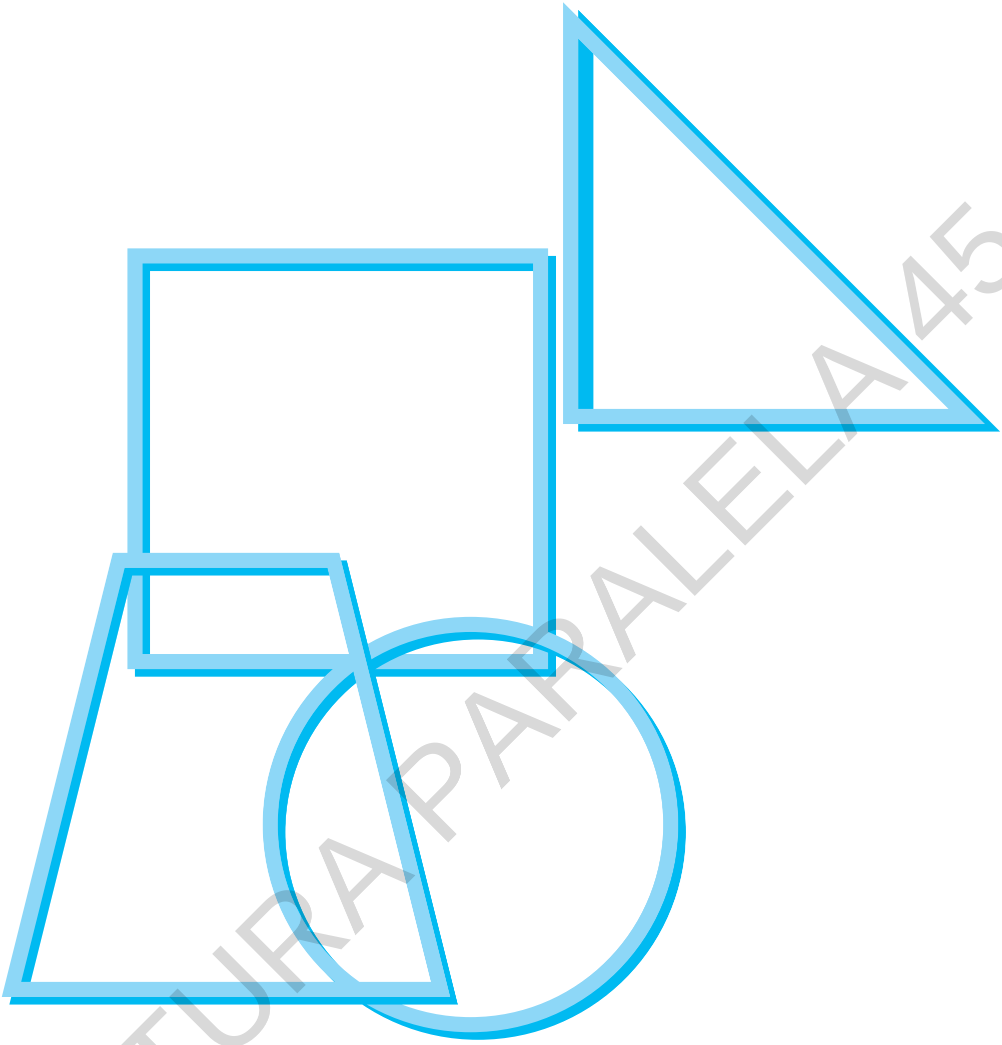


Redactare: Andreea Roșca
Tehnoredactare: Roxana Pietreanu
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Marius Badea

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
PELIGRAD, SORIN
Geometrie în spațiu pentru Evaluarea Națională
și olimpiadele școlare / Sorin Peligrad. –
Pitești : Paralela 45, 2023
ISBN 978-973-47-3867-0

51

Sorin Peligrad

GEOMETRIE ÎN SPAȚIU PENTRU EVALUAREA NAȚIONALĂ ȘI OLIMPIADELE ȘCOLARE

Editura Paralela 45

CUVÂNT-ÎNAINTE

Acest auxiliar încearcă să ajute elevii din clasa a VIII-a care se pregătesc pentru Evaluarea Națională sau care doresc să participe la olimpiadele școlare.

Partea I cuprinde conținuturile de geometrie în spațiu prevăzute de programa pentru Evaluarea Națională, prezentate în rezumat și explicate prin aplicații rezolvate.

Partea a II-a completează cunoștințele învățate cu o serie de teoreme importante, care ajută elevii să rezolve mai ușor unele probleme cu grad ridicat de dificultate.

În partea a II-a sunt prezentate mai multe metode pentru aflarea distanței dintre două drepte necoplanare și utilizarea lor în probleme.

EXTRAS DIN PROGRAMA PENTRU EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI A VIII-A

Domeniul de conținut: Geometrie

Subdomeniul: Corpuri geometrice

- Corpuri geometrice: piramida, piramida regulată, tetraedrul regulat; prismă dreaptă, paralelipiped dreptunghic, cub; cilindru circular drept; con circular drept; reprezentare, elemente caracteristice, desfășurări
- Paralelism: drepte paralele, unghiul a două drepte, dreaptă paralelă cu un plan, plane paralele, aplicații: secțiuni paralele cu baza în corpurile geometrice studiate; trunchiul de piramidă și trunchiul de con circular drept
- Perpendicularitate: drepte perpendiculare în spațiu, dreaptă perpendiculară pe un plan, aplicații: înălțimea unei piramide, înălțimea unui con circular drept, distanța dintre două plane paralele, înălțimea prismei drepte, a paralelipipedului dreptunghic, a cilindrului circular drept, a trunchiului de piramidă/con circular drept; plane perpendiculare, aplicații: secțiuni diagonale, secțiuni axiale în corpurile studiate; proiecții de puncte, de segmente și de drepte pe un plan; unghiul dintre o dreaptă și un plan, aplicație: lungimea proiecției unui segment; unghi diedru, unghi plan corespunzător diedrului; unghiul a două

plane; plane perpendiculare; teorema celor trei perpendiculare; calculul distanței de la un punct la o dreaptă; calculul distanței de la un punct la un plan; calculul distanței dintre două plane paralele

- Distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul corpurilor geometrice studiate
- Arii ți volume ale unor corpuri geometrice: piramidă regulată (cu baza triunghi echilateral, pătrat sau hexagon regulat), prismă dreaptă (cu baza triunghi echilateral, pătrat sau hexagon regulat), paralelipiped dreptunghic, cub, cilindru circular drept, con circular drept, trunchi de piramidă regulată, trunchi de con circular drept
- Sfera: arie, volum

PARTEA I

CONȚINUTURI DE GEOMETRIE ÎN SPAȚIU PENTRU EVALUAREA NAȚIONALĂ

I.1. CORPURI GEOMETRICE

I.1.1. PIRAMIDA, PIRAMIDA REGULATĂ, TETRAEDRUL REGULAT

PIRAMIDA este corpul geometric determinat de un poligon plan și un punct care nu aparține planului care conține acel poligon.

Poligonul plan este baza piramidei, laturile poligonului sunt muchiile bazei, punctul exterior este vârful piramidei, iar segmentele determinate de vârful piramidei și vârfurile bazei sunt muchiile laterale.

Piramida cu baza triunghi se numește piramidă triunghiulară sau tetraedru (figura 1), piramida cu baza un patrulater se numește piramidă patrulateră (figura 2), piramida cu baza un hexagon se numește piramidă hexagonală (figura 3) ș.a.m.d.

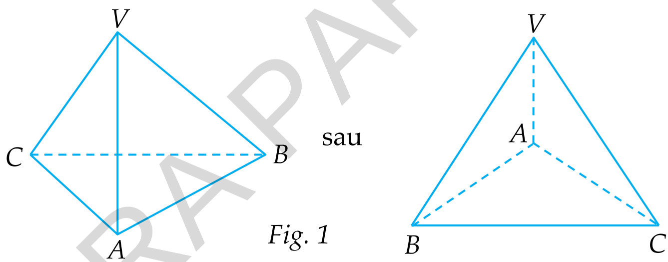


Fig. 1

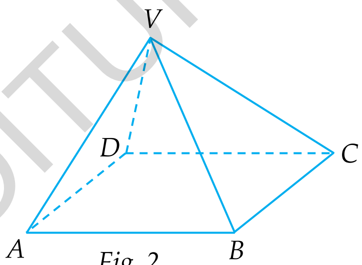


Fig. 2

sau

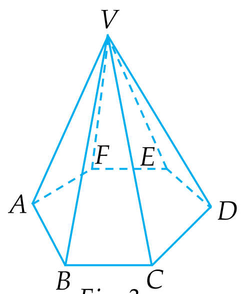


Fig. 3

Triunghiurile determinate de vârful piramidei și laturile poligonului de la bază sunt fețele laterale.

PIRAMIDA REGULATĂ este piramida care are baza poligon regulat și muchiile laterale congruente.

Într-o piramidă regulată fețele laterale sunt triunghiuri isoscele congruente.

Înălțimea unei fețe laterale într-o piramidă regulată se numește apotemă.

PIRAMIDA TRIUNGHIULARĂ REGULATĂ are baza triunghi echilateral și muchiile laterale congruente (figura 4).

TETRAEDRUL REGULAT este o piramidă triunghiulară regulată în care fețele laterale sunt triunghiuri echilaterale (figura 5).

Tetraedrul regulat are toate fețele triunghiuri echilaterale.

Într-un tetraedru regulat muchiile laterale sunt congruente cu muchiile bazei.

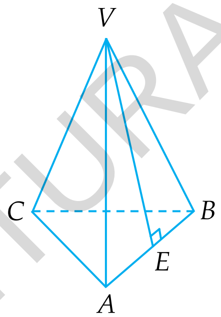


Fig. 4

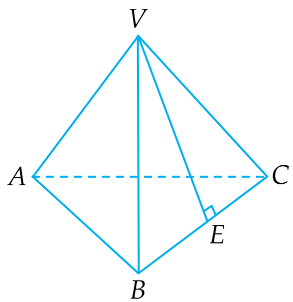


Fig. 5

În figurile 4 și 5 segmentul VE este apotema piramidei.

PIRAMIDA PATRULATERĂ REGULATĂ este piramida regulată care are baza pătrat și muchiile laterale congruente (figura 6).

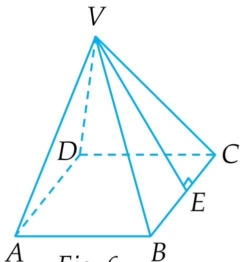


Fig. 6

PIRAMIDA HEXAGONALĂ REGULATĂ are baza hexagon regulat și muchiile laterale congruente (figura 7).

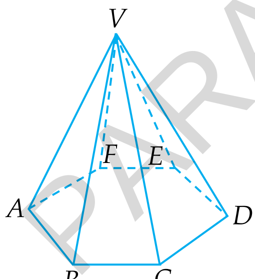


Fig. 7

Desfășurarea piramidelor regulate triunghiulare din figurile 4 și 5 sunt figurile 8, respectiv 9.

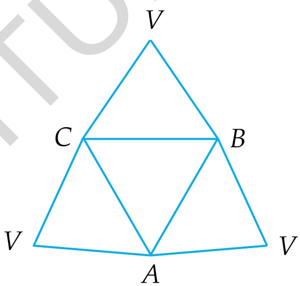


Fig. 8

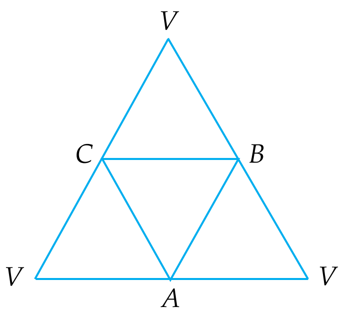


Fig. 9

Desfășurările piramidelor regulate din figurile 6 și 7 sunt reprezentate în figurile 10 și 11.

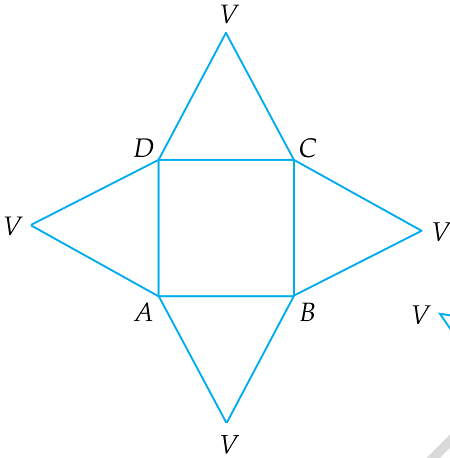


Fig. 10

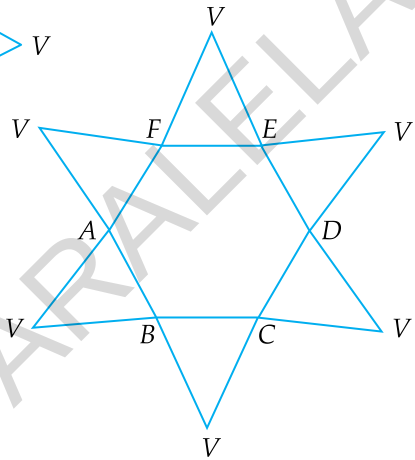


Fig. 11

Observație:

În figurile 8, 9, 10, 11 sunt reprezentate cele mai simple desfășurări ale corpurilor din figurile 4, 5, 6, respectiv 7.

Pentru fiecare corp există mai multe desfășurări, unele sunt mai greu de înțeles.

De exemplu, pentru tetraedrul din figura 5, o altă desfășurare este în figura 12.

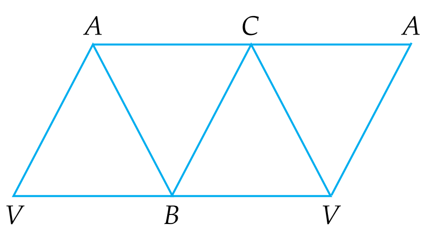


Fig. 12

I.1.2. PRISMA DREAPTĂ, PARALELIPIPEDUL DREPTUNGHIC, CUBUL

PRISMA este corpul geometric determinat de două poligoane plane congruente, situate în plane paralele.

- poligoanele plane congruente sunt bazele prismei;
- laturile acestor poligoane sunt muchiile bazelor;
- segmentele care au extremități vârfuri corespunzătoare ale bazelor se numesc muchii laterale;
- fețele laterale sunt paralelograme.

Dacă fețele laterale sunt dreptunghiuri, atunci prisma se numește prismă dreaptă.

PRISMA TRIUNGHIULARĂ REGULATĂ

Prisma triunghiulară regulată este o prismă dreaptă cu baze triunghiuri echilaterale.

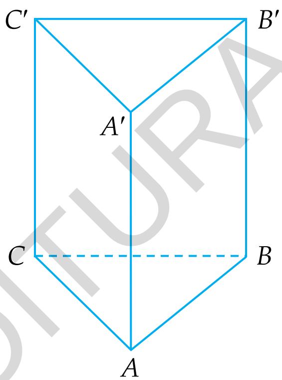


Fig. 1

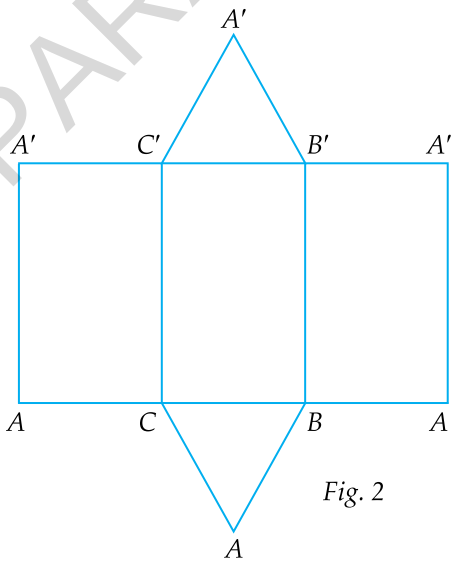


Fig. 2

În figura 1 este desenată o prismă triunghiulară regulată.

În figura 2 este reprezentată desfășurarea unei prisme triunghiulare regulate.

PARALELIPIPEDUL DREPTUNGHIC este o prismă dreaptă care are bazele dreptunghiuri.

Paralelipipedul dreptunghic are toate fețele dreptunghiuri.

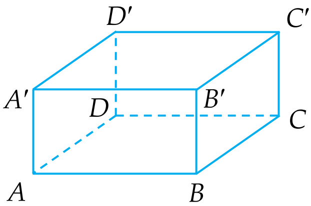


Fig. 3

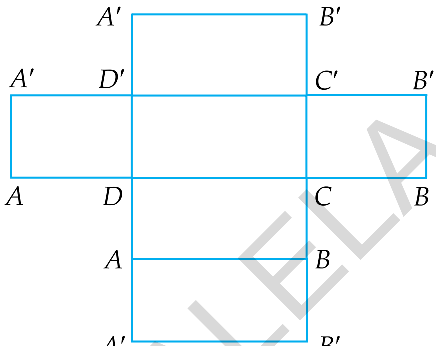


Fig. 4

În figura 3 este desenat un paralelipiped dreptunghic.

