-\frac{5}{6}, +\infty).$

11. Determină cel mai mic număr întreg care nu aparține intervalului de numere reale I.

a) $I = (-\infty, 6];$ c) $I = (-\infty, \frac{\sqrt{7}}{2});$ e) $I = (-\infty, -7\sqrt{2});$
b) $I = (-\infty, \frac{12}{5});$ d) $I = (-\infty; \frac{140}{9}];$ f) $I = (-\infty; 5\sqrt{3}].$

ȘTIAI CĂ...?

În orice interval de numere reale, există o infinitate de numere raționale și o infinitate de numere iraționale.



ȘTIAI CĂ...?



În viața de zi cu zi, folosim noțiunea de *interval* pentru a stabili limitele între care fixăm un element de referință.

De exemplu, *intervalul de temperatură* în care se plasează confortul termic al omului este între 20°C și 24°C . Folosind acest interval de referință, prognoza meteo care arată că temperatura din timpul unei zile va fi între aceste limite, pe o anumită durată de timp, poate fi un reper al confortului termic.

De asemenea în medicina generală, valorile considerate normale pentru diferiți parametri biologici (n.r. puls, tensiune arterială, glicemie sau colesterol) sunt descrise tot prin *intervale*.

În programarea activităților zilnice, folosim *intervale orare* pentru a delimita perioade de timp. De exemplu, programul de lucru obișnuit este de la ora 9 la ora 17, un interval de timp exprimat astfel: $[9, 17]$.

Intervalele sunt un instrument indispensabil pentru organizarea și înțelegerea informațiilor din lumea reală. De la reglementări până la analize statistice și prognoze economice, ele ne ajută să descriem și să cuantificăm diverse fenomene cu precizie și claritate.

12. Determină numerele întregi care aparțin intervalului de numere reale I :

- a) $I = (-0,4; 3]$; c) $I = \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$; e) $I = [-3, 4]$; g) $I = [-3\sqrt{3}, -4]$;
b) $I = (-2, 4)$; d) $I = \left[\frac{5}{2}, \frac{34}{7}\right)$; f) $I = (-0,5; \sqrt{3}]$; h) $I = (-2\sqrt{7}, -3\sqrt{2})$.

13. Se consideră mulțimea $A = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } -2,5 < x\}$.

- a) Scrie mulțimea A ca interval de numere reale.
b) Scrie trei numere naturale din mulțimea A .
c) Scrie trei numere întregi din mulțimea A .
d) Scrie trei numere raționale, care nu sunt întregi, din mulțimea A .
e) Scrie trei numere iraționale din mulțimea A .
f) Care este cel mai mic număr întreg din mulțimea A ?
g) Care este cel mai mare număr întreg care nu aparține mulțimii A ?

14. Se consideră intervalul de numere reale $I = [-4, 3)$.

- a) Care este cel mai mare număr întreg care aparține intervalului I ?
b) Care este cel mai mic număr întreg care aparține intervalului I ?
c) Scrie trei numere iraționale care aparțin intervalului I .
d) Calculează suma și produsul numerelor întregi din intervalul I .

15. Se consideră intervalul de numere reale $I = (-5,4; \sqrt{10})$.

- a) Care este cel mai mare număr întreg care aparține intervalului I ?
b) Care este cel mai mic număr întreg care aparține intervalului I ?
c) Scrie trei numere iraționale care aparțin intervalului I .
d) Scrie trei numere iraționale care aparțin intervalului I .
e) Calculează suma și produsul numerelor întregi din intervalul I .

16. Se consideră intervalul de numere reale $I = (x, 5]$, unde $x \in \mathbb{R}$, $x < 5$.

- a) Determină numărul întreg x pentru care intervalul I conține exact 7 numere întregi.
b) Determină valorile numărului real x pentru care intervalul I conține exact 5 numere naturale.
c) Pentru $x = -4$, calculează suma și produsul numerelor întregi din intervalul I .