În figura 4 este reprezentată o desfășurare a unui paralelipiped dreptunghic.

CUBUL este paralelipipedul dreptunghic care are lungimea egală cu lățimea, egală cu înălțimea.

În cub toate fețele sunt pătrate.

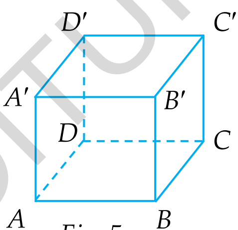


Fig. 5

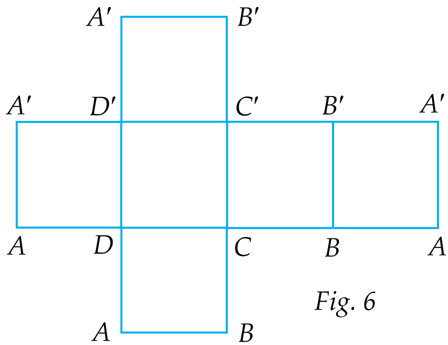


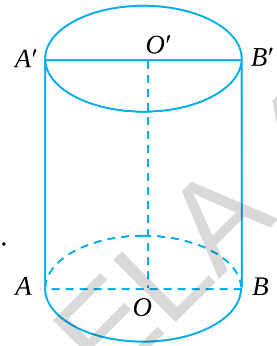
Fig. 6

În figura 5 este desenat un cub.

În figura 6 este reprezentată desfășurarea unui cub.

I.1.3. Cilindrul circular drept

Elemente:



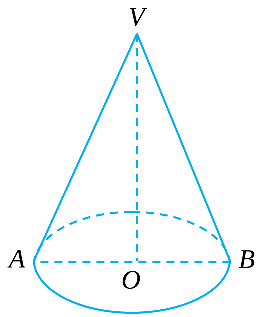
- raze: $OA = OB = O'A' = O'B' = r$;
- generatoare: $AA' = BB' = G$;
- înălțimea: $OO' = h$;
- secțiunea axială este dreptunghiul $ABB'A'$.

Desfășurarea este dreptunghiul $BB_1B_1'B'$.

$BB_1 = 2\pi R$

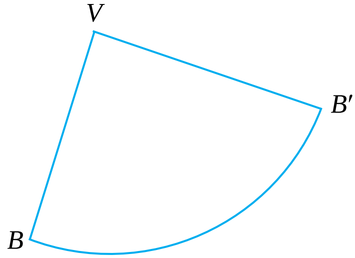
I.1.4. Conul circular drept

Elemente:



- raze: $OA = OB = R$;
- generatoare: $VA = VB = G$;
- înălțimea: $VO = h$.

Desfășurarea este un sector de cerc.



Desfășurarea suprafeței laterale a unui con circular drept este sectorul de cerc din cercul cu raza egală cu generatoarea conului care subîntinde un arc de cerc cu lungimea egală cu lungimea cercului de bază.

Aplicații:

1. Piramida regulată cu 8 muchii are la bază un ... .

Soluție:

Într-o piramidă numărul muchiilor laterale este egal cu numărul muchiilor bazei, deci 8 : 2 = 4, rezultă că baza are 4 laturi. Poligonul regulat cu 4 laturi este pătratul.

2. Prisma dreaptă regulată cu 18 muchii are la bază un ... .

Soluție:

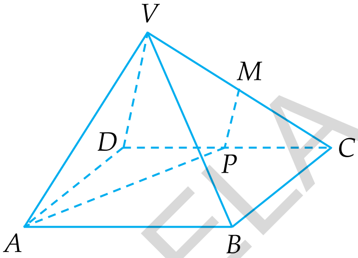
Într-o prismă dreaptă numărul muchiilor laterale este jumătate din numărul muchiilor bazelor, deci 18 : 3 = 6, rezultă că o bază are 6 laturi. Poligonul regulat cu 6 laturi este hexagonul regulat.

3. Dacă V este numărul de vârfuri, F numărul de fețe și M numărul de muchii ale unei prisme regulate drepte sau ale unei piramide regulate și $F + V = 14$, atunci M este ... .

Soluție:

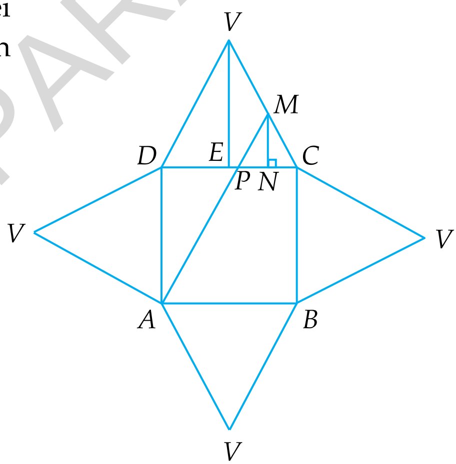
Din $F + V = M + 2 \Rightarrow M + 2 = 14 \Rightarrow M = 12$; $F + V = M + 2$ este relația dintre F, V și M în prismă și în piramidă.

4. În figura alăturată este reprezentată o piramidă regulată $VABCD$, cu baza pătrat. Se știe că $AB = 8$ cm, $VA = 4\sqrt{5}$ cm, M este mijlocul lui VC și $P \in DC$. Determinați valoarea minimă a sumei $MP + PA$ și poziția punctului P pentru care suma $MP + PA$ este minimă.



Soluție:

Desfășurarea piramidei $VABCD$ este reprezentată în figura alăturată.



Cum distanța cea mai scurtă între două puncte este lungimea segmentului cu extremitățile în cele două puncte, rezultă că suma $MP + PA$ este minimă când punctele M, P și A sunt coliniare, deci când P este intersecția dintre MA și DC.

Ducem $VE \perp DC$, $E \in DC$ și $MN \perp DC$, $N \in DC$. Rezultă că $MN \parallel VE$.

Din $VM \equiv MC$ și $MN \parallel VE \Rightarrow MN$ este linie mijlocie în $\Delta VEC \Rightarrow$ $\Rightarrow EN \equiv NC$ și $MN = \frac{VE}{2}$.

Din $VD \equiv VC$ și $VE \perp DC \Rightarrow DE \equiv EC \Rightarrow DE = EC = \frac{DC}{2} = \frac{8}{2} =$ $= 4$ cm.

Din $VE \perp DC \Rightarrow \sphericalangle VEC = 90° \Rightarrow VE^2 = VC^2 - EC^2 \Rightarrow VE^2 =$ $= (4\sqrt{5})^2 - 4^2 = 80 - 16 = 64 \Rightarrow VE = 8$ cm.

Deci $MN = \frac{VE}{2} = \frac{8}{2} = 4$ cm.

Din $EN \equiv NC \Rightarrow EN = NC = \frac{EC}{2} = \frac{4}{2} = 2$ cm; $DN = DC - NC =$ $= 8 - 2 = 6$ cm.

Din $MN \perp DC$ și $AD \perp DC \Rightarrow MN \parallel AD \Rightarrow \Delta MPN \sim \Delta APD \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{MN}{AD} = \frac{NP}{DP} = \frac{MP}{AP}$. Dar $\frac{MN}{AD} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{NP}{DP} = \frac{MP}{AP} = \frac{1}{2}$.

Din $\frac{NP}{DP} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{NP}{NP + DP} = \frac{1}{1+2} \Rightarrow \frac{NP}{DN} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{NP}{6} =$ $= \frac{1}{3} \Rightarrow NP = \frac{6}{3} = 2$ cm $\Rightarrow DP = DN - PN = 6 - 2 = 4$ cm; din $DP =$ $= 4$ cm și $DE = 4$ cm $\Rightarrow DP \equiv DE \Rightarrow P = E$.

În ΔADP avem $\sphericalangle ADP = 90° \Rightarrow AP^2 = AD^2 + DP^2 \Rightarrow AP^2 = 8^2 +$ $+ 4^2 = 64 + 16 = 80 \Rightarrow AP = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ cm.

Dar $\frac{MP}{AP} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{MP}{4\sqrt{5}} = \frac{1}{2} \Rightarrow MP = \frac{4\sqrt{5}}{2} = 2\sqrt{5}$ cm.

Deci $AM = MP + AP = 2\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$ cm.

Așadar, minimul sumei $MP + AP$ este $6\sqrt{5}$ cm și se obține când P este mijlocul lui DC.

I.2. PARALELISM

I.2.1. Dreptele paralele sunt dreptele care sunt situate în același plan și care au intersecția mulțimea vidă.

I.2.2. Unghiul a două drepte necoplanare

Unghiul a două drepte necoplanare este unghiul cu măsura mai mică sau egală cu 90° format de două paralele duse la cele două drepte printr-un punct oarecare din spațiu.

Observație:

De cele mai multe ori se duce o singură paralelă la una dintre drepte, printr-un punct ales pe cealaltă dreaptă.

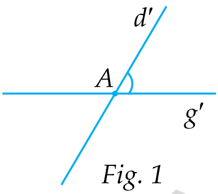


Fig. 1

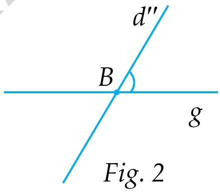


Fig. 2

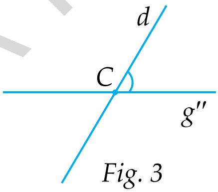


Fig. 3

În figura 1, figura 2 și figura 3 avem: d, g necoplanare, $d \parallel d' \parallel d''$ și $g \parallel g' \parallel g''$.

Din $d \parallel d'$ și $g \parallel g' \Rightarrow \sphericalangle(d, g) = \sphericalangle(d', g')$ (figura 1).

Din $d \parallel d'' \Rightarrow \sphericalangle(d, g) = \sphericalangle(d'', g)$ (figura 2).

Din $g \parallel g'' \Rightarrow \sphericalangle(d, g) = \sphericalangle(d, g'')$ (figura 3).

Deci $\sphericalangle(d, g) = \sphericalangle(d', g') = \sphericalangle(d, g'') = \sphericalangle(d'', g)$.

Dacă măsura unghiului format de dreptele necoplanare este 90°, atunci dreptele necoplanare se numesc drepte necoplanare perpendiculare sau drepte perpendiculare.

Deci, dacă $\sphericalangle(d, g) = 90°$, atunci $d \perp g$ și invers, dacă $d \perp g$, atunci $\sphericalangle(d, g) = 90°$.

Probleme rezolvate:

1. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub. Determinați:

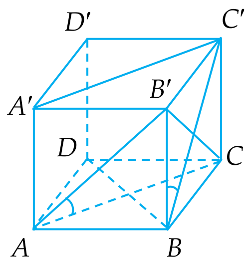
a) măsura unghiului format de AA' și BC';

b) măsura unghiului format de $A'C'$ și BD;

c) măsura unghiului format de AB' și $A'C'$.

Soluție:

a) Din $ABB'A'$ pătrat $\Rightarrow AA' \parallel BB' \Rightarrow \sphericalangle(AA', BC') = \sphericalangle(BB', BC') = \sphericalangle B'BC'$. Din $BCC'B'$ – pătrat $\Rightarrow \Delta BB'C'$ este dreptunghic isoscel $\Rightarrow \sphericalangle B'BC' = 45°$. Deci $\sphericalangle(AA', BC') = 45°$;



b) Din $AA' \parallel CC'$ și $AA' = CC' \Rightarrow ACC'A'$ este paralelogram $\Rightarrow A'C' \parallel AC$. Deoarece $ABCD$ – pătrat $\Rightarrow AC \perp BD \Rightarrow A'C' \perp BD \Rightarrow$ $\Rightarrow \sphericalangle(A'C', BD) = 90°$;

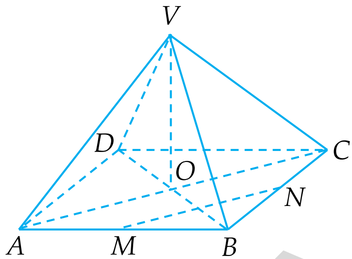
c) Din $AA' \parallel CC'$ și $AA' = CC' \Rightarrow ACC'A'$ este paralelogram $\Rightarrow$ $\Rightarrow A'C' \parallel AC$. Din $A'C' \parallel AC \Rightarrow \sphericalangle(AB', A'C') = \sphericalangle(AB', AC) = \sphericalangle B'AC$. Dacă $AB = a$, atunci $AC = AB' = B'C = a\sqrt{2} \Rightarrow \Delta AB'C$ este echilateral. Din $\Delta AB'C$ – echilateral $\Rightarrow \sphericalangle B'AC = 60° \Rightarrow \sphericalangle(AB', A'C') = 60°$.

2. În piramida regulată $VABCD$ avem $VA = VB = AB = a$.

a) Aflați măsura unghiului format de VA și DC.

b) Dacă M și N sunt mijloacele muchiilor AB, respectiv BC, atunci aflați măsura unghiului format de dreptele VA și MN.

Soluție:



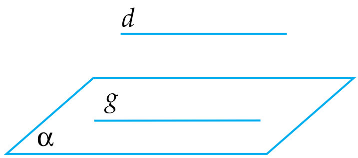
a) Din $ABCD$ este pătrat $\Rightarrow AB \parallel DC \Rightarrow \sphericalangle(VA, DC) = \sphericalangle(VA, AB) = \sphericalangle VAB$. Din $VA = VB = AB = a \Rightarrow \Delta VAB$ este echilateral $\Rightarrow \sphericalangle VAB = 60°$. Deci $\sphericalangle(VA, DC) = 60°$;

b) Deoarece M – mijlocul lui AB și N – mijlocul lui $BC \Rightarrow MN$ este linie mijlocie în $\Delta ABC \Rightarrow MN \parallel AC \Rightarrow \sphericalangle(VA, MN) = \sphericalangle(VA, AC) = \sphericalangle VAC$. În ΔABC, cu $\sphericalangle ABC = 90°$, avem: $AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{2}$. Din $VA^2 + VC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$ și $AC^2 = 2a^2 \Rightarrow AC^2 = VA^2 + VC^2 \Rightarrow \Delta VAC$ este dreptunghic, cu $\sphericalangle AVC = 90°$. Din $\sphericalangle AVC = 90°$ și $VA = VC = a \Rightarrow \Delta VAC$ este dreptunghic isoscel $\Rightarrow \sphericalangle VAC = 45°$. Deci $\sphericalangle(VA, MN) = 45°$.

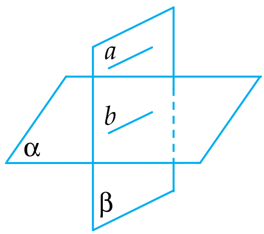
I.2.3. Dreaptă paralelă cu planul

O dreaptă este paralelă cu un plan dacă intersecția dintre dreaptă și plan este mulțimea vidă.

Teoreme:



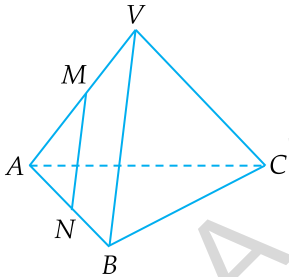
- O dreaptă exterioară unui plan este paralelă cu acesta dacă este paralelă cu o dreaptă conținută în plan. Deci, dacă $d \parallel g$ și $g \subset \alpha$, atunci $d \parallel \alpha$.



- Dacă o dreaptă a este paralelă cu un plan α, atunci orice plan β care conține dreapta a intersectează planul α după o dreaptă b, paralelă cu a. Deci, dacă $a \parallel \alpha$, $a \subset \beta$ și $\beta \cap \alpha = b$, atunci $b \parallel a$.

Probleme rezolvate:

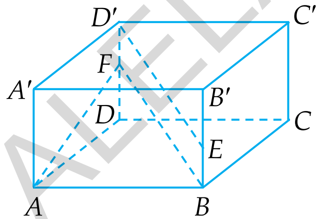
1. În piramida triunghiulară $VABC$ avem M mijlocul lui VA și N mijlocul lui AB. Arătați că $MN \parallel (VBC)$.



Soluție:

Din $AM \equiv MV$ și $AN \equiv NB \Rightarrow MN$ este linie mijlocie în $\Delta VAB \Rightarrow MN \parallel VB$. Din $MN \parallel VB$ și $VB \subset (VBC) \Rightarrow MN \parallel (VBC)$.

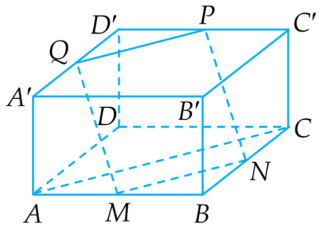
2. În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ considerăm punctele $E \in BB'$, $F \in DD'$, astfel încât $BE \equiv \equiv D'F$. Arătați că $D'E \parallel (AFB)$.



Soluție:

Din $ABCDA'B'C'D'$ – paralelipiped dreptunghic $\Rightarrow BB' \parallel DD'$. Din $BB' \parallel DD' \Rightarrow BE \parallel D'F$. Din $BE \parallel D'F$ și $BE \equiv D'F \Rightarrow BED'F$ – paralelogram $\Rightarrow D'E \parallel BF$. Din $D'E \equiv BF$ și $BF \subset (AFB) \Rightarrow D'E \parallel \parallel (AFB)$.

3. Fie $ABCDA'B'C'D'$ paralelipiped dreptunghic. Notăm cu M, N și P mijloacele muchiilor AB, BC, respectiv $D'C'$ și $A'D' \cap (MNP) = \{Q\}$. Arătați că $MNPQ$ este paralelogram.



Soluție:

Din $BM \equiv MA$ și $BN \equiv NC \Rightarrow MN$ este linie mijlocie în $\Delta ABC \Rightarrow \Rightarrow MN \parallel AC$ și $MN = \dfrac{AC}{2}$. Din $ABCDA'B'C'D'$ – paralelipiped dreptunghic $\Rightarrow AA' \parallel CC'$ și $AA' \equiv CC'$. Din $AA' \parallel CC'$ și $AA' \equiv \equiv CC' \Rightarrow ACC'A'$ paralelogram $\Rightarrow AC \parallel A'C'$ și $AC \equiv A'C'$. Din $MN \parallel AC$ și $AC \parallel A'C' \Rightarrow MN \parallel A'C'$. Din $MN \parallel A'C'$ și $A'C' \subset$

$\subset (A'B'C') \Rightarrow MN \parallel (A'B'C')$. Din $MN \parallel (A'B'C')$, $MN \subset (MNP)$ și $(MNP) \cap (A'B'C') = PQ \Rightarrow MN \parallel PQ \Rightarrow PQ \parallel MN$. Din $PQ \parallel MN$ și $MN \parallel A'C' \Rightarrow PQ \parallel A'C'$. Din $D'P \equiv PC'$ și $PQ \parallel A'C' \Rightarrow PQ$ – linie mijlocie în $\Delta A'D'C' \Rightarrow PQ \parallel A'C'$ și $PQ = \dfrac{A'C'}{2}$. Din $MN = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{A'C'}{2} = PQ \Rightarrow MN \equiv PQ$. Din $MN \equiv PQ$ și $MN \parallel PQ \Rightarrow MNPQ$ este paralelogram.

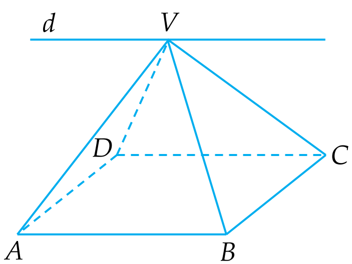
Alte teoreme de paralelism:

- Două drepte paralele cu a treia sunt paralele între ele.
- Dacă două plane conțin două drepte paralele și se intersectează, atunci dreapta de intersecție este paralelă cu fiecare dintre cele două drepte. Deci, dacă $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, $a \parallel b$ și $\alpha \cap \beta = d$, atunci $d \parallel a$ și $d \parallel b$.

Problemă rezolvată:

Aflați dreapta de intersecție dintre două fețe laterale opuse într-o piramidă patrulateră regulată.

Soluție:

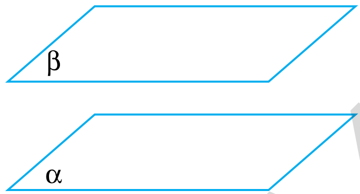


Notăm $(VAB) \cap (VDC) = d$ și cum $V \in (VAB) \cap (VDC) \Rightarrow V \in d$. Din $AB \subset (VAB)$, $DC \subset (VDC)$, $AB \parallel DC$ și $(VAB) \cap (VDC) = d \Rightarrow d \parallel AB$ și $d \parallel DC$. Deci dreapta de intersecție a planelor (VAB) și (VDC) este o dreaptă ce conține punctul V și este paralelă cu AB și cu DC.

I.2.4. Plane paralele

Două plane sunt paralele dacă intersecția lor este mulțimea vidă.

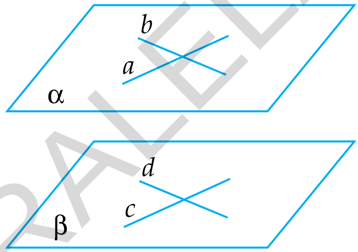
Dacă $\alpha \cap \beta = \varnothing$, atunci $\alpha \parallel \beta$.



Teoreme:

• Două plane sunt paralele dacă două drepte concurente dintr-un plan sunt paralele cu două drepte concurente din celălalt plan.

Dacă $a \parallel c$ și $b \parallel d$, atunci $\alpha \parallel \beta$.

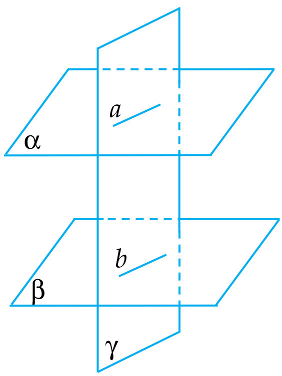


• Două plane sunt paralele dacă două drepte concurente dintr-un plan sunt paralele cu celălalt plan.

$$\text{Dacă } \left.\begin{array}{l} a \subset \alpha,\ a \parallel \beta \\ b \subset \alpha,\ b \parallel \beta \\ a, b \text{ sunt concurente} \end{array}\right] \Rightarrow \alpha \parallel \beta.$$

• Dacă două plane sunt paralele, atunci orice plan care intersectează pe unul din ele, îl intersectează și pe celălalt și dreptele de intersecție sunt paralele.

Dacă $\alpha \parallel \beta$, $\gamma \cap \alpha = a$, $\gamma \cap \beta = b$, atunci $a \parallel b$.



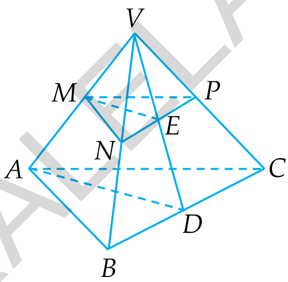
Probleme rezolvate:

1. În piramida triunghiulară $VABC$ notăm cu M, N și P mijloacele muchiilor lui VA, VB, respectiv VC. Fie $D \in BC$ și $VD \cap$ $\cap NP = \{E\}$. Arătați că:

a) $(MNP) \parallel (ABC)$;

b) $ME \parallel AD$.

Soluție:

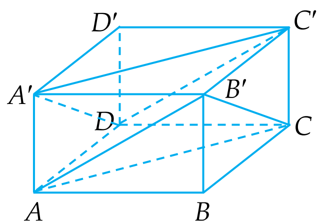


a) Din $VM \equiv MA$ și $VN \equiv NB \Rightarrow$ $\Rightarrow MN$ este linie mijlocie în ΔVAB. Din MN – linie mijlocie în $\Delta VAB \Rightarrow MN \parallel$ $\parallel AB$. Din $VN \equiv NB$ și $VP \equiv PC \Rightarrow NP$ este linie mijlocie în ΔVBC. Din NP – linie mijlocie în $\Delta VBC \Rightarrow NP \parallel BC$. Din $MN \parallel AB$ și $NP \parallel BC \Rightarrow (MNP) \parallel$ $\parallel (ABC)$;

b) Din $(MNP) \parallel (ABC)$, $(VAD) \cap (MNP) = ME$ și $(VAD) \cap$ $\cap (ABC) = AD \Rightarrow ME \parallel AD$.

2. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic. Arătați că $(AB'C) \parallel (A'DC')$.

Soluție:



Din $ABCDA'B'C'D'$ – paralelipiped dreptunghic $\Rightarrow A'B' \parallel DC$ și $A'B' \equiv$ $\equiv DC$. Din $A'B' \parallel DC$ și $A'B' \equiv DC \Rightarrow$ $\Rightarrow A'B'CD$ este paralelogram $\Rightarrow B'C \parallel$ $\parallel A'D$. Din $ABCDA'B'C'D'$ – paralelipiped dreptunghic $\Rightarrow B'C' \parallel AD$ și $B'C' \equiv AD$.

Din $B'C' \parallel AD$ și $B'C' \equiv AD \Rightarrow AB'C'D$ este paralelogram $\Rightarrow$ $\Rightarrow AB' \parallel DC'$. Din $B'C \parallel A'D$ și $AB' \parallel DC' \Rightarrow (AB'C) \parallel (A'DC')$.

I.2.5. SECȚIUNI PARALELE CU BAZA ÎN CORPURILE GEOMETRICE STUDIATE; TRUNCHIUL DE PIRAMIDĂ ȘI TRUNCHIUL DE CON CIRCULAR DREPT

Intersectăm o piramidă triunghiulară $VABC$ cu un plan α paralel cu planul bazei ABC. Fie A', B', C' intersecțiile dintre planul α și muchiile VA, VB, respectiv VC.

Conform teoremei „două plane paralele se intersectează cu al treilea plan după drepte paralele”, se arată că $A'B' \parallel AB$, $B'C' \parallel$ $\parallel BC$ și $C'A' \parallel CA$.

Deci intersecția dintre planul α și piramida $VABC$ este triunghiul $A'B'C'$ asemenea cu triunghiul ABC.

Din acest raționament simplu rezultă și procedeul prin care obținem intersecția dintre un plan α și piramida $VABC$.

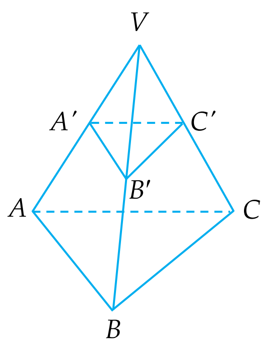
De obicei se precizează poziția punctului A' situat pe muchia VA care este intersecția dintre planul α și piramida $VABC$.

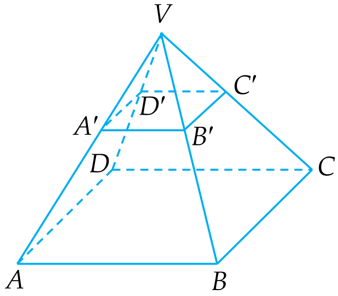
Ducem $A'B' \parallel AB$, $B' \in VB$, $B'C' \parallel BC$, $C' \in VC$ și rezultă $C'A' \parallel CA$.

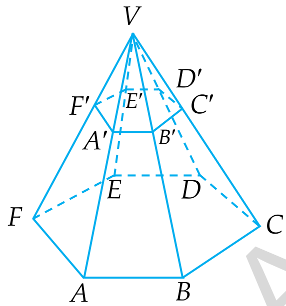
Asemănător se intersectează orice piramidă cu un plan paralel cu baza.

Intersecția dintre plan și piramidă este întotdeauna un poligon asemenea cu poligonul de bază.

Deci intersecția dintre un plan α cu o piramidă triunghiulară regulată este un triunghi echilateral, cu o piramidă patrulateră regulată este un pătrat și cu o piramidă hexagonală este un hexagon regulat.







Observație:

Când secționăm o piramidă cu un plan paralel cu baza rezultă două corpuri: o piramidă mai mică asemenea cu piramida mare și un trunchi de piramidă.

Se numește trunchi de piramidă corpul care rămâne după ce eliminăm piramida mică ce rezultă atunci când secționăm o piramidă cu un plan paralel cu baza.

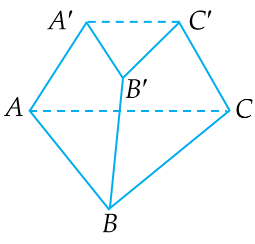
Raportul elementelor corespunzătoare între piramida mică și piramida mare este același.

Deci $\frac{VA'}{VA} = \frac{VB'}{VB} = \frac{VC'}{VC} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$.

La fel este și în cazul piramidelor patrulatere regulate sau hexagonale regulate.

Observație:

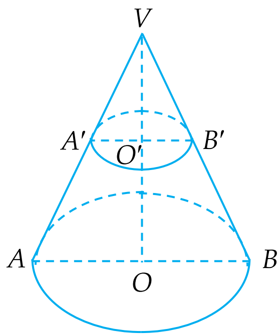
Dacă trebuie să desenăm un trunchi de piramidă, se recomandă să desenăm piramida, apoi o secționăm cu un plan paralel cu baza și eliminăm piramida mică ce se formează.

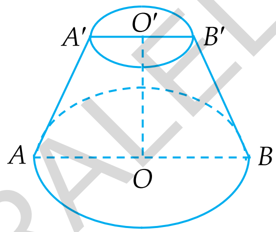


La fel se întâmplă și când secționăm un con circular drept cu un plan paralel cu baza.

Deci când secționăm un con circular drept cu un plan paralel cu baza rezultă un con mic asemenea cu conul mare și un trunchi de con.

Dacă eliminăm conul mic, corpul care rămâne este un trunchi de con.





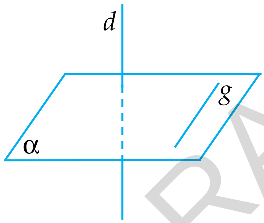
I.3. PERPENDICULARITATE

I.3.1. Dreapta perpendiculară pe un plan

Dreapta perpendiculară pe un plan este dreapta perpendiculară pe orice dreaptă din plan.

Consecință:

Dacă $d \perp \alpha$ și $g \subset \alpha$, atunci $d \perp g$.

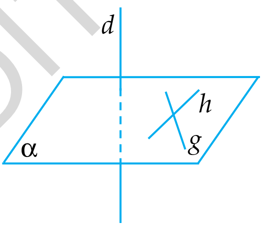


Observații:

1. Dacă $d \perp \alpha$, atunci și $\alpha \perp d$.
2. Dacă $\alpha \perp d$, atunci și $d \perp \alpha$.

Teoremă:

• Dacă o dreaptă este perpendiculară pe două drepte concurente dintr-un plan, atunci ea este perpendiculară pe plan.



Din $d \perp g$ și $d \perp h$, cu $g, h \subset \alpha \Rightarrow d \perp \alpha$.

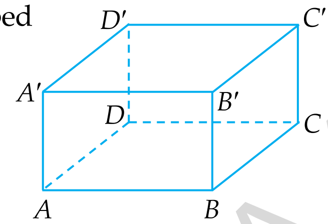
Probleme rezolvate:

1. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic. Arătați că:

a) $A'A \perp (ABD)$;

b) $AB \perp (B'BC)$;

c) $B'C' \perp (D'C'C)$.



Soluție:

a) $\left.\begin{array}{l}\text{Din } ABB'A' - \text{dreptunghi} \Rightarrow A'A \perp AB \\ \text{Din } ADD'A' - \text{dreptunghi} \Rightarrow A'A \perp AD\end{array}\right] \Rightarrow A'A \perp (ABD).$

b) $\left.\begin{array}{l}\text{Din } ABCD - \text{dreptunghi} \Rightarrow AB \perp BC \\ \text{Din } ABB'A' - \text{dreptunghi} \Rightarrow AB \perp BB'\end{array}\right] \Rightarrow AB \perp (B'BC).$

c) $\left.\begin{array}{l}\text{Din } BCC'B' - \text{dreptunghi} \Rightarrow B'C' \perp CC' \\ \text{Din } A'B'C'D' - \text{dreptunghi} \Rightarrow B'C' \perp D'C'\end{array}\right] \Rightarrow B'C' \perp (D'C'C).$

Concluzie:

Problema 1 arată că în paralelipipedul dreptunghic și în cub fiecare muchie este perpendiculară pe planele (fețele) care le intersectează.

2. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub. Arătați că:

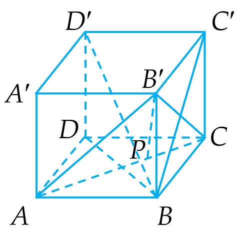
a) $D'B \perp AC$;

b) $D'B \perp (AB'C)$;

c) $D'B \perp B'P$, unde $P \in AC$.

Soluție:

a) Din $ABCD$ – pătrat $\Rightarrow AC \perp DB$. Din $ABCDA'B'C'D'$ – cub $\Rightarrow D'D \perp (ABC)$ și cum $AC \subset (ABC) \Rightarrow D'D \perp AC \Rightarrow AC \perp D'D$. Din $AC \perp DB$ și $AC \perp D'D \Rightarrow AC \perp (D'DB)$ și cum $D'B \subset (D'DB) \Rightarrow AC \perp D'B \Rightarrow D'B \perp AC$;



b) Din $BCC'B'$ – pătrat $\Rightarrow B'C \perp BC'$. Din $ABCDA'B'C'D'$ – cub $\Rightarrow D'C' \perp (B'C'C)$ și cum $B'C \subset (B'C'C) \Rightarrow D'C' \perp B'C \Rightarrow B'C \perp$ $\perp D'C'$. Din $B'C \perp BC'$ și $B'C \perp D'C' \Rightarrow B'C \perp (BC'D')$ și cum $D'B \subset$ $\subset (BC'D') \Rightarrow B'C \perp D'B \Rightarrow D'B \perp B'C$. Din $D'B \perp AC$ și $D'B \perp B'C \Rightarrow$ $\Rightarrow D'B \perp (AB'C)$;

c) Din $D'B \perp (AB'C)$ și $B'P \subset (AB'C) \Rightarrow D'B \perp B'P$.