17. Determină $I \cup J$ și $I \cap J$.

- a) $I = [-3, 4]$, $J = [-2, 7]$; i) $I = (-\infty, 2)$, $J = (1, 4]$;
b) $I = [1, 5]$, $J = (4, 6)$; j) $I = \left(-\infty, \frac{1}{5}\right)$, $J = (0, 3)$;
c) $I = [7, 10]$, $J = [7,5; 11)$; k) $I = (-\infty, \sqrt{2}]$, $J = [1, 3]$;
d) $I = [2,5; 8,9]$, $J = (3, 9]$; l) $I = [1, 3)$, $J = \left(-\infty, \frac{13}{6}\right]$;
e) $I = [-1; 7,2)$, $J = [-1; 9,4]$; m) $I = (-\infty, 4\sqrt{3})$, $J = (6, 7]$;
f) $I = \left(-\frac{5}{3}, 0\right]$, $J = (-2\sqrt{3}, 0)$; n) $I = (-4, -2)$, $J = \left(-\infty, -\frac{7}{3}\right]$;
g) $I = \left[-1, \frac{7}{3}\right]$, $J = \left(\frac{5}{6}, \frac{5}{2}\right]$; o) $I = (2, +\infty)$, $J = (-3, 4)$;
h) $I = \left(-\frac{9}{20}, 3\right]$, $J = \left[-\frac{4}{5}, 2,2\right]$; p) $I = (-1,5; +\infty)$, $J = [\sqrt{7}, 3)$;

q) $I = [2\sqrt{3}, +\infty)$, $J = (1, 3\sqrt{10})$;

s) $I = \left[\frac{31}{5}, +\infty\right)$, $J = \left(\frac{15}{4}, 10\right)$;

r) $I = [-3\sqrt{2}, +\infty)$, $J = [-2\sqrt{5}, -\sqrt{5}]$;

t) $I = \left[-\frac{14}{3}, -\frac{12}{5}\right]$, $J = \left(-\frac{12}{5}, +\infty\right)$.

18. Determină $I \cup J$ și $I \cap J$.

a) $I = \left(-\infty, \frac{7}{4}\right)$, $J = \left(-\infty, \frac{2}{3}\right]$;

e) $I = [-2, +\infty)$, $J = \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$;

b) $I = (-\infty, 2]$, $J = (-\infty, \sqrt{5}]$;

f) $I = (-\infty, \sqrt{2}]$, $J = (1, +\infty)$;

c) $I = (3, +\infty)$, $J = (2, 95; +\infty)$;

g) $I = \left(-\infty; \frac{25}{4}\right)$, $J = (5, 6; +\infty)$;

d) $I = [-5, +\infty)$, $J = \left[-\frac{14}{3}, +\infty\right)$;

h) $I = \left(-\frac{31}{8}, +\infty\right)$, $J = (-\infty, -2\sqrt{2}]$.

19. Determină $A \cup B$ și $A \cap B$.

a) $A = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } -2 \leq x < 7\}$, $B = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } -1 > x > -6\}$;

b) $A = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } -\frac{4}{3} \leq x \leq 2\}$, $B = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } \frac{1}{2} < x < 3\}$;

c) $A = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } 2\sqrt{3} \geq x\}$, $B = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } 3\sqrt{2} > x\}$;

d) $A = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } -\sqrt{10} < x\}$, $B = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } -5 < x < 3\}$;

e) $A = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } 7 \leq x\}$, $B = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } 4\sqrt{3} < x \leq 5\sqrt{2}\}$;

f) $A = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } 4\sqrt{5} > x > 2\}$, $B = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } x \leq 8\}$;

g) $A = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } -3 \geq x \geq -5\}$, $B = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } x \leq -5\}$;

h) $A = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } |x| \leq 3\}$, $B = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } 2 > |x|\}$.

20. Fie a și b două numere reale, $0 < a < b$.

a) Demonstrează că $\frac{a+b}{2} \in (a, b)$ și $\sqrt{a \cdot b} \in (a, b)$.

b) Fie $I = \left(a, \frac{a+b}{2}\right]$, $J = [\sqrt{ab}, b)$. Determină $I \cap J$. Argumentează răspunsul.

21. Demonstrează că:

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{20} \in (0; 9, 5)$;

b) $\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{30} \in \left(\frac{2}{3}, 2\right)$;

c) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{19 \cdot 20} \in \left(\frac{9}{10}, 1\right)$;

d) $\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{2}{31 \cdot 33} \in \left(\frac{10}{11}, 1\right)$;

e) $\frac{5}{2 \cdot 7} + \frac{11}{7 \cdot 18} + \frac{16}{18 \cdot 34} + \frac{23}{34 \cdot 57} \in \left(\frac{3}{7}, \frac{1}{2}\right)$;

f) $\frac{4}{1 \cdot 5} + \frac{7}{5 \cdot 12} + \frac{10}{12 \cdot 22} + \frac{13}{22 \cdot 35} + \frac{17}{35 \cdot 52} \in \left(\frac{25}{26}, 1\right)$.

Portofoliu

1. Scrie două intervale de numere reale I și J , astfel încât $I \cap J \neq \emptyset$, $I \not\subset J$ și $J \not\subset I$.
2. Scrie fiecare dintre intervalele de numere reale I și J , folosind o proprietate comună a elementelor sale.
3. Determină $I \cup J$ și $I \cap J$.
4. Scrie fiecare dintre intervalele $I \cup J$ și $I \cap J$, folosind o proprietate comună a elementelor sale.

LUCRAȚI ÎN PERECHI!

Determinați $A \cup B$ și $A \cap B$ știind că $a > 0$.

a) $A = (-a, a)$,
 $B = (-\infty, a]$;

b) $A = (-a, a]$,
 $B = (-\infty, -a]$;

c) $A = [-a, a)$,
 $B = (-a, +\infty)$;

d) $A = (-\infty, a)$,
 $B = [-a, +\infty)$;

e) $A = (-\infty, 0)$,
 $B = (-a, a]$;

f) $A = [-a, a]$,
 $B = [0, +\infty)$;

g) $A = (-\infty, a+1)$,
 $B = (a, a+5)$;

h) $A = (-a-3, a)$,
 $B = [-a, 2a]$.





3. Inecuații de forma $ax + b \geq 0$ ($\leq, <, >$), unde $a, b \in \mathbb{R}$

Îmi amintesc

1. Care dintre numerele întregi $-3, -4, 2, 0$ sunt soluții ale inecuației $2x + 10 \geq 2, x \in \mathbb{Z}$?
2. Rezolvă în mulțimea numerelor întregi inecuațiile următoare.

a) $3x + 9 \geq -12$;	c) $5x + 10 \leq 0$;
b) $-2x + 4 < 0$;	d) $6 - 10x > -4$.

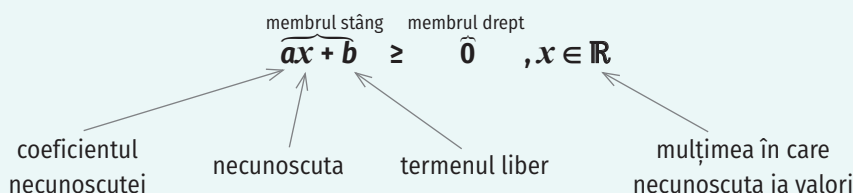
Învăț

Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, propozițiile de tipul „ $ax + b \geq 0, x \in \mathbb{R}$ ”, „ $ax + b \leq 0, x \in \mathbb{R}$ ”, „ $ax + b > 0, x \in \mathbb{R}$ ” sau „ $ax + b < 0, x \in \mathbb{R}$ ” se numesc **inecuații cu necunoscuta x** .

Dând necunoscutei x diverse valori, obținem propoziții false sau propoziții adevărate. Valorile lui x pentru care obținem propoziții adevărate reprezintă **soluțiile inecuației**.

A rezolva o inecuație înseamnă a determina mulțimea soluțiilor acesteia.

Pentru a rezolva o inecuație trebuie să știm mulțimea a căreia îi aparține necunoscuta x .



Două inecuații care au aceeași mulțime a soluțiilor se numesc inecuații echivalente.

OBSERVAȚII.

- Dacă se adună/scade la/din ambii membri ai unei inecuații un număr real și se păstrează sensul inegalității, se obține o inecuație echivalentă cu cea inițială.

EXEMPLE:

1. $2x - 4 > -8 \mid +4 \Leftrightarrow 2x - 4 + 4 > -8 + 4 \Leftrightarrow 2x > -4$.

2. $3x + \sqrt{2} \leq -2\sqrt{2} \mid -\sqrt{2} \Leftrightarrow 3x + \sqrt{2} - \sqrt{2} \leq -2\sqrt{2} - \sqrt{2} \Leftrightarrow 3x \leq -3\sqrt{2}$.

- Dacă se înmulțesc/împart ambii membri ai unei inecuații cu/la un număr real pozitiv și se păstrează sensul inegalității, se obține o inecuație echivalentă cu cea inițială.

EXEMPLE:

1. $\frac{1}{2} \cdot x > -2 \mid \cdot 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot x \cdot 2 > -2 \cdot 2 \Leftrightarrow x > -4$.

2. $3 \cdot x \leq -6 \mid : 3 \Leftrightarrow 3 \cdot x : 3 \leq -6 : 3 \Leftrightarrow x \leq -2$.

- Dacă se înmulțesc/împart ambii membri ai unei inecuații cu/la un număr real negativ și se schimbă sensul inegalității ($<$ devine $>$, $\leq$ devine $\geq$, $>$ devine $<$, $\geq$ devine $\leq$) se obține o inecuație echivalentă cu cea inițială.