Alte teoreme:

- Două drepte perpendiculare pe același plan sunt paralele.
- Două plane perpendiculare pe aceeași dreaptă sunt paralele.

Consecințe:

În paralelipipedul dreptunghic și în cub muchiile perpendiculare pe aceeași față sunt paralele.

În paralelipipedul dreptunghic și în cub fețele perpendiculare pe aceeași muchie sunt paralele.

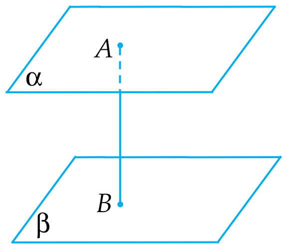
Observație:

Pentru a arăta că două drepte necoplanare sunt perpendiculare, arătăm de multe ori că una dintre ele este perpendiculară pe un plan care conține cealaltă dreaptă. În problema 2, la punctul a), pentru a arăta că $D'B \perp AC$, am demonstrat că $AC \perp$ $\perp (D'DB)$ și am folosit faptul că $D'B \subset (D'DB)$, de unde a rezultat că $AC \perp D'B$ și apoi că $D'B \perp AC$.

I.3.2. DISTANȚA DINTRE DOUĂ PLANE PARALELE, ÎNĂLȚIMEA UNEI PRISME DREPTE, A PARALELIPIPEDULUI DREPTUNGHIC

DISTANȚA DINTRE DOUĂ PLANE PARALELE este egală cu lungimea perpendicularei duse dintr-un punct al unui plan pe celălalt plan.

$$\left.\begin{array}{l}\alpha \parallel \beta\\ A \in \alpha\\ AB \perp \beta\\ B \in \beta\end{array}\right| \Rightarrow \mathrm{d}(\alpha,\ \beta) = AB$$



Observație:

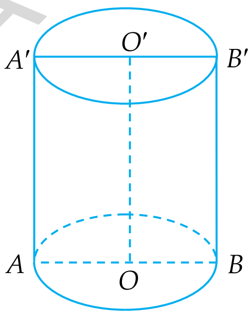
Din $AB \perp \beta$ și $\alpha \parallel \beta \Rightarrow AB \perp \alpha$.

Deci perpendiculara dusă dintr-un punct al unui plan pe celălalt plan este perpendiculară pe fiecare dintre cele două plane paralele.

Înălțimea unei prisme drepte și înălțimea unui paralelipiped dreptunghic este muchia laterală.

I.3.3. ÎNĂLȚIMEA UNUI CILINDRU CIRCULAR DREPT

În cilindrul circular drept înălțimea este OO', unde O și O' sunt centrele celor două baze.



Avem $OO' = h$, unde h este înălțimea cilindrului).

$AA' = BB' = OO'$.

Deci $h = G$.

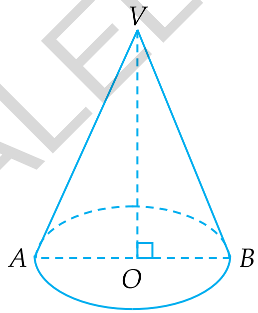
I.3.4. ÎNĂLȚIMEA UNUI CON CIRCULAR DREPT

ÎNĂLȚIMEA UNUI CON CIRCULAR DREPT este perpendiculara din vârful conului pe planul bazei.

Dacă V este vârful conului circular drept și O centrul cercului de bază, atunci segmentul VO este perpendicular pe planul bazei.

Deci, în conul circular drept cu vârful V și O centrul bazei, înălțimea este VO.

În ΔVOB avem $\sphericalangle VOB = 90°$, deci $VB^2 = VO^2 + OB^2$.



$VB = G$ (G – generatoare);

$VO = h$ (h – înălțime);

$OB = R$ (R – rază).

Deci, în conul circular drept avem relația $G^2 = h^2 + R^2$.

Problemă rezolvată:

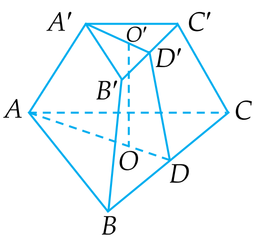
Dacă $h = 8$ cm, $R = 6$ cm, atunci G = ... cm.

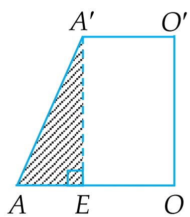
Soluție:

$G^2 = h^2 + R^2 \Rightarrow G^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow G^2 = 64 + 36 = 100 \Rightarrow G = 10$ cm.

I.3.5. ÎNĂLȚIMEA TRUNCHIULUI DE PIRAMIDĂ REGULATĂ

În trunchiul de piramidă regulată înălțimea este OO', unde O și O' reprezintă centrele celor două baze.



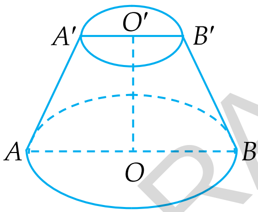


În $\Delta A'EA$ avem $\sphericalangle A'EA = 90° \Rightarrow AA'^2 = A'E^2 + AE^2$ și $AE = AO - EO = AO - A'O'$, $A'E = OO'$. Deci $AA' = OO'^2 + (AO - A'O')^2$.

Asemănător este și la celelalte trunchiuri de piramidă regulată.

I.3.6. Înălțimea trunchiului de con circular drept

În trunchiul de con circular drept înălțimea este OO', unde O și O' reprezintă centrele cercurilor care sunt bazele trunchiului de con.



Într-un trunchi de con circular drept avem:

$OO' = h$, unde h este înălțimea;

$AA' = BB' = G$, unde G este generatoarea;

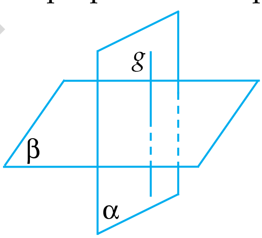
$OA = OB = R$, unde R este raza bazei mari;

$O'A' = O'B' = r$, unde r este raza bazei mici;

$G^2 = h^2 + (R - r)^2$.

I.3.7. Plane perpendiculare

Două plane sunt perpendiculare dacă o dreaptă dintr-un plan este perpendiculară pe celălalt plan.



Din $g \subset \alpha$ și $g \perp \beta \Rightarrow \alpha \perp \beta$.

Teoreme:

• Două plane sunt perpendiculare dacă și numai dacă măsura unghiului format este 90°.

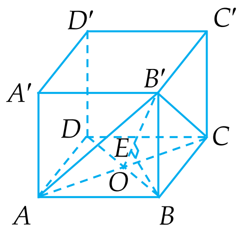
• Dacă $\alpha \perp \beta$, atunci $\beta \perp \alpha$.

• Dacă două plane sunt perpendiculare, atunci perpendiculara dusă dintr-un punct al unui plan pe dreapta lor de intersecție este perpendiculară pe celălalt plan.

• Dacă planul α este perpendicular pe planul β, atunci perpendiculara dusă dintr-un punct al planului α pe planul β este inclusă în planul α.

Consecință:

Într-un paralelipiped dreptunghic sau într-un cub orice față laterală este perpendiculară pe planul bazelor.



Problemă rezolvată:

Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub, cu $AB = 6$ cm.

a) Arătați că $(AB'C) \perp (B'BD)$.

b) Aflați distanța de la B la $(AB'C)$.

Soluție:

a) Din $ABCDA'B'C'D'$ – cub $\Rightarrow B'B \perp (ABC)$ și $AC \subset (ABC) \Rightarrow$ $\Rightarrow B'B \perp AC \Rightarrow AC \perp B'B$. Din $ABCD$ – pătrat $\Rightarrow AC \perp BD$. Din $AC \perp B'B$ și $AC \perp BD \Rightarrow AC \perp (B'BD)$ și cum $AC \subset (AB'C) \Rightarrow$ $\Rightarrow (AB'C) \perp (B'BD)$;

b) Ducem $BE \perp B'O$ (înălțimea din B în $\Delta B'BO$. Din $(AB'C) \perp$ $\perp (B'BD) \Rightarrow (B'BD) \perp (AB'C)$. Din $(B'BD) \perp (AB'C)$, $(B'BD) \cap$ $\cap (AB'C) = B'O$ și $BE \perp B'O \Rightarrow BE \perp (AB'C) \Rightarrow d(B, (AB'C)) = BE$. Din $BB' \perp (ABC)$ și $BO \subset (ABC) \Rightarrow BB' \perp BO \Rightarrow \measuredangle B'BO = 90° \Rightarrow$ $\Rightarrow B'O^2 = B'B^2 + BO^2 \Rightarrow B'O^2 = 36 + 18 = 54 \Rightarrow B'O = 3\sqrt{6}$ cm.

Din $\sphericalangle B'BO = 90^\circ$ și $BE \perp B'O \Rightarrow BE = \dfrac{B'B \cdot BO}{B'O} = \dfrac{6 \cdot \cancel{3\sqrt{2}}}{\cancel{3\sqrt{6}}_{\sqrt{3}}} =$

$= \dfrac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$ cm. Deci d(B, $(AB'C)$) = $2\sqrt{3}$ cm.

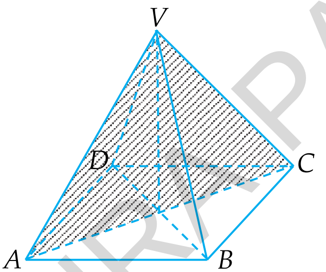
Observație:

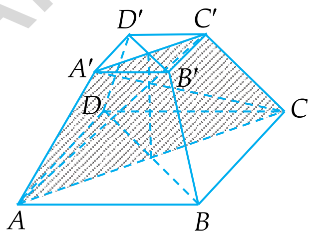
Am rezolvat punctul b) folosind teoremele despre plane perpendiculare.

I.3.8. Aplicații: secțiuni diagonale, secțiuni axiale în corpurile studiate

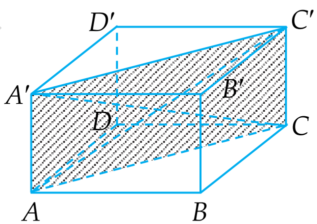
Secțiuni diagonale mai importante sunt:

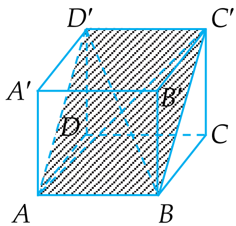
- (VAC) sau (VBD) în piramida patrulateră regulată $VABCD$;
- $(ACC'A')$ sau $(BDD'B')$ în trunchiul de piramidă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$;





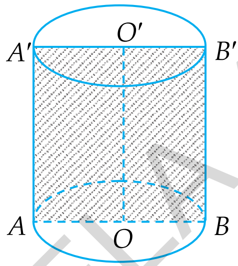
- $(ACC'A')$ sau $(BDD'B')$ sau $(ABC'D')$ sau $(BCD'A')$ sau $(CDA'B')$ sau $(DAB'C')$ în paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ sau în cubul $ABCDA'B'C'D'$.



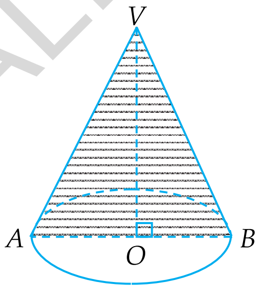


Secțiuni axiale sunt și în cilindrul circular drept, în conul circular drept și în trunchiul de con circular drept.

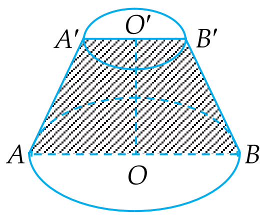
În cilindrul circular drept, secțiune axială este dreptunghiul $(ABB'A')$.



În conul circular drept, secțiune axială este triunghiul isoscel VAB.



În trunchiul de con circular drept, secțiune axială este trapezul isoscel $ABB'A'$.



I.4. PROIECȚII DE PUNCTE, DE SEGMENTE ȘI DE DREPTE PE UN PLAN

I.4.1. Proiecții de puncte, de segmente și de drepte pe un plan

1. Dacă punctul este exterior planului, proiecția lui pe plan este piciorul perpendicularei din acel punct pe acel plan.

Dacă $A \notin \alpha$, atunci $pr_\alpha A = B$, $AB \perp \alpha$, $B \in \alpha$.

2. Dacă punctul aparține planului, atunci proiecția lui pe plan este chiar punctul respectiv.

Dacă $C \in \alpha$, atunci $pr_\alpha C = C$ (figura 1).

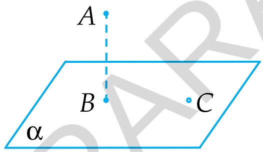


Fig. 1

Proiecția unui segment pe un plan se obține proiectând extremitățile segmentului pe acel plan.

Proiecția unui segment pe un plan este segmentul determinat de proiecțiile extremităților pe acel plan.

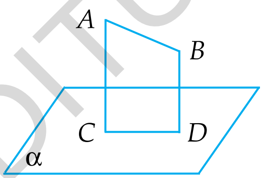


Fig. 2

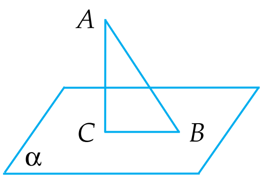


Fig. 3

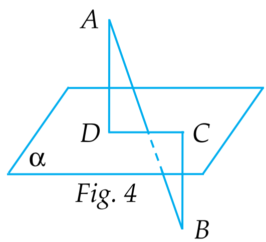


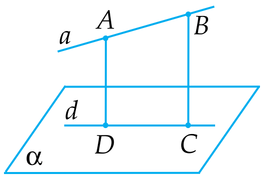
Fig. 4

În figura 2, $pr_\alpha AB = CD$, unde $C = pr_\alpha A$ și $D = pr_\alpha B$.

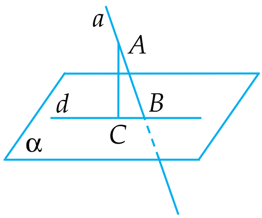
În figura 3, $pr_\alpha\, AB = CB$, unde $pr_\alpha\, B = B$ și $pr_\alpha\, A = C$.

În figura 4, $pr_\alpha\, AB = DC$, unde $pr_\alpha\, A = D$ și $pr_\alpha\, B = C$.

Proiecția unei drepte pe un plan se obține proiectând două puncte distincte care aparțin dreptei pe acel plan. Proiecția dreptei pe plan este dreapta determinată de proiecțiile celor două puncte pe plan.



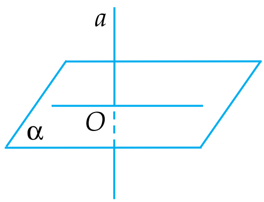
$pr_\alpha\, a = d$, unde $pr_\alpha\, A = D$, $pr_\alpha\, B = C$.



Dacă $a \cap \alpha = \{B\}$, atunci $pr_\alpha\, a = d$, unde $pr_\alpha\, A = C$ și $pr_\alpha\, B = B$.

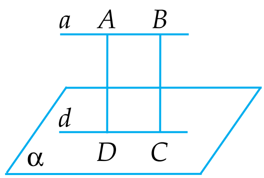
Observații:

1. Dacă dreapta este perpendiculară pe plan, proiecția dreptei pe acel plan este punctul în care dreapta intersectează planul.



Dacă $a \perp \alpha$, atunci $pr_\alpha\, a = O$, unde $O = a \cap \alpha$.

2. Dacă dreapta este paralelă cu planul, atunci proiecția dreptei pe acel plan este o dreaptă paralelă cu ea.



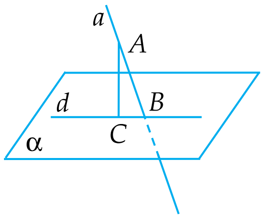
Dacă $a \parallel \alpha$, atunci $pr_\alpha\, a = d$, unde $d \parallel a$.

I.4.2. Unghiul dintre o dreaptă și un plan: lungimea proiecției unui segment pe un plan

Dacă dreapta este perpendiculară pe plan, atunci unghiul format de dreaptă cu acel plan este de 90°.

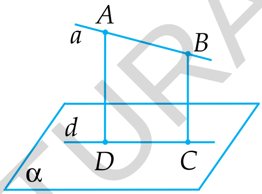
Dacă dreapta este paralelă cu planul, atunci unghiul format de dreaptă cu acel plan este de 0°.

Dacă dreapta nu este perpendiculară pe plan și nu este paralelă cu planul, atunci unghiul format de dreaptă cu planul este unghiul format de dreaptă cu proiecția ei pe plan.



Dacă $pr_{\alpha}\, a = d$, atunci $\sphericalangle(a, \alpha) = \sphericalangle ABC$.

Lungimea proiecției unui segment pe un plan este egală cu produsul dintre lungimea segmentului și cosinusul unghiului format de dreapta care include segmentul, cu acel plan.



Dacă $pr_{\alpha}\, a = d$, atunci $DC = AB \cdot \cos(\sphericalangle(a, \alpha))$, unde $DC = pr_{\alpha}\, AB$.