EXEMPLE:

1. $-\frac{1}{5} \cdot x < -3 \mid \cdot (-5) \Leftrightarrow -\frac{1}{5} \cdot x \cdot (-5) > -3 \cdot (-5) \Leftrightarrow x > 15$.

2. $(-4) \cdot x > -4 \mid : (-4) \Leftrightarrow (-4) \cdot x : (-4) < -4 : (-4) \Leftrightarrow x < 1$.

Rezolvarea inecuației $ax + b \geq 0$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, în mulțimea numerelor reale

1. Dacă $a \neq 0$, atunci $ax + b \geq 0 \mid -b \Leftrightarrow ax + b - b \geq 0 - b \Leftrightarrow ax \geq -b$

a) Dacă $a > 0$, atunci $ax \geq -b \mid : a \Leftrightarrow x \geq -\frac{b}{a}$ și $S = \left[-\frac{b}{a}, +\infty\right)$.

(*S reprezintă mulțimea soluțiilor ecuației.)

b) Dacă $a < 0$, atunci $ax \geq -b \mid : a \Leftrightarrow x \leq -\frac{b}{a}$ și $S = \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right]$.

2. Dacă $a = 0$, atunci inecuația devine $b \geq 0$.

a) Dacă $b \geq 0$, atunci $S = \mathbb{R}$.

b) Dacă $b < 0$, atunci $S = \emptyset$.

**EXEMPLU:**

$2x - 7 \geq 0, x \in \mathbb{R}$;

$2x - 7 \geq 0 \mid +7 \Leftrightarrow 2x \geq 7 \mid : 2 \Leftrightarrow x \geq \frac{7}{2}$. Cum $x \in \mathbb{R}$, obținem $S = \left[\frac{7}{2}, +\infty\right)$.

OBSERVAȚIE.

De obicei, inecuațiile pe care trebuie să le rezolvăm nu sunt scrise sub forma $ax + b \geq 0$ ($\leq, <, >$), unde $a, b \in \mathbb{R}$, dar prin transformări ale membrilor lor, se obțin inecuații echivalente de această formă.

EXEMPLU:

Fie inecuația $-\frac{3}{8}x - 2 < \frac{1}{4}, x \in \mathbb{R}$. Aplicând algoritmul de rezolvare obținem:

$$-\frac{3}{8}x - 2 < \frac{1}{4} \mid -\frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{3}{8}x - 2 - \frac{1}{4} < 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{8}x - \frac{9}{4} < 0 \mid +\frac{9}{4} \Leftrightarrow -\frac{3}{8}x < \frac{9}{4} \Leftrightarrow x > \frac{9}{4} : \left(-\frac{3}{8}\right) \Leftrightarrow x > \frac{9}{4} \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) \Leftrightarrow x > -6.$$

Cum $x \in \mathbb{R}$, obținem $S = (-6, +\infty)$.

În general, pentru a rezolva această inecuație procedăm astfel:

$$-\frac{3}{8}x - 2 < \frac{1}{4} \mid +2 \Leftrightarrow -\frac{3}{8}x - 2 + 2 < \frac{1}{4} + 2 \Leftrightarrow -\frac{3}{8}x < \frac{9}{4} \mid \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) \Leftrightarrow x > \frac{9}{4} \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) \Leftrightarrow x > -6. S = (-6, +\infty).$$

Rezolvarea inecuației $\frac{a}{bx+c} > 0$, unde $a, b \in \mathbb{R}^*, c \in \mathbb{R}$, în mulțimea numerelor reale

1. Dacă $a > 0$, atunci $\frac{a}{bx+c} > 0 \Leftrightarrow bx+c > 0$.

2. Dacă $a < 0$, atunci $\frac{a}{bx+c} > 0 \Leftrightarrow bx+c < 0$.

EXEMPLU:

Se consideră inecuația $\frac{2}{3x-6} > 0, x \in \mathbb{R}$. Cum $2 > 0$ ($a > 0$) obținem:

$$\frac{2}{3x-6} > 0 \Leftrightarrow 3x-6 > 0 \Leftrightarrow 3x > 6 \Leftrightarrow x > 2 \Leftrightarrow x \in (2, +\infty). S = (2, +\infty).$$

În mod asemănător se rezolvă în mulțimea numerelor reale și inecuațiile de forma $\frac{a}{bx+c} < 0$, unde $a, b \in \mathbb{R}^*, c \in \mathbb{R}$.

OBSERVAȚII.

1. $\frac{a}{bx+c} \geq 0$ ($a, b \in \mathbb{R}^*, c \in \mathbb{R}$) $\Leftrightarrow \frac{a}{bx+c} > 0$ ($a, b \in \mathbb{R}^*, c \in \mathbb{R}$).

2. $\frac{a}{bx+c} \leq 0$ ($a, b \in \mathbb{R}^*, c \in \mathbb{R}$) $\Leftrightarrow \frac{a}{bx+c} < 0$ ($a, b \in \mathbb{R}^*, c \in \mathbb{R}$).

EXEMPLU:

$\frac{-3}{-4x-10} \leq 0, x \in \mathbb{R}$. Cum $-3 < 0$ obținem:

$$\frac{-3}{-4x-10} \leq 0 \Leftrightarrow -4x-10 > 0 \Leftrightarrow -4x > 10 \Leftrightarrow x < -\frac{10}{4} \Leftrightarrow x < -\frac{5}{2} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{5}{2}\right). S = \left(-\infty, -\frac{5}{2}\right).$$

Rezolvarea inecuației $|ax + b| < c$ ($\leq$), unde $a \in \mathbb{R}^*$, $b, c \in \mathbb{R}$ în mulțimea numerelor reale

Folosind proprietățile modulului unui număr real, obținem:

1. Dacă $c \leq 0$, atunci inecuația nu are soluții.

2. Dacă $c > 0$, atunci $|ax + b| < c \Leftrightarrow -c < ax + b < c \mid -b \Leftrightarrow -c - b < ax < c - b$

a) Dacă $a > 0$, atunci $-c - b < ax < c - b \mid : a \Leftrightarrow \frac{-c-b}{a} < x < \frac{c-b}{a} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{-c-b}{a}, \frac{c-b}{a}\right)$. $S = \left(\frac{-c-b}{a}, \frac{c-b}{a}\right)$.

b) Dacă $a < 0$, atunci $-c - b < ax < c - b \mid : a \Leftrightarrow \frac{c-b}{a} < x < \frac{-c-b}{a} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{c-b}{a}, \frac{-c-b}{a}\right)$. $S = \left(\frac{c-b}{a}, \frac{-c-b}{a}\right)$.

EXEMPLE:

1. $|2x + 8| < 4, x \in \mathbb{R}$

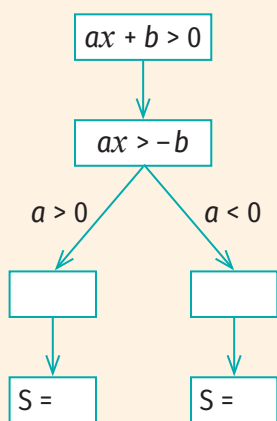
$$|2x + 8| < 4 \Leftrightarrow -4 < 2x + 8 < 4 \mid -8 \Leftrightarrow -12 < 2x < -4 \mid : 2 \Leftrightarrow -6 < x < -2 \Leftrightarrow x \in (-6, -2). S = (-6, -2)$$

2. $|-4x + 1| \leq 3, x \in \mathbb{R}$

$$|-4x + 1| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq -4x + 1 \leq 3 \mid -1 \Leftrightarrow -4 \leq -4x \leq 2 \mid : (-4) \Leftrightarrow 1 \geq x \geq -\frac{2}{4} \Leftrightarrow 1 \geq x \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]. S = \left[-\frac{1}{2}, 1\right].$$

EXERSEAZĂ!

a) Fie a și b două numere reale, $a \neq 0$. Transcrie pe caiet și completează schema rezolvării în $\mathbb{R}$ a inecuației $ax + b > 0$.



b) Scrie pe caiet schemele de rezolvare în $\mathbb{R}$ a inecuațiilor de forma $ax + b \geq 0$, $ax + b < 0$, $ax + b \leq 0$, unde a și b sunt numere reale și $a \neq 0$.

Exerciții rezolvate

1. Rezolvă inecuațiile următoare.

a) $-2x + 4 > 9, x \in \mathbb{R};$

c) $4(x - 2) - (3 - 2x) > 1 - 2(3 + x), x \in \mathbb{R};$

b) $3x - \sqrt{24} \leq 5\sqrt{6}, x \in \mathbb{R};$

d) $\frac{1}{6}x - 2\left(\frac{1}{5}x + 2\right) < 3\left(2 - \frac{1}{2}x\right) + 9.$

Rezolvare:

a) $-2x + 4 > 9 \mid -4 \Leftrightarrow -2x > 5 \mid : (-2) \Leftrightarrow x < -\frac{5}{2} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{5}{2}\right)$. $S = \left(-\infty, -\frac{5}{2}\right)$.