Este bine de știut: $\cos 0° = 1$ și $\cos 90° = 0$.

Problemă rezolvată:

Fie segmentul CD proiecția segmentului AB pe planul α. Aflați:

a) CD dacă $AB = 6\sqrt{3}$ cm și $\sphericalangle(AB, \alpha) = 30°$;

b) AB dacă $CD = 8\sqrt{2}$ cm și $\sphericalangle(AB, \alpha) = 45°$;
c) $\sphericalangle(AB, \alpha)$ dacă $CD = 3$ cm și $AB = 6$ cm.

Soluție:

De fiecare dată folosim formula $CD = AB \cdot \cos(\sphericalangle(AB, \alpha))$.

a) $CD = AB \cdot \cos(\sphericalangle(AB, \alpha)) = 6\sqrt{3} \cdot \cos 30° = 6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{18}{2} =$
$= 9$ cm;

b) $AB = \frac{CD}{\cos(\sphericalangle(AB,\alpha))} = \frac{8\sqrt{2}}{\cos 45°} = \frac{8\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{8\sqrt{2} \cdot 2}{\sqrt{2}} = 16$ cm;

c) $\cos(\sphericalangle(AB, \alpha)) = \frac{CD}{AB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sphericalangle(AB, \alpha) = 60°$.

I.4.3. UNGHI DIEDRU, UNGHI PLAN CORESPUNZĂTOR DIEDRULUI

Se numește unghi diedru sau diedru figura geometrică formată din două semiplane mărginite de aceeași dreaptă (figura 1).

Dreapta care mărginește cele două semiplane se numește muchia diedrului (d în figura 1).

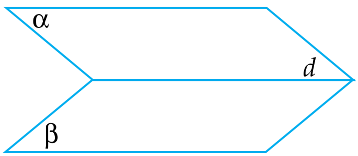


Fig. 1

Unghiul plan corespunzător unui unghi diedru este unghiul format de două semidrepte cu originea comună, conținute, în cele două semiplane, care sunt perpendiculare pe muchia diedrului.

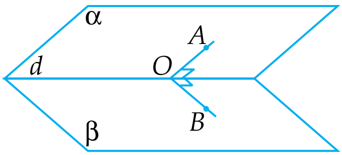


Fig. 2

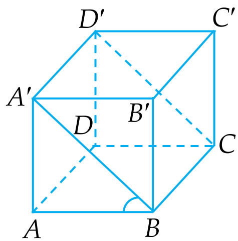
Unghiul plan corespunzător unghiului diedru format de semiplanele α și β mărginite de dreapta d (figura 2) este $\sphericalangle AOB$.

Problemă rezolvată:

Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$. Arătați că unghiul diedru format de semiplanele (A, BC) și (A', BC) este de 45°.

Soluție:

Dreapta de intersecție este BC, iar BA, respectiv BA', sunt semidreptele cu originea comună B, situată pe BC, incluse în cele două semiplane, care sunt perpendiculare pe BC (rezultă ușor, deoarece muchia BC este perpendiculară pe planul (ABA')). Deci, unghiul plan corespunzător diedrului este $\sphericalangle ABA'$, care are 45°, deoarece $ABB'A$ este pătrat.



I.4.4. UNGHIUL A DOUĂ PLANE; PLANE PERPENDICULARE

UNGHIUL A DOUĂ PLANE este unghiul format de două perpendiculare duse respectiv pe cele două plane.

Dacă $a \perp \alpha$ și $b \perp \beta \Rightarrow \sphericalangle(\alpha, \beta) = \sphericalangle(a, b)$.

Teorema 1:

• Unghiul a două plane este egal cu unghiul mai mic sau egal cu 90°, format de două perpendiculare în același punct pe dreapta lor de intersecție conținute, respectiv, în cele două plane.

Teorema 2:

• Două plane sunt perpendiculare dacă și numai dacă formează un unghi de 90°.

1. Dacă $\sphericalangle(\alpha, \beta) = 90° \Rightarrow \alpha \perp \beta$.

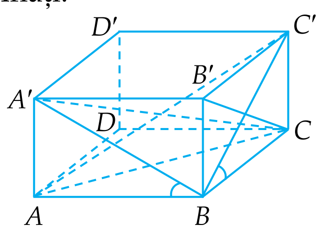
2. Dacă $\alpha \perp \beta \Rightarrow \sphericalangle(\alpha, \beta) = 90°$.

Probleme rezolvate:

1. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic în care $AB = 16$ cm, $BC = 5$ cm și $AA' = 12$ cm. Aflați:

a) $\sin(\sphericalangle((ABC), (A'BC)))$;

b) $\cos(\sphericalangle((ABC), (A'BC)))$.



Soluție:

Din $BC \perp (ABB')$ și $A'B \subset (ABB') \Rightarrow$ $\Rightarrow BC \perp AB'$.

Din $BC \perp AB' \Rightarrow AB' \perp BC$. Din $ABCD$ – dreptunghi $\Rightarrow AB \perp$ $\perp BC$.

Din $(ABC) \cap (A'BC) = BC$, $AB \perp BC$ și $A'B \perp BC \Rightarrow$ $\Rightarrow \sphericalangle((ABC), (A'BC)) = \sphericalangle ABA'$.

Cum $\sphericalangle A'AB = 90° \Rightarrow A'B^2 = AB^2 + A'A^2 \Rightarrow A'B^2 = 256 + 144 =$ $= 400 \Rightarrow A'B = 20$ cm.

Cum $\sphericalangle A'AB = 90° \Rightarrow \sin(\sphericalangle ABA') = \dfrac{AA'}{A'B} = \dfrac{12}{20} = \dfrac{3}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin(\sphericalangle((ABC), (A'BC))) = \dfrac{3}{5}$;

b) Din $AB \perp (BCC')$ și $C'B \subset (BCC') \Rightarrow AB \perp C'B \Rightarrow C'B \perp AB$.

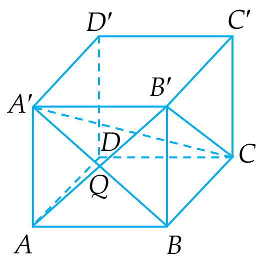
Din $AB \perp BC \Rightarrow CB \perp AB$.

Din $(ABC) \cap (ABC') = AB$, $CB \perp AB$ și $C'B \perp AB \Rightarrow$
$\Rightarrow \sphericalangle((ABC), (ABC')) = \sphericalangle CBC'$.

Cum $\sphericalangle C'CB = 90° \Rightarrow BC'^2 = BC^2 + CC'^2 \Rightarrow BC'^2 = 25 + 144 =$
$= 169 \Rightarrow BC' = 13$ cm. Cum $\sphericalangle C'CB = 90° \Rightarrow \cos(\sphericalangle CBC') = \dfrac{BC}{BC'} =$
$= \dfrac{5}{13} \Rightarrow \cos(\sphericalangle((ABC), (ABC'))) = \dfrac{5}{13}$.

2. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$. Arătați că: $(A'BC) \perp (B'AD)$.

Soluție:



Din $ABB'A'$ – pătrat $\Rightarrow AB' \perp A'B$; $AB' \cap A'B = \{Q\}$.

Din $BC \perp (ABB')$ și $AB' \subset (ABB') \Rightarrow$
$\Rightarrow BC \perp AB' \Rightarrow AB' \perp BC$.

Din $AD \perp (A'AB)$ și $A'B \subset (A'AB) \Rightarrow$
$\Rightarrow AD \perp A'B \Rightarrow A'B \perp AD$.

Din $AB' \perp A'B$ și $AB' \perp BC \Rightarrow AB' \perp (A'BC)$.

Din $A'B \perp AB'$ și $A'B \perp AD \Rightarrow A'B \perp (B'AD)$.

Din $AB' \perp (A'BC)$ și $A'B \perp (B'AD) \Rightarrow \sphericalangle((A'BC), (B'AD)) =$
$= \sphericalangle(AB', A'B)$.

Cum $ABB'A'$ – pătrat $\Rightarrow AB' \perp A'B \Rightarrow \sphericalangle(AB', A'B) = 90°$.

Cum $\sphericalangle(AB', A'B) = 90° \Rightarrow \sphericalangle((A'BC), (B'AD)) = 90° \Rightarrow (A'BC) \perp$
$\perp (B'AD)$.

I.5. TEOREMA CELOR TREI PERPENDICULARE

I.5.1. Teorema celor trei perpendiculare

Enunț:

Ipoteză:

1. Dacă dintr-un punct exterior unui plan ducem perpendiculara pe plan (figura 1)

2. Iar din piciorul ei ducem perpendiculara pe o dreaptă din plan (figura 2)

Concluzie:

3. Atunci dreapta care unește punctul exterior cu piciorul celei de a doua perpendiculare este perpendiculară pe dreapta din plan (figura 3).

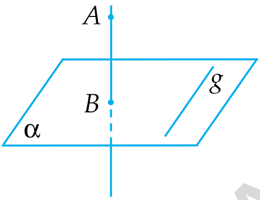


Fig. 1

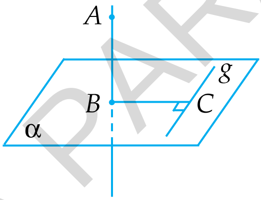


Fig. 2

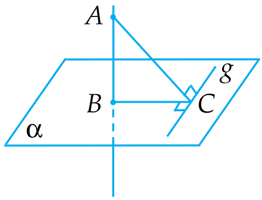


Fig. 3

Teorema celor trei perpendiculare scrisă cu ajutorul notațiilor din figura 3 arată astfel:

Ipoteză:

$AB \perp \alpha$

$BC \perp g$

$BC, g \subset \alpha$

Concluzie:

$AC \perp g$

Demonstrație:

Din $AB \perp \alpha$ și $g \subset \alpha \Rightarrow AB \perp g \Rightarrow g \perp AB$.

Din $BC \perp g \Rightarrow g \perp BC$.

Din $g \perp AB$ și $g \perp BC \Rightarrow g \perp (ABC)$.

Din $g \perp (ABC)$ și $AC \subset (ABC) \Rightarrow g \perp AC \Rightarrow AC \perp g$.

Domenii de utilizare:

1. Pentru determinarea distanței de la un punct la o dreaptă.

2. Pentru determinarea unghiului plan corespunzător unui diedru.

3. În diverse probleme de perpendicularitate.

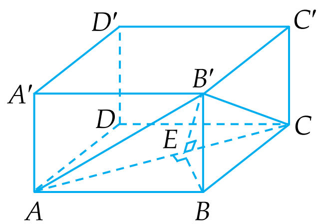
Probleme rezolvate (exemple):

1. În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ avem $AB = 20$ cm, $BC = 15$ cm și $AA' = 12\sqrt{3}$ cm. Aflați:

a) distanța de la B' la AC;

b) măsura unghiului format de planele (ABC) și $(AB'C)$.

Soluție:



a) Ducem $BE \perp AC$ (unde BE este înălțimea corespunzătoare ipotenuzei în ΔABC dreptunghic.

Din $B'E \perp (ABC)$, $BE \perp AC$ și BE, $AC \subset (ABC) \overset{T3\perp}{\Rightarrow} B'E \perp AC \Rightarrow d(B', AC) = B'E$.

Din $B'B \perp (ABC)$ și $BE \subset (ABC) \Rightarrow B'B \perp BE \Rightarrow \sphericalangle B'BE = 90°$.

Din $\sphericalangle ABC = 90° \Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC^2 = 400 + 225 = 625 \Rightarrow AC = 25$ cm.

Din $\sphericalangle ABC = 90°$ și $BE \perp AC \Rightarrow BE = \dfrac{AB \cdot BC}{AC} = \dfrac{20 \cdot 15}{25} = 12$ cm.

Din $\sphericalangle B'BE = 90° \Rightarrow B'E^2 = BE^2 + B'B^2 \Rightarrow B'E^2 = 144 + 432 = 576 \Rightarrow B'E = 24$ cm $\Rightarrow d(B', AC) = 24$ cm;

b) Din $(ABC) \cap (AB'C) = AC$, $BE \perp AC$, $BE \subset (ABC)$, $B'E \perp$ $\perp AC$ și $B'E \subset (AB'C) \Rightarrow \sphericalangle((ABC), (AB'C)) = \sphericalangle B'EB$.

Din $\sphericalangle B'BE = 90° \Rightarrow \cos(\sphericalangle B'EB) = \dfrac{12}{24} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \sphericalangle B'EB = 60°$. Deci $\sphericalangle((ABC), (AB'C)) = 60°$.

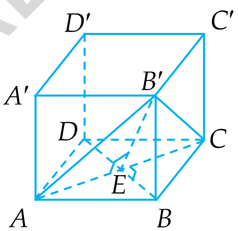
2. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ avem $AB = 6\sqrt{2}$ cm. Aflați:

a) distanța de la B' la AC;

b) tangenta unghiului format de planele (ABC) și $(AB'C)$.

Soluție:

a) Din $ABCD$ – pătrat $\Rightarrow BD \perp AC \Rightarrow BE \perp AC$, unde $AC \cap$ $\cap BD = \{E\}$.



Din $B'B \perp (ABC)$, $BE \perp AC$ și $BE, AC \subset$ $\subset (ABC) \overset{T3\perp}{\Rightarrow} B'E \perp AC \Rightarrow \mathrm{d}(B', AC) = B'E$.

Din $B'B \perp (ABC)$ și $BE \subset (ABC) \Rightarrow B'B \perp$ $\perp BE \Rightarrow \sphericalangle B'BE = 90°$.

Din $ABCD$ – pătrat $\Rightarrow AC = BD =$ $= AB\sqrt{2} = 12$ cm $\Rightarrow BE = 6$ cm.

Din $\sphericalangle B'BE = 90° \Rightarrow B'E^2 = BE^2 + B'B^2 \Rightarrow B'E^2 = 36 + 72 = 108 \Rightarrow$ $\Rightarrow B'E = 6\sqrt{3}$ cm $\Rightarrow \mathrm{d}(B', AC) = 6\sqrt{3}$ cm;

b) Din $(ABC) \cap (AB'C) = AC$, $BE \perp AC$, $BE \subset (ABC)$, $B'E \perp$ $\perp AC$ și $B'E \subset (AB'C) \Rightarrow \sphericalangle((ABC), (AB'C)) = \sphericalangle B'EB$.

Din $\sphericalangle B'BE = 90° \Rightarrow \mathrm{tg}(\sphericalangle B'EB) = \dfrac{B'B}{BE} = \dfrac{6\sqrt{2}}{6} = \sqrt{2}$. Deci $\mathrm{tg}(\sphericalangle B'EB) = \sqrt{2}$.

Pentru punctul a) este interesantă și următoarea rezolvare:

Din $ABCD$ – pătrat $\Rightarrow AC = AB\sqrt{2} = 12$ cm.

Din $ABCDA'B'C'D'$ – cub și $AC = B'A = B'C = 12$ cm $\Rightarrow \Delta AB'C$ este echilateral.

Din $ABCD$ – pătrat și $AC \cap BD = \{E\} \Rightarrow EA \equiv EC$.

Din $AB'C$ – triunghi echilateral și $EA \equiv EC \Rightarrow B'E \perp AC \Rightarrow$
$\Rightarrow$ d$(B', AC) = B'E$. Din $AB'C$ – triunghi echilateral și $B'E \perp AC \Rightarrow$
$\Rightarrow B'E = \dfrac{AC\sqrt{3}}{2} = \dfrac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ cm. Deci d$(B', AC) = 6\sqrt{3}$ cm.

I.5.2. Reciproca 1 a teoremei celor trei perpendiculare

Enunț:

Ipoteză:

1. Dacă dintr-un punct exterior unui plan ducem perpendiculara pe plan (figura 1)

2. Iar din acel punct ducem perpendiculara pe o dreaptă din plan (figura 2)

Concluzie:

3. Atunci dreapta care unește piciorul perpendicularei pe plan cu piciorul perpendicularei pe dreapta din plan este perpendiculară pe dreapta din plan (figura 3).

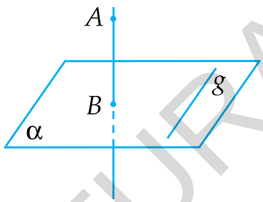


Fig. 1

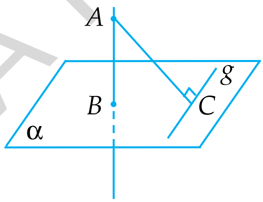


Fig. 2

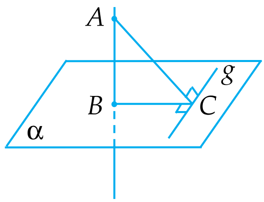


Fig. 3

Reciproca 1 a teoremei celor trei perpendiculare scrisă cu ajutorul notațiilor din figura 3 arată astfel:

Ipoteză:

$AB \perp \alpha$

$AC \perp g$

$g \subset \alpha$, $B \in \alpha$

Concluzie:

$BC \perp g$

Demonstrație:

Din $AB \perp \alpha$ și $g \subset \alpha \Rightarrow AB \perp g \Rightarrow g \perp AB$.
Din $AC \perp g \Rightarrow g \perp AC$.
Din $g \perp AB$ și $g \perp AC \Rightarrow g \perp (ABC)$.
Din $g \perp (ABC)$ și $BC \subset (ABC) \Rightarrow g \perp BC \Rightarrow BC \perp g$.

Se utilizează în diverse probleme de perpendicularitate.

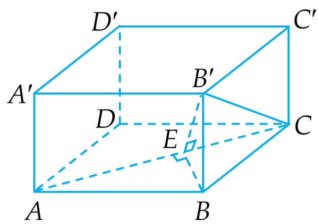
Problemă rezolvată:

În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ avem $AB = 20$ cm, $BC = 15$ cm, $AA' = 12\sqrt{3}$ cm. Aflați distanța de la B' la AC.

Soluție:

Ducem $B'E \perp AC$, $E \in AC \Rightarrow d(B', AC) = B'E$.

Din $B'B \perp (ABC)$, $B'E \perp AC$ și BE, $AC \subset (ABC) \overset{R_1T3\perp}{\Rightarrow} BE \perp AC$.



Din $\sphericalangle ABC = 90° \Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC^2 = 400 + 225 = 625 \Rightarrow AC = 25$ cm.

Din $\sphericalangle ABC = 90°$ și $BE \perp AC \Rightarrow BE = \dfrac{AB \cdot BC}{AC} = \dfrac{20 \cdot 15}{25} = 12$ cm.

Din $B'B \perp (ABC)$ și $BE \subset (ABC) \Rightarrow B'B \perp BE \Rightarrow \sphericalangle B'BE = 90°$.

Din $\sphericalangle B'BE = 90° \Rightarrow B'E^2 = B'B^2 + BE^2 \Rightarrow B'E^2 = 432 + 144 = 576$.

Deci $B'E = 24$ cm.

I.5.3. Reciproca 2 a teoremei celor trei perpendiculare

Enunț:

Ipoteză:

1. Dacă două drepte sunt perpendiculare într-un plan (figura 1)

2. Iar un punct este exterior planului, astfel încât dreapta determinată de punctul exterior și punctul de intersecție a celor două drepte perpendiculare este perpendiculară pe una din ele (figura 2)

Concluzie:

3. Atunci perpendiculara dusă din punctul exterior pe cealaltă dreaptă din plan este perpendiculară pe planul care conține cele două drepte perpendiculare (figura 3).

Fig. 1

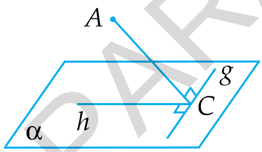


Fig. 2

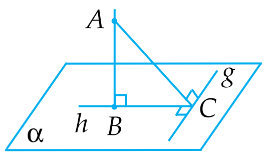


Fig. 3

Reciproca 2 a teoremei celor trei perpendiculare, scrisă cu ajutorul notațiilor din figura 3, arată astfel:

Ipoteză:

$BC \perp g;\ BC,\ g \subset \alpha$

$AC \perp g$

$AB \perp BC$

Concluzie:

$AB \perp \alpha$

Demonstrație:

Din $\left.\begin{array}{l} BC \perp g \Rightarrow g \perp BC \\ AC \perp g \Rightarrow g \perp AC \end{array}\right] \Rightarrow g \perp (ABC)$.

Din $g \perp (ABC)$ și $AB \subset (ABC) \Rightarrow g \perp AB \Rightarrow AB \perp g$.
Din $AB \perp BC$, $AB \perp g$ și $BC, g \subset \alpha \Rightarrow AB \perp \alpha$.

Reciproca 2 a teoremei celor trei perpendiculare se utilizează în general pentru aflarea distanței de la un punct la un plan.

Pentru aflarea distanței de la un punct la un plan trebuie să determinăm lungimea perpendicularei din acel punct pe acel plan.

Pentru a afla perpendiculara dintr-un punct pe un plan este necesar să găsim două drepte perpendiculare incluse în plan, astfel încât dreapta determinată de acel punct și punctul de intersecție a dreptelor perpendiculare să fie perpendiculară pe una dintre ele.

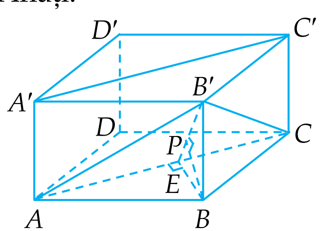
În final ducem perpendiculara din acel punct pe cealaltă dreaptă din plan și obținem perpendiculara din punct pe acel plan.

Problemă rezolvată:

În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ avem $AB = 20$ cm, $BC = 15$ cm și $AA' = 12\sqrt{3}$ cm. Aflați:

a) distanța de la B la (ACC');

b) distanța de la B la $(AB'C)$.



Soluție:

a) Din $BCC'B'$ – dreptunghi $\Rightarrow \sphericalangle BCC' = 90° \Rightarrow BC \perp CC'$.

Din $CC' \perp (ABC)$ și $AC \subset (ABC) \Rightarrow CC' \perp AC \Rightarrow AC \perp CC'$.

Ducem $BE \perp AC$, $E \in AC$.

Din $AC \perp CC'$; $AC, CC' \subset (ACC')$, $BC \perp CC'$ și $BE \perp AC \overset{R_2T3\perp}{\Rightarrow}$ $\overset{R_2T3\perp}{\Rightarrow} BE \perp (ACC')$.

Din $BE \perp (ACC') \Rightarrow d(B, (ACC')) = BE$.

Din $\sphericalangle ABC = 90° \Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC^2 = 400 + 225 = 625 \Rightarrow$ $\Rightarrow AC = 25$ cm.

Din $\sphericalangle ABC = 90°$ și $BE \perp AC \Rightarrow BE = \dfrac{AB \cdot AC}{BC} = \dfrac{20 \cdot 15}{25} = 12$ cm.

Deci, $d(B, (ACC')) = 12$ cm.

Din $B'B \perp (ABC)$, $BE \perp AC$ și $BE, AC \subset (ABC) \overset{T3\perp}{\Rightarrow} B'E \perp AC$.

Ducem $BP \perp B'E$, $P \in B'E$.

Din $B'E \perp AC$, $BE \perp AC$, $B'E, AC \subset (AB'C)$ și $BP \perp B'E \overset{R_2T3\perp}{\Rightarrow} BP \perp$ $\perp (AB'C)$.

Din $BP \perp (AB'C) \Rightarrow d(B, (AB'C)) = BP$.

Din $B'B \perp (ABC)$ și $BE \subset (ABC) \Rightarrow B'B \perp BE \Rightarrow \sphericalangle B'BE = 90°$.

Din $\sphericalangle B'BE = 90° \Rightarrow B'E^2 = BE^2 + B'B^2 \Rightarrow B'E^2 = 144 + 432 =$ $= 576$. Deci $B'E = 24$ cm.

Din $\sphericalangle B'BE = 90°$ și $BP \perp B'E \Rightarrow BP = \dfrac{B'B \cdot BE}{B'E} = \dfrac{12\sqrt{3} \cdot 12}{24} =$ $= 6\sqrt{3}$ cm $\Rightarrow d(B, (AB'C)) = 6\sqrt{3}$ cm.

I.5.4. Calculul distanței de la un punct la o dreaptă, calculul distanței de la un punct la un plan, calculul distanței dintre două plane paralele

Distanța dintre două plane paralele este egală cu distanța de la un punct care aparține unui plan la celălalt plan.

Problemă rezolvată:

Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub, cu $AB = 6$ cm.

a) Arătați că $(AB'C) \parallel (A'DC')$.

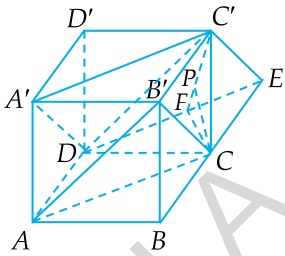
b) Calculați distanța dintre planele $(AB'C)$ și $(A'DC')$.

Soluție:

a) Din $AA' \parallel CC'$ și $AA' \equiv CC' \Rightarrow$ $\Rightarrow ACC'A'$ este paralelogram $\Rightarrow AC \parallel A'C'$.

Din $AD \parallel B'C'$ și $AD \equiv B'C' \Rightarrow AB'C'D$ este paralelogram $\Rightarrow AB' \parallel DC'$.

Din $AC \parallel A'C'$ și $AB' \parallel DC' \Rightarrow (AB'C) \parallel$ $\parallel (A'DC')$;



b) *Soluția 1:*

Prelungim BC cu $CE \equiv BC$.

Din $CE \equiv BC$ și $BC \equiv AD \Rightarrow CE \equiv AD$.

Din $CE \equiv AD$ și $CE \parallel AD \Rightarrow ACED$ – paralelogram $\Rightarrow AC \parallel DE$.

Din $AC \parallel DE$ și $AC \parallel A'C' \Rightarrow DE \parallel A'C' \Rightarrow A, D, C', A'$ sunt coplanare.

Din A, D, C', A' coplanare $\Rightarrow (A'DC')$ este identic cu $(DC'E)$.

Din $A'DC'$ identic cu $(DC'E) \Rightarrow d((A'DC'), (AB'C)) = d((DC'E), (AB'C))$.

$ABCD$ – pătrat $\Rightarrow AC = AB\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ cm.

Din $ACED$ – paralelogram $\Rightarrow AC = DE = 6\sqrt{2}$ cm.

Ducem $CF \perp DE$, $F \in DE$.

Din $\sphericalangle DCE = 90^\circ$ și $CF \perp DE \Rightarrow CF = \dfrac{DC \cdot CE}{DE} = \dfrac{6 \cdot 6}{6\sqrt{2}} = \dfrac{6}{\sqrt{2}} =$ $= 3\sqrt{2}$ cm.

Din $CC' \perp (ABC) \Rightarrow CC' \perp (DCE)$.

Din $CC' \perp (DCE)$ și $CF \subset (DCE) \Rightarrow CC' \perp CF \Rightarrow \sphericalangle C'CF = 90^\circ$.

Din $\sphericalangle C'CF = 90^\circ \Rightarrow C'F^2 = C'C^2 + CF^2 \Rightarrow C'F^2 = 36 + 18 =$ $= 54$. Deci $C'F = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$ cm.

Din $CC' \perp (DCE)$, $CF \perp DE$ și $CF, DE \subset (DCE) \overset{T3\perp}{\Rightarrow} C'F \perp DE$.

Ducem $CP \perp C'F$, $P \in C'F$.

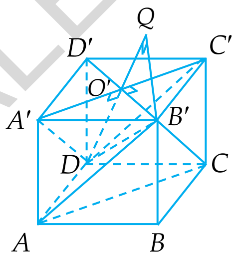
Din $C'F \perp DE$, $CF \perp DE$, $CP \perp C'F$ și $C'F$, $DE \subset (DC'E) \Rightarrow CP \perp$ $\perp (DC'E)$.

Din $CP \perp (DC'E) \Rightarrow \mathrm{d}(C, (DC'E)) = CP \Rightarrow \mathrm{d}((AB'C), (DC'E)) =$ $= \mathrm{d}(C, (DC'E)) = CP$.

Din $\sphericalangle C'CF = 90°$ și $CP \perp C'F \Rightarrow CP = \dfrac{C'C \cdot CF}{C'F} = \dfrac{6 \cdot 3\sqrt{2}}{3\sqrt{6}} =$ $= \dfrac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ cm.

Deci $\mathrm{d}((AB'C), (DC'C)) = 2\sqrt{3} \Rightarrow \mathrm{d}((AB'C), (A'DC')) = 2\sqrt{3}$ cm.

Soluția 2:



Din $A'B'C'D'$ – pătrat $\Rightarrow B'D' \perp A'C' \Rightarrow$ $\Rightarrow B'O' \perp A'C'$, unde $B'D' \cap A'C' = \{O\}$.

Din $A'D = DC' = A'C' = 6\sqrt{2}$ cm $\Rightarrow$ $\Rightarrow \Delta A'DC'$ este echilateral.

Din $\Delta A'DC'$ – echilateral și $O'A' \equiv O'C' \Rightarrow$ $\Rightarrow DO' \perp A'C'$.

Ducem $B'Q \perp DO'$, $Q \in DO'$.

Din $DO' \perp A'C'$, $B'O' \perp A'C'$, $B'Q \perp DO'$ și DO', $A'C' \subset$ $\subset (A'DC') \overset{R_2T3\perp}{\Rightarrow} B'Q \perp (A'DC')$.

Din $B'Q \perp (A'DC') \Rightarrow \mathrm{d}((AB'C), (A'DC')) = \mathrm{d}(B', (A'DC')) = B'Q$.

Din $DD' \perp (A'D'C')$ și $D'B' \subset (A'D'C') \Rightarrow DD' \perp D'B' \Rightarrow DD' \perp$ $\perp O'B'$; $B'O' = \dfrac{D'B'}{2} = \dfrac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$ cm.

Din $DD' \perp O'B' \Rightarrow \mathcal{A}_{DO'B'} = \dfrac{DD' \cdot O'B'}{2} = \dfrac{6 \cdot 3\sqrt{2}}{2} = 9\sqrt{2}$ cm².

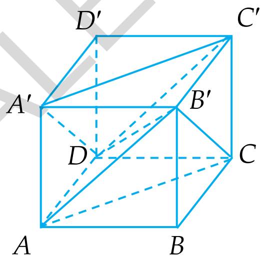
Din $\Delta A'DC'$ – echilateral și $DO' \perp A'C' \Rightarrow DO' = \dfrac{A'C'\sqrt{3}}{2} =$ $= \dfrac{6\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{6}$ cm.

Din $B'Q \perp DO' \Rightarrow \mathcal{A}_{DO'B'} = \dfrac{B'Q \cdot DO'}{2} = \dfrac{B'Q \cdot 3\sqrt{6}}{2}$.

Avem $\dfrac{B'Q \cdot 3\sqrt{6}}{2} = 9\sqrt{2} \Rightarrow B'Q \cdot 3\sqrt{6} = 18\sqrt{2} \Rightarrow B'Q = \dfrac{18\sqrt{2}}{3\sqrt{6}} = \dfrac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ cm. Deci d($(AB'C)$, $(A'DC')$) = $2\sqrt{3}$ cm.

Soluția 3:

d($(AB'C)$, $(A'DC')$) = d(B', $(A'DC')$); pentru a calcula d(B', $(A'DC')$) exprimăm volumul piramidei triunghiulare $B'A'C'D$ în două feluri.



$$\mathcal{V}_{B'A'DC'} = \frac{d(B',(A'DC')) \cdot \mathcal{A}_{A'DC'}}{3} = \frac{d(D,(A'B'C')) \cdot \mathcal{A}_{A'B'C'}}{3},$$ rezultă că

$$d(B', (A'DC')) = \frac{d(D,(A'B'C')) \cdot \mathcal{A}_{A'B'C'}}{\mathcal{A}_{A'DC'}}.$$

Din $DD' \perp (A'B'C') \Rightarrow$ d(D, $(A'B'C')$) = DD' = 6 cm.

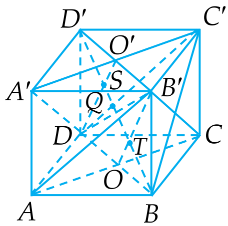
Din $\sphericalangle A'B'C' = 90° \Rightarrow \mathcal{A}_{A'B'C'} = \dfrac{A'B' \cdot B'C'}{2} = \dfrac{6 \cdot 6}{2} = 18$ cm^2.

Din $A'D = DC' = A'C' = 6\sqrt{2}$ cm $\Rightarrow \Delta A'DC'$ – echilateral $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathcal{A}_{A'DC'} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(6\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{72\sqrt{3}}{4} = 18\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

Rezultă că d(B', $(A'DC')$) = $\dfrac{6 \cdot 18}{18\sqrt{3}} = \dfrac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ cm, deci d($(AB'C)$, $(A'DC')$) = d(B', $(A'DC')$) = $2\sqrt{3}$ cm.

Soluția 4:



Notăm $BD' \cap DO' = \{S\}$, unde $A'C' \cap B'D' = \{O'\}$, $BD' \cap B'O = \{T\}$, unde $AC \cap BD = \{O\}$.

Cum $DO' \subset (A'DC') \Rightarrow BD' \cap (A'DC') = \{S\}$. Cum $B'O \subset$ $\subset (AB'C) \Rightarrow BD' \cap (AB'C) = \{T\}$.

Arătăm că $\mathrm{d}((AB'C), (A'DC')) = ST$.

Din $ABCD$ – pătrat $\Rightarrow AC \perp BD$.

Din $D'D \perp (ABC)$ și $AC \subset (ABC) \Rightarrow D'D \perp AC \Rightarrow AC \perp D'D$.

Din $AC \perp BD$ și $AC \perp D'D \Rightarrow AC \perp (D'DB)$.

Din $AC \perp (D'DB)$ și $BD' \subset (D'DB) \Rightarrow AC \perp BD' \Rightarrow BD' \perp AC$.