b) $3x - \sqrt{24} \leq 5\sqrt{6} \Leftrightarrow 3x - 2\sqrt{6} \leq 5\sqrt{6} \mid +2\sqrt{6} \Leftrightarrow 3x \leq 7\sqrt{6} \mid : 3 \Leftrightarrow x \leq \frac{7\sqrt{6}}{3} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{7\sqrt{6}}{3}\right]$. $S = \left(-\infty, \frac{7\sqrt{6}}{3}\right]$.

c) $4(x - 2) - (3 - 2x) > 1 - 2(3 + x) \Leftrightarrow 4x - 8 - 3 + 2x > 1 - 6 - 2x \Leftrightarrow 6x - 11 > -5 - 2x \Leftrightarrow 6x + 2x > -5 + 11 \Leftrightarrow 8x > 6 \Leftrightarrow x > \frac{6}{8} \Leftrightarrow x > \frac{3}{4} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$. $S = \left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$.

d) $\frac{1}{6}x - 2\left(\frac{1}{5}x + 2\right) < 3\left(2 - \frac{1}{2}x\right) + 9 \Leftrightarrow \frac{1}{6}x - \frac{2}{5}x - 4 < 6 - \frac{3}{2}x + 9 \Leftrightarrow$

$\stackrel{5)}{\frac{1}{6}x} - \stackrel{6)}{\frac{2}{5}x} + \stackrel{15)}{3}x < 6 + 9 + 4 \Leftrightarrow \frac{5}{30}x - \frac{12}{30}x + \frac{45}{30}x < 19 \Leftrightarrow \frac{38}{30}x < 19 \Leftrightarrow x < 19 \cdot \frac{30}{38} \Leftrightarrow x < 15 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 15)$. $S = (-\infty, 15)$.

2. Scrie mulțimile $A = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ și } -2 \leq 2x + 5 < 4\}$ și $B = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ și } -1 < \frac{3x-1}{2} < 2\}$ sub formă de intervale de numere reale.

Rezolvare:

$-2 \leq 2x + 5 < 4 \mid -5 \Leftrightarrow -2 - 5 \leq 2x + 5 - 5 < 4 - 5 \Leftrightarrow -7 \leq 2x < -1 \mid : 2 \Leftrightarrow -\frac{7}{2} \leq x < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Așadar, $A = \left[-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

$-1 < \frac{3x-1}{2} < 2 \mid \cdot 2 \Leftrightarrow -1 \cdot 2 < \frac{3x-1}{2} \cdot 2 < 2 \cdot 2 \Leftrightarrow -2 < 3x - 1 < 4 \mid +1 \Leftrightarrow$

$-2 + 1 < 3x - 1 + 1 < 4 + 1 \Leftrightarrow -1 < 3x < 5 \mid : 3 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < x < \frac{5}{3} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

Așadar, $B = \left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

Aplic

1. Notează în casetă **A**, dacă propoziția este adevărată și **F**, dacă propoziția este falsă.

a) Numărul real -1 este soluție a inecuației $2x - 2 < -2, x \in \mathbb{R}$. ☐

b) Mulțimea soluțiilor inecuației $-x > 0, x \in \mathbb{R}$ este $\{\dots, -3, -2, -1\}$. ☐

c) Mulțimea soluțiilor inecuației $(-2) \cdot x \geq -4, x \in \mathbb{R}$ este $[2, +\infty)$. ☐

2. Verifică dacă -1 este soluție a inecuației:

a) $\sqrt{6}x - 2 < 4, x \in \mathbb{R}$; b) $5 + 2 \cdot x \geq 3, x \in \mathbb{Z}$; c) $0,5 + \frac{x}{2} < 0, x \in \mathbb{R}$.

3. Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuațiile:

- | | | |
|-----------------------------------|--|---|
| a) $4x + 8 < 0$; | g) $5x - 10 \geq 5$; | m) $-3x - \frac{15}{4} \leq -\frac{1}{3}$; |
| b) $2 - 6x \geq 0$; | h) $12 - 4x < 4$; | n) $\frac{1}{2} - \frac{7}{3}x > -1,5$; |
| c) $3x + 12\sqrt{6} \leq 0$; | i) $15 + 3x \leq -9$; | o) $3\sqrt{6} - \sqrt{6}x < \sqrt{24}$; |
| d) $4\sqrt{3}x - \sqrt{48} > 0$; | j) $-1,2 - 3x > 3$; | p) $-4\sqrt{10} + 5x \leq \sqrt{360}$; |
| e) $-3x + 0,9 > 0$; | k) $\frac{2}{15} - \frac{3}{20}x > -1$; | q) $7x + 5\sqrt{2} \geq 6\sqrt{8}$; |
| f) $-6x - \frac{2}{3} < 0$; | l) $\frac{5}{18}x - \left(-\frac{7}{12}\right) \leq \frac{16}{48}$; | r) $-10 - 3\sqrt{2}x < 2$. |

4. Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuațiile:

- | | |
|----------------------------|---|
| a) $7 - 2x < 3x - 8$; | f) $2(x - 1,5) + 5 > 7(x + 2) - 2$; |
| b) $2x + 6 \geq 5x - 3$; | g) $-3 + 2(3x - 4) \leq -7 + 4x$; |
| c) $-3 + 4x \geq 4 + 5x$; | h) $-4 - 2(x + 3) < 1 - 3(2 - x)$; |
| d) $-3x + 10 < -5x + 20$; | i) $-1 + 3(3 - 2x) \leq 10 - 2(2x + 4)$; |
| e) $3x - 4 > 10x + 3$; | j) $2(x + 3) - 3(1 - x) > 1 - 4(2 - x)$. |

5. Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuațiile:

- | | |
|--|---|
| a) $\frac{2}{3}x + 2 \geq 3\left(x - \frac{1}{9}\right)$; | c) $1 - \frac{5}{14}x + \frac{4}{21}(x - 42) > 4 - \frac{3}{7}x$; |
| b) $\frac{3}{4}x - \frac{7}{8} < \frac{5}{12}x + 1$; | d) $\frac{7}{12}x - 3\left(\frac{1}{4}x + 1\right) < 2\left(1 - \frac{5}{12}x\right) + 1$. |

6. Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuațiile:

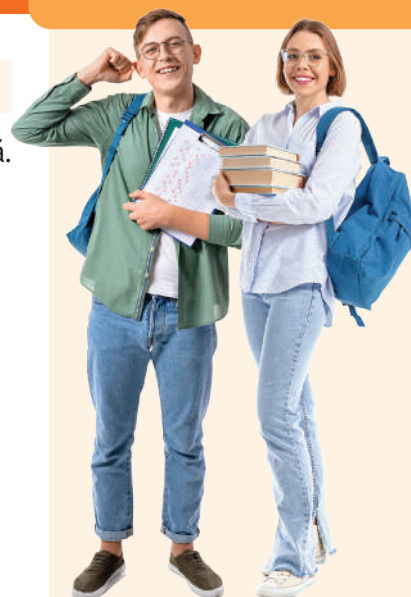
- | | |
|---|---|
| a) $\frac{3x-2}{2} - \frac{1}{3} > \frac{2+x}{6} + \frac{1}{2}$; | d) $\frac{2-x}{2} - \frac{7-2x}{10} < \frac{7+3x}{5} - \frac{3+x}{15}$; |
| b) $\frac{1+3x}{4} + \frac{3}{16} \leq 2 - \frac{5-x}{8}$; | e) $\frac{5x}{6} - \frac{2(2x-1)}{3} \leq -2 + \frac{5(1-x)}{12}$; |
| c) $\frac{2}{3} - \frac{1-2x}{12} \geq \frac{1-x}{18} + \frac{1}{12}$; | f) $\frac{2x-7}{32} - \frac{5+4x}{8} \geq \frac{2x+5}{16} - \frac{3(1-x)}{4}$. |

7. Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuațiile:

- | | |
|---|---|
| a) $2x + 6\sqrt{3} \geq 3x - 2\sqrt{3}$; | e) $2(x - \sqrt{2}) + 3(2\sqrt{2} - x) < 0$; |
| b) $-5\sqrt{2} - 7\sqrt{2}x < 13\sqrt{2} + \sqrt{8}x$; | f) $2(3x - 2\sqrt{5}) - 3(\sqrt{5} + x) \geq \sqrt{20}$; |
| c) $6x - 3\sqrt{18} \leq -3x + 6\sqrt{2}$; | g) $2(x - 2\sqrt{3}) - (x + 2\sqrt{3}) > 3(\sqrt{12} - x) + 2x$; |
| d) $2\sqrt{5}x - 3\sqrt{10} \leq \sqrt{80}x - 5\sqrt{10}$; | h) $1 - 2\sqrt{5}x + 3(\sqrt{5}x - 3) > -2(1 - 2\sqrt{5}x)$. |

8. Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuațiile:

- | | | | |
|------------------------------|--------------------------------|------------------------------|-------------------------------|
| a) $\frac{4}{3x-8} > 0$; | c) $\frac{-2}{4x+12} \leq 0$; | e) $\frac{-8}{7-2x} > 0$; | g) $\frac{10}{5x+1} > 0$; |
| b) $\frac{5}{6-3x} \geq 0$; | d) $\frac{-5}{6x-18} > 0$; | f) $\frac{-10}{-3x-6} < 0$; | h) $\frac{9}{-4x-6} \leq 0$. |



LUCRAȚI ÎN PERECHI!

1. Scrieți numărul real a pentru care inecuația $|x| \leq a, x \in \mathbb{R}$, are o singură soluție.

2. Determinați valorile numărului real a pentru care inecuația $|x| \leq a, x \in \mathbb{R}$, nu are soluții.

3. Arătați că inecuația $|x| \geq a, x \in \mathbb{R}$, are o infinitate de soluții pentru orice număr real a .

4. Determinați valorile numărului real x pentru care există intervalele de numere reale:

- $[5, 4x + 1]$;
- $(-2, 3x - 4)$;
- $(7, 3 - 2x)$;
- $[-5, -1 - 3x]$;
- $[x, 2x - 1]$;
- $(-x + 1, 5x - 2)$;
- $[2x - 3, x + 5]$;
- $(-4x + 1, x - 3)$.

LUCRAȚI ÎN PERECHI!

Marius are la matematică notele: 5, 7, 8, 6 și 6.

- a) Ce notă ar trebui să ia Marius pentru a-și mări cu un punct media la matematică?
- b) Marius trebuie să mai ia încă două note la matematică. El dorește să își mărească media cu un punct. Care sunt cele două note pe care trebuie să le mai ia?

9. Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuațiile:

- a) $|2x + 1| < 3$; d) $|5 - 2x| < \frac{1}{7}$; g) $|6\sqrt{5} + 10x| \leq 4\sqrt{5}$;
 b) $|3x + 5| < 4$; e) $\left|\frac{4x+3}{5}\right| \leq 5$; h) $|2 - 5\sqrt{2}x| \leq 8$;
 c) $|-4x + 7| \leq 5$; f) $\left|\frac{3x+1}{6}\right| \leq \frac{2}{3}$; i) $|-3x + 2\sqrt{3}| < 11\sqrt{3}$.

10. Determină $A \cup B$ și $A \cap B$.

- a) $A = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } 4 - 2x \leq 10\}$, $B = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } 3x + 11 < 5\}$;
 b) $A = \{x | x \in \mathbb{R}, x \neq 3 \text{ și } \frac{2}{3x-9} > 0\}$, $B = \{x | x \in \mathbb{R}, x \neq 4 \text{ și } \frac{-5}{8-2x} \leq 0\}$;
 c) $A = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } 3 \leq 4x + 7 < 15\}$, $B = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } -13 < -8 - 5x < 7\}$;
 d) $A = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } -3 \leq \frac{-2x+1}{5} \leq -1\}$, $B = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } 2 < \frac{7+3x}{6} \leq 5\}$;
 e) $A = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } |2x - 6| \leq 2\}$, $B = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } |-3x + 5| < 4\}$;
 f) $A = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } \left|\frac{3x+7}{2}\right| < 4\}$, $B = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ și } \left|\frac{-2x+3}{5}\right| \leq 1\}$.

Investigație

Indicele de masă corporală (IMC) este un număr calculat pe baza formulei $IMC = \frac{\text{masa corporală}}{\text{înălțime}^2}$, unde masa corporală este exprimată în kilograme, iar înălțimea este exprimată în metri.

Acest indice se folosește pentru a evalua starea de sănătate a unei persoane, în funcție de masa corporală a acesteia.

Indicele de masă corporală a unei persoane subponderale este mai mic decât 18,5; al unei persoane normoponderale este mai mare sau egal cu 18,5 și mai mic decât 25; al unei persoane supraponderale este mai mare sau egal cu 25 și mai mic decât 30, iar al unei persoane obeze este mai mare sau egal cu 30.

- a) Scrie sub formă de intervale de numere reale mulțimile cărora aparțin indicii de masă corporală așa cum reies din descrierea de mai sus.
- b) Există numere reale în intervalele scrise la punctul a), care nu pot fi indici de masă corporală ai unor persoane? Dacă da, dă câteva exemple și justifică.
- c) Completează tabelul următor.

Înălțime (m)	1,60	1,75	1,50	1,65	1,80	1,60		
Masa corporală (kg)	60	80	45	85			54	51,2
IMC					25	30	24	20

- d) Care e intervalul de numere reale căruia trebuie să îi aparțină masa corporală a unei persoane normoponderale cu înălțimea egală cu 1,6 m?
- e) Care e intervalul de numere reale căruia trebuie să îi aparțină masa corporală a unei persoane normoponderale cu aceeași înălțime ca tine?