Din $BCC'B'$ – pătrat $\Rightarrow B'C \perp BC'$.

Din $D'C' \perp (B'C'C)$ și $B'C \subset (B'C'C) \Rightarrow D'C' \perp B'C \Rightarrow B'C \perp D'C'$.

Din $B'C \perp BC'$ și $B'C \perp D'C' \Rightarrow B'C \perp (D'C'B)$.

Din $B'C \perp (D'C'B)$ și $BD' \subset (D'C'B) \Rightarrow B'C \perp BD' \Rightarrow BD' \perp B'C$.

Din $BD' \perp AC$ și $BD' \perp B'C \Rightarrow BD' \perp (AB'C) \Rightarrow ST \perp (AB'C)$.

Din $ST \perp (AB'C) \Rightarrow \mathrm{d}(S, AB'C) = ST$.

Din $S \in (A'DC')$ și $\mathrm{d}(S, AB'C) = ST \Rightarrow \mathrm{d}((AB'C), (A'DC')) = ST$.

Din $DD' \parallel BB'$ și $DD' \equiv BB' \Rightarrow BB'D'D$ este paralelogram.

Din $BB'D'D$ – paralelogram $\Rightarrow QB \equiv QD'$ și $QD \equiv QB'$, unde $BD' \cap B'D = \{Q\}$.

Din $QB \equiv QD' \Rightarrow QB = QD' = \dfrac{BD'}{2}$.

Din $OB \equiv OD$, $QD \equiv QB'$ și $BQ \cap B'O = \{T\} \Rightarrow T$ este centru de greutate în $\Delta B'BD$.

Din T centru de greutate în $\Delta B'BD \Rightarrow BT = \dfrac{2}{3} \cdot BQ = \dfrac{2}{3} \cdot$ $\cdot \dfrac{BD'}{2} \Rightarrow BT = \dfrac{BD'}{3}$.

Din $O'B' \equiv O'D'$, $QD \equiv QB'$ și $D'Q \cap DO' = \{S\} \Rightarrow S$ este centru de greutate în $\Delta DD'O'$.

Din S centru de greutate în $\Delta DD'O' \Rightarrow D'S = \dfrac{2}{3} \cdot D'Q = \dfrac{2}{3} \cdot$ $\cdot \dfrac{BD'}{2} = \dfrac{BD'}{3}$.

Din $BT = \dfrac{BD'}{3}$, $D'S = \dfrac{BD'}{3}$ și $BT + ST + D'S = BD' \Rightarrow ST = BD' - \dfrac{BD'}{3} - \dfrac{BD'}{3} \Rightarrow ST = \dfrac{BD'}{3}$. Dar $BD' = AB\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$ cm.

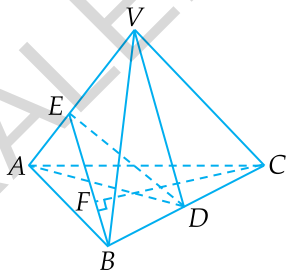
Deci $ST = \dfrac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$ cm $\Rightarrow$ d$((AB'C), (A'DC')) = 2\sqrt{3}$ cm.

I.6. DISTANȚE ȘI MĂSURI DE UNGHIURI PE FEȚELE SAU ÎN INTERIORUL CORPURILOR GEOMETRICE STUDIATE

Probleme rezolvate:

1. În piramida triunghiulară regulată $VABC$, $AB = 5\sqrt{10}$ cm și $VA = 25$ cm. Aflați $\cos(\sphericalangle((VAB), (VAC)))$.

Soluția 1:



Fie $D \in BC$, $DB \equiv DC$.

Din ΔABC – echilateral $\Rightarrow AB \equiv AC$, $DB \equiv DC \Rightarrow AD \perp BC \Rightarrow BC \perp AD$.

Din $VABC$ – piramidă regulată $\Rightarrow$ $\Rightarrow VB \equiv VC$ și $DB \equiv DC \Rightarrow VD \perp BC \Rightarrow$ $\Rightarrow BC \perp VD$.

Din $BC \perp AD$ și $BC \perp VD \Rightarrow BC \perp (VAD)$.

Din $BC \perp (VAD)$ și $VA \subset (VAD) \Rightarrow BC \perp VA \Rightarrow VA \perp BC$.

Ducem $DE \perp VA$, $E \in VA \Rightarrow VA \perp DE$.

Din $VA \perp BC$ și $VA \perp DE \Rightarrow VA \perp (BEC)$.

Din $VA \perp (BEC)$ și $BE \subset (BEC) \Rightarrow VA \perp BE \Rightarrow BE \perp VA$.

Din $VA \perp (BEC)$ și $CE \subset (BEC) \Rightarrow VA \perp CE \Rightarrow CE \perp VA$.

Din $(VAB) \cap (VAC) = VA$, $BE \perp VA$, $BE \subset (VAB)$, $CE \perp VA$ și $CE \subset (VAC) \Rightarrow \sphericalangle((VAB), (VAC)) = \sphericalangle BEC$.

Din $DB \equiv DC \Rightarrow DB = DC = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{5\sqrt{10}}{2}$ cm.

Din $BC \perp VD \Rightarrow \sphericalangle VDB = 90°$.

Din $\sphericalangle VDB = 90° \Rightarrow VD^2 = VB^2 - DB^2 \Rightarrow VD^2 = 625 - \dfrac{250}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow VD^2 = \dfrac{2500-250}{4} = \dfrac{2250}{4} \Rightarrow VD = \dfrac{15\sqrt{10}}{2}$ cm; $\mathcal{A}_{VBC} =$

$= \dfrac{VD \cdot BC}{2} = \dfrac{15\sqrt{10}}{2} \cdot 5\sqrt{10} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{75\sqrt{100}}{4} = \dfrac{750}{4} = \dfrac{375}{2}$.

Din $VABC$ – piramidă regulată $\Rightarrow \mathcal{A}_{VAB} = \mathcal{A}_{VBC} \Rightarrow \mathcal{A}_{VAB} =$

$= \dfrac{375}{2}$ cm^2. Dar $\mathcal{A}_{VAB} = \dfrac{BE \cdot VA}{2} = \dfrac{BE \cdot 25}{2}$. Deci $\dfrac{BE \cdot 25}{2} = \dfrac{375}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow BE = \dfrac{375}{25} = 15$ cm.

Din $BC \perp (EAD)$ și $ED \subset (EAD) \Rightarrow BC \perp ED \Rightarrow ED \perp BC$.

Din $ED \perp BC \Rightarrow \sphericalangle EDB = 90° \Rightarrow ED^2 = BE^2 - BD^2 \Rightarrow ED^2 = 225 -$

$- \dfrac{250}{4} = \dfrac{900-250}{4} = \dfrac{650}{4} \Rightarrow ED = \dfrac{5\sqrt{26}}{2}$ cm; $\mathcal{A}_{BEC} = \dfrac{ED \cdot BC}{2} =$

$= \dfrac{5\sqrt{26}}{2} \cdot 5\sqrt{10} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{25\sqrt{260}}{4}$ cm^2.

Ducem $CF \perp BE$, $F \in BE \Rightarrow \mathcal{A}_{BEC} = \dfrac{CF \cdot BE}{2} = \dfrac{CF \cdot 15}{2}$.

Deci $\dfrac{CF \cdot 15}{2} = \dfrac{25\sqrt{260}}{4} \Rightarrow CF = \dfrac{25\sqrt{260}}{30} = \dfrac{5\sqrt{260}}{6}$ cm.

Din $DB \equiv DC$ și $ED \perp BC \Rightarrow \Delta EBC$ este isoscel cu $EB \equiv EC \Rightarrow$

$\Rightarrow EC = EB = 15$ cm.

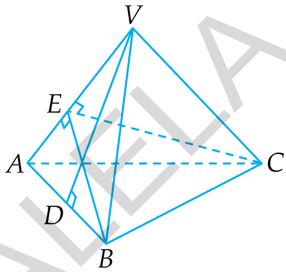
Din $CF \perp BE \Rightarrow \sphericalangle CFE = 90° \Rightarrow FE^2 = EC^2 - CF^2 \Rightarrow FE^2 =$

$= 225 - \dfrac{25 \cdot 260}{36} = \dfrac{225 \cdot 36 - 25 \cdot 260}{36} = \dfrac{25(9 \cdot 36 - 260)}{36} \Rightarrow FE^2 =$

$= \dfrac{25(324-260)}{36} = \dfrac{25 \cdot 64}{36} \Rightarrow FE = \dfrac{5 \cdot 8}{6} = \dfrac{40}{6}$. Deci $FE = \dfrac{20}{3}$ cm.

Din $\sphericalangle CFE = 90^\circ \Rightarrow \cos(\sphericalangle CEF) = \dfrac{FE}{EC} = \dfrac{\frac{20}{3}}{15} = \dfrac{20}{45} \Rightarrow \sphericalangle CEF =$
$= \dfrac{4}{9} \Rightarrow \cos(\sphericalangle BEC) = \dfrac{4}{9} \Rightarrow \cos(\sphericalangle((VAB, (VAC)) = \dfrac{4}{9}$.

Soluția 2:



Ducem $BE \perp VA$, $E \in VA$.

Din $VABC$ – piramidă regulată $\Rightarrow$
$\Rightarrow \sphericalangle AVB \equiv \sphericalangle AVC \Rightarrow \sphericalangle EVB \equiv \sphericalangle EVC$.

Din $VB \equiv VC$, $\sphericalangle EVB \equiv \sphericalangle EVC$ și $VE \equiv$
$\equiv VE \overset{L.U.L.}{\Rightarrow} \Delta EVB \equiv \Delta EVC$.

Din $\Delta EVB \equiv \Delta EVC \Rightarrow \sphericalangle VEB \equiv \sphericalangle VEC$ și $BE \equiv CE$.

Din $BE \perp VA \Rightarrow \sphericalangle VEB = 90^\circ$ și cum $\sphericalangle VEB \equiv \sphericalangle VEC \Rightarrow \sphericalangle VEC =$
$= 90^\circ \Rightarrow CE \perp VA$.

Din $(VAB) \cap (VAC) = VA$, $BE \perp VA$, $BE \subset (VAB)$, $CE \perp VA$ și $CE \subset (VAC) \Rightarrow \sphericalangle((VAB), (VAC)) = \sphericalangle BEC$.

Ducem $VD \perp AB$, $D \in AB$.

Din $VD \perp AB$ și $VA \equiv VB \Rightarrow DA = DB = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{5\sqrt{10}}{2}$ cm.

Din $VD \perp AB \Rightarrow \sphericalangle VDB = 90^\circ \Rightarrow VD^2 = VB^2 - BD^2 \Rightarrow VD^2 =$
$= 625 - \dfrac{250}{4} = \dfrac{2500 - 250}{4} = \dfrac{2250}{4} \Rightarrow VD = \dfrac{15\sqrt{10}}{2}$ cm.

Din $VD \perp AB \Rightarrow \mathcal{A}_{VAB} = \dfrac{VD \cdot AB}{2} = \dfrac{\frac{15\sqrt{10}}{2} \cdot 5\sqrt{10}}{2} \Rightarrow \mathcal{A}_{VAB} =$
$= \dfrac{750}{4} = \dfrac{375}{2}$ cm^2.

Din $BE \perp VA \Rightarrow \mathcal{A}_{VAB} = \dfrac{BE \cdot VA}{2} = \dfrac{BE \cdot 25}{2}$. Deci $\dfrac{BE \cdot VA}{2} = \dfrac{375}{2} \Rightarrow BE \cdot 25 = 375 \Rightarrow BE = \dfrac{375}{25} \Rightarrow BE = 15$ cm. Din $CE \equiv BE \Rightarrow$ $\Rightarrow CE = 15$ cm.

În ΔBEC avem: $BC^2 = BE^2 + CE^2 - 2 \cdot BE \cdot CE \cdot \cos \sphericalangle BEC$. Deci $\cos(\sphericalangle BEC) = \dfrac{BE^2 + CE^2 - BC^2}{2 \cdot BE \cdot CE} = \dfrac{225 + 225 - 250}{2 \cdot 15 \cdot 15} = \dfrac{450 - 250}{30 \cdot 15} = \dfrac{200}{450} = \dfrac{20}{45} \Rightarrow \cos(\sphericalangle BEC) = \dfrac{4}{9}$.

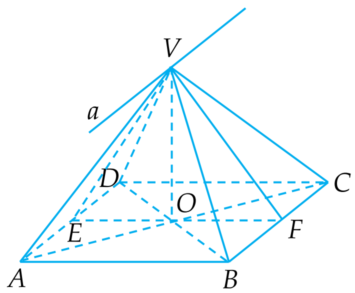
Deci $\cos(\sphericalangle BEC) = \dfrac{4}{9} \Rightarrow \cos(\sphericalangle((VAB), (VAC))) = \dfrac{4}{9}$.

2. În piramida patrulateră regulată $VABCD$ avem $AB = 6$ cm și $VA = \sqrt{21}$ cm. Aflați măsura unghiului format de planele (VAD) și (VBC).

Soluție:

Notăm $(VAD) \cap (VBC) = a$ și cum $V \in (VAD) \cap (VBC) \Rightarrow V \in a$.

Din $AD \subset (VAD)$, $BC \subset (VBC)$, $AD \parallel BC$ și $(VAD) \cap (VBC) = a \Rightarrow a \parallel AD \parallel BC$.



Ducem $VE \perp AD$, $E \in AD$ și cum $a \parallel AD \Rightarrow VE \perp a$.

Ducem $VF \perp BC$, $F \in BC$ și cum $a \parallel BC \Rightarrow VF \perp a$.

Din $(VAD) \cap (VBC)$, $VE \perp a$, $VE \subset (VAD)$, $VF \perp a$, $VF \subset (VBC) \Rightarrow \sphericalangle((VAD), (VBC)) = \sphericalangle EVF$.

Din $VA \equiv VD$ și $VE \perp AD \Rightarrow ED \equiv EA$.

Din $VB \equiv VC$ și $VF \perp BC \Rightarrow FC \equiv FB$.

Din $ABCD$ – pătrat și $AC \cap BD = \{O\} \Rightarrow OD \equiv OB$ și $OC \equiv OA$.

Din $ED \equiv EA$ și $OD \equiv OB \Rightarrow OE$ este linie mijlocie în $\Delta ADB \Rightarrow$
$\Rightarrow OE \parallel AB$ și $OE = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$ cm.

Din $FC \equiv FB$ și $OC \equiv OA \Rightarrow OF$ este linie mijlocie în $\Delta ACB \Rightarrow$
$\Rightarrow OF \parallel AB$ și $OF = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$ cm.

Din $OE \parallel AB$ și $OF \parallel AB \Rightarrow E, O, F$ sunt coliniare $\Rightarrow EF = OE +$
$+ OF \Rightarrow EF = 3 + 3 = 6$ cm.

Din $BF \equiv FC \Rightarrow BF = FC = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$ cm.

Din $VF \perp BC \Rightarrow \sphericalangle VFB = 90°$.

Din $\sphericalangle VFB = 90° \Rightarrow VF^2 = VB^2 - BF^2 \Rightarrow VF^2 = 21 - 9 = 12 \Rightarrow$
$\Rightarrow VF = 2\sqrt{3}$ cm.

Din $VABCD$ – piramidă regulată, $VE \perp AD$ și $VF \perp BC \Rightarrow VE \equiv$
$\equiv VF \Rightarrow VE = 2\sqrt{3}$ cm.

Din $VO \perp (ABC)$ și $EF \subset (ABC) \Rightarrow VO \perp EF \Rightarrow \sphericalangle VOF = 90°$.

Din $\sphericalangle VOF = 90° \Rightarrow VO^2 = VF^2 - OF^2 \Rightarrow VO^2 = 12 - 9 = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow VO = \sqrt{3}$ cm.

Din $VO = \sqrt{3}$ cm și $VF = 2\sqrt{3}$ cm $\Rightarrow VO = \dfrac{VF}{2}$.

Din $\sphericalangle VOF = 90°$ și $VO = \dfrac{VF}{2} \Rightarrow \sphericalangle VFO = 30° \Rightarrow \sphericalangle VFE = 30°$.

Din $VE \equiv VF \Rightarrow \sphericalangle VFE \equiv \sphericalangle VEF \Rightarrow \sphericalangle VEF = 30°$; $\sphericalangle EVF = 180° -$
$- (\sphericalangle VEF + \sphericalangle VFE) = 180° - (30° + 30°) = 120°$. Deci $\sphericalangle EVF = 120°$.

Cum unghiul a două plane este mai mic sau egal cu 90°, atunci unghiul format de planele (VAD) și (VBC) este $180° - 120° = 60°$. Unghiul de 120° este unghiul diedru format de (VAD) și (VBC).

Un alt mod de a afla $\sphericalangle EVF$ este: $A_{VEF} = \dfrac{VE \cdot VF \cdot \sin(\sphericalangle EVF)}{2} =$

$$= \frac{2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sin(\sphericalangle EVF)}{2} = \frac{12 \cdot \sin(EVF)}{2} \Rightarrow A_{VEF} = 6 \cdot \sin(\sphericalangle EVF).$$

Dar $A_{VEF} = \dfrac{VO \cdot EF}{2} = \dfrac{\sqrt{3} \cdot 6}{2} = 3\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.

Deci $6 \cdot \sin(\sphericalangle EVF) = 3\sqrt{3} \Rightarrow \sin(\sphericalangle EVF) = \dfrac{3\sqrt{3}}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Din $\sin(\sphericalangle EVF) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sphericalangle EVF = 60°$ sau $\sphericalangle EVF = 120°$.

Cum ΔVEF nu este echilateral $\Rightarrow \sphericalangle EVF = 120°$.

Deci măsura unghiului diedru este 120°, iar măsura unghiului format de planele (VAD) și (VBC) este $180° - 120° = 60°$.

I.7. ARII ȘI VOLUME ALE UNOR CORPURI GEOMETRICE

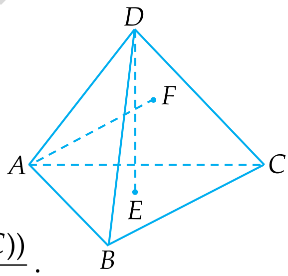
I.7.1. PIRAMIDA REGULATĂ (CU BAZA TRIUNGHI ECHILATERAL SAU PĂTRAT)

I.7.1.1. PIRAMIDA TRIUNGHIULARĂ (TETRAEDRUL)

Înălțimea unei piramide triunghiulare este perpendiculara dusă din vârful piramidei pe planul bazei.

Observație:

Volumul unei piramide triunghiulare este egal cu o treime din aria bazei înmulțită cu lungimea înălțimii corespunzătoare ei.



Dacă $DE \perp (ABC)$, $E \in (ABC)$, atunci $DE = \mathrm{d}(D, (ABC))$;

$$\mathcal{V}_{DABC} = \frac{\mathcal{A}_{ABC} \cdot DE}{3} = \frac{\mathcal{A}_{ABC} \cdot \mathrm{d}(D,(ABC))}{3}.$$

Dacă $AF \perp (BDC)$, $F \in (BDC) \Rightarrow AF = \mathrm{d}(A, (BDC))$, rezultă că $\mathcal{V}_{DABC} = \dfrac{\mathcal{A}_{BDC} \cdot AF}{3}$.

Probleme rezolvate:

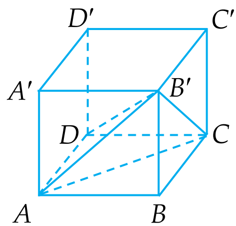
1. În piramida triunghiulară $ABCD$ avem: $DE \perp (ABC)$, $DE = 15$ cm, $\mathcal{A}_{ABC} = 28$ cm^2 și $\mathcal{A}_{DBC} = 35$ cm^2. Aflați distanța de la A la planul BDC.

Soluție:

Pentru a afla d(A, (BDC)) exprimăm volumul piramidei $ABCD$ în două moduri. O dată considerăm ca bază ΔABC și apoi considerăm ca bază ΔBDC. Determinăm d(A, (BDC)) din egalitatea celor două rezultate. O dată din $DE \perp (ABC)$, $E \in$ $\in (ABC) \Rightarrow \mathcal{V}_{DABC} = \dfrac{\mathcal{A}_{ABC} \cdot DE}{3} \Rightarrow \mathcal{V}_{DABC} = \dfrac{28 \cdot 15}{3} = 28 \cdot 5 =$ $= 140$ cm^3 $\Rightarrow \mathcal{V}_{DABC} = \dfrac{35 \cdot \mathrm{d}(A,(BDC))}{3}$. Deci $\dfrac{35 \cdot \mathrm{d}(A,(BDC))}{3} =$ $= 140 \Rightarrow 35 \cdot \mathrm{d}(A, BDC)) = 420 \Rightarrow \mathrm{d}(A, (BDC)) = 12$ cm.

Calculul distanței de la punctul A la planul BDC s-a realizat prin exprimarea volumului piramidei triunghiulare (tetraedru) în două moduri. Această metodă se folosește de multe ori atunci când trebuie să calculăm distanța de la un punct la un plan. Este avantajos pentru că se află distanța fără a fi nevoie să determinăm perpendiculara din punct pe plan.

2. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ avem $AB = 3$ cm. Calculați distanța de la D la planul ($AB'C$).



Soluție:

Punctul D și vârfurile triunghiului $AB'C$ sunt vârfurile piramidei triunghiulare $DAB'C$.

Din $B'B \perp (ADC) \Rightarrow \mathcal{V}_{DAB'C} = \dfrac{\mathcal{A}_{ADC} \cdot B'B}{3}$.

Dar $\mathcal{A}_{ADC} = \dfrac{AD \cdot DC}{2} = \dfrac{3 \cdot 3}{2} = \dfrac{9}{2}$ cm^2. Deci $\mathcal{V}_{DAB'C} = \dfrac{\frac{9}{2} \cdot 3}{3} =$ $= \dfrac{27}{6}$ cm^3. Dar $\mathcal{V}_{DAB'C} = \dfrac{\mathcal{A}_{AB'C} \cdot \mathrm{d}(D,(AB'C))}{3}$. Din $AC = AB' = B'C =$

$= 3\sqrt{2}$ cm $\Rightarrow \Delta AB'C$ este echilateral $\Rightarrow \mathcal{A}_{AB'C} = \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{AC^2 \cdot \sqrt{3}}{4} =$

$= \dfrac{18\sqrt{3}}{4} = \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ cm². Deci $\mathcal{V}_{DAB'C} = \dfrac{\dfrac{9\sqrt{3}}{2} \cdot d(D,(AB'C))}{3} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \cdot$

$\cdot$ d(D, ($AB'C$)). Avem $\dfrac{3\sqrt{3}}{2} \cdot$ d(D, ($AB'C$)) $= \dfrac{27}{6} \Rightarrow$ d(D, ($AB'C$)) =

$= \dfrac{27}{6} : \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ d(D, ($AB'C$)) $= \dfrac{27}{6} \cdot \dfrac{2}{3\sqrt{3}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$ cm.

Deci d(D, ($AB'C$)) $= \sqrt{3}$ cm.

I.7.1.2. PIRAMIDA REGULATĂ

PIRAMIDA REGULATĂ are baza poligon regulat, iar fețele laterale sunt triunghiuri isoscele.

Înălțimea unei piramide regulate este segmentul care unește vârful piramidei cu centrul bazei.

Apotema unei piramide regulate (notată a_p) este înălțimea unei fețe laterale.

Aria laterală a unei piramide regulate este jumătate din produsul dintre perimetrul bazei și apotema piramidei.

$$\mathcal{A}_l = \frac{\mathcal{P}_b \cdot a_p}{2}$$

Aria totală a unei piramide regulate este suma dintre aria laterală și aria bazei.

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_b$$

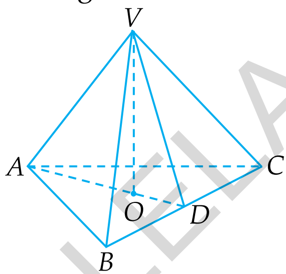
Volumul piramidei regulate (notat $\mathcal{V}_p$) este egal cu aria bazei înmulțită cu înălțimea, împărțită la 3.

$$\mathcal{V}_p = \frac{\mathcal{A}_b \cdot h}{3}$$

I.7.1.3. PIRAMIDA TRIUNGHIULARĂ REGULATĂ

PIRAMIDA TRIUNGHIULARĂ REGULATĂ are baza triunghi echilateral, iar fețele laterale sunt triunghiuri isoscele.

Înălțimea unei piramide regulate este segmentul care unește vârful piramidei cu centrul bazei.



VO este înălțimea piramidei

VD este apotema piramidei

$\mathcal{A}_l = \dfrac{\mathcal{P}_{ABC} \cdot VD}{2}$

$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_b$

ΔABC este echilateral $\Rightarrow \mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{BC^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$ sau $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{\mathcal{P}_{ABC} \cdot OD}{2}$, unde OD este apotema triunghiului echilateral.

$$\mathcal{V}_{VABC} = \frac{\mathcal{A}_{ABC} \cdot VO}{3} \text{ sau } \mathcal{V}_{VABC} = \frac{\mathcal{A}_{VBC} \cdot \mathrm{d}(A,(VBC))}{3} = \frac{\mathcal{A}_{VAC} \cdot \mathrm{d}(B,(VAC))}{3} = \frac{\mathcal{A}_{VAB} \cdot \mathrm{d}(C,(VAB))}{3}.$$

I.7.1.4. TETRAEDRUL REGULAT

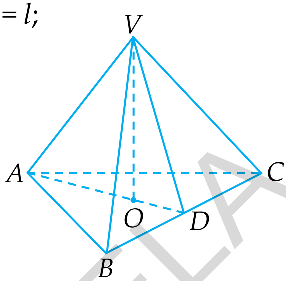
TETRAEDRUL REGULAT este piramida triunghiulară care are toate fețele triunghiuri echilaterale.

Tetraedrul regulat are toate muchiile congruente.

Tetraedrul regulat este o piramidă triunghiulară regulată specială în care fețele laterale sunt triunghiuri echilaterale.

Pentru tetraedrul regulat există formule mai simple pentru aria laterală, aria totală și volum. Aceste formule se obțin din formulele de la piramida regulată, ținând cont că toate fețele sunt triunghiuri echilaterale congruente.

Notăm: $VA = VB = VC = AB = BC = AC = l$;



$\mathcal{A}_l = \dfrac{3l^2\sqrt{3}}{4}$; $\mathcal{A}_t = l^2\sqrt{3}$; $AD = \dfrac{l\sqrt{3}}{2}$;

$OA = \dfrac{2}{3} \cdot AD = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{l\sqrt{3}}{2} = \dfrac{l\sqrt{3}}{3}$;

$OD = \dfrac{1}{3} \cdot AD = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{l\sqrt{3}}{2} = \dfrac{l\sqrt{3}}{6}$.

În ΔVOD avem $\sphericalangle VOD = 90° \Rightarrow VO^2 = VD^2 - OD^2 \Rightarrow VO^2 =$

$= \left(\dfrac{l\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{l\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \dfrac{3l^2}{4} - \dfrac{3l^2}{36} = \dfrac{27l^2 - 3l^2}{36} = \dfrac{24l^2}{36} = \dfrac{2l^2}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow VO = \dfrac{l\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow VO = \dfrac{l\sqrt{6}}{3}$.

$$\mathcal{V}_{VABC} = \frac{\mathcal{A}_{ABC} \cdot VO}{3} = \frac{\frac{l^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{l\sqrt{6}}{3}}{3} = \frac{\frac{l^3\sqrt{18}}{12}}{3} = \frac{3l^3\sqrt{2}}{36} = \frac{l^3\sqrt{2}}{12}.$$

Formulele aflate pentru tetraedrul regulat sunt:

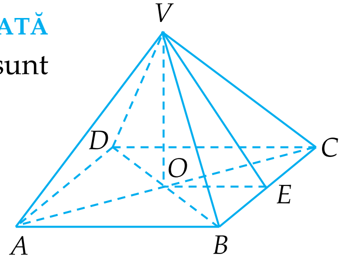
$\mathcal{A}_l = \dfrac{3l^2\sqrt{3}}{4}$; $\mathcal{A}_t = l^2\sqrt{3}$; $\mathcal{V} = \dfrac{l^3\sqrt{2}}{12}$ și înălțimea $VO = \dfrac{l\sqrt{6}}{3}$.

I.7.1.5. Piramida patrulateră regulată

Piramida patrulateră regulată are baza pătrat, iar fețele laterale sunt triunghiuri isoscele.

VO este înălțimea piramidei

VE este apotema piramidei



$$\mathcal{A}_l = \frac{\mathcal{P}_b \cdot a_p}{2} \Rightarrow \mathcal{A}_l = \frac{\mathcal{P}_{ABCD} \cdot VE}{2};$$

$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_b$; $\mathcal{A}_b = AB^2$ ($AB = l$, $\mathcal{A}_b = l^2$).

Problemă rezolvată:

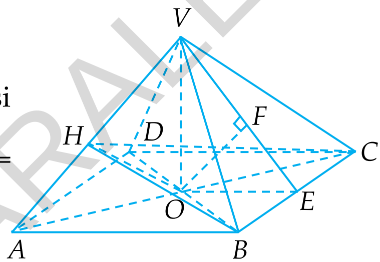
În piramida patrulateră regulată $VABCD$, baza $ABCD$ este pătrat, cu $AB = 4$ cm, iar fețele laterale sunt triunghiuri echilaterale. Aflați:

a) aria totală și volumul piramidei;

b) distanța de la centrul bazei la o față laterală;

c) sinusul unghiului format de două fețe laterale alăturate.

Soluție:



a) Din ΔVBC – echilateral și $VE \perp BC \Rightarrow VE = \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} =$
$= 2\sqrt{3}$ cm.

$$\mathcal{A}_l = \frac{\mathcal{P}_{ABCD} \cdot VE}{2} = \frac{16 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3} \text{ cm}^2; \ \mathcal{A}_b = 4^2 = 16 \text{ cm}^2;$$

$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_b$; $\mathcal{A}_t = 16\sqrt{3} + 16 = 16(\sqrt{3} + 1)$ cm^2.

Din $VO \perp (ABC)$ și $OE \subset (ABC) \Rightarrow VO \perp OE \Rightarrow \sphericalangle VOE = 90°$.

Din $\sphericalangle VOE = 90° \Rightarrow VO^2 = VE^2 - OE^2 \Rightarrow VO^2 = 12 - 4 = 8 \Rightarrow VO =$
$= \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ cm.

$$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{A}_{ABCD} \cdot VO}{3} = \frac{16 \cdot 2\sqrt{2}}{3} = \frac{32\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3;$$

b) Aflăm distanța de la O la (VBC). Ducem $OF \perp VE$, $F \in VE$.

Varianta 1:

Din $VO \perp (ABC)$, $VE \perp BC$ și $OE, VE \subset (ABC) \overset{R_1T3\perp}{\Rightarrow} OE \perp BC$.

Din $VE \perp BC$, $OE \perp BC$, $OF \perp VE$ și $VE, BC \subset (VBC) \overset{R_2T3\perp}{\Rightarrow} OF \perp$
$\perp (VBC) \Rightarrow \text{d}(O, (VBC)) = OF$;

Varianta 2:

Din $VO \perp (ABC)$ și $BC \subset (ABC) \Rightarrow VO \perp BC \Rightarrow BC \perp VO$.
Din $VE \perp BC \Rightarrow BC \perp VE$.
Din $BC \perp VO$ și $BC \perp VE \Rightarrow BC \perp (VOE)$.
Din $BC \perp (VOE)$ și $OF \perp (VOE) \Rightarrow BC \perp OF \Rightarrow OF \perp BC$.
Din $OF \perp BC$ și $OF \perp VE \Rightarrow OF \perp (VBC) \Rightarrow \text{d}(O, (VBC)) = OF$.
Varianta 1 poate fi înlocuită cu varianta 2.

Din $\sphericalangle VOE = 90°$ și $OF \perp VE \Rightarrow OF = \dfrac{VO \cdot OE}{VE} = \dfrac{2\sqrt{2} \cdot 2}{2\sqrt{3}} \Rightarrow$
$\Rightarrow OF = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow OF = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ cm. Deci $\text{d}(O, (VBC)) = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ cm;

c) Fie H mijlocul muchiei VA. Deci $VH \equiv HA$.
Cum ΔVAB este echilateral și $VH \equiv HA \Rightarrow BH \perp VA$.
Din ΔVAD – echilateral și $VH \equiv HA \Rightarrow DH \perp VA$.
Cum $(VAB) \cap (VAD) = VA$, $BH \perp VA$, $BH \subset (VAB)$, $DH \perp VA$ și $DH \subset (VAD) \Rightarrow \sphericalangle((VAB), (VAD)) = \sphericalangle BHD$.
Din $BH \perp VA \Rightarrow VA \perp BH$.
Din $DH \perp VA \Rightarrow VA \perp DH$.
Din $VA \perp BH$ și $VA \perp DH \Rightarrow VA \perp (BHD)$.
Din $VA \perp (BHD)$ și $OH \subset (BHD) \Rightarrow VA \perp OH \Rightarrow OH \perp VA$.

Din ΔVAB – echilateral și $BH \perp VA \Rightarrow BH = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{4\sqrt{3}}{2} =$
$= 2\sqrt{3}$ cm.

Din ΔVAD – echilateral și $DH \perp VA \Rightarrow DH = \dfrac{AD\sqrt{3}}{2} = \dfrac{4\sqrt{3}}{2} =$
$= 2\sqrt{3}$ cm.

Deci $BH = DH = 2\sqrt{3}$ cm $\Rightarrow BH \equiv DH$.

Din $\left.\begin{array}{l} BH \equiv DH \Rightarrow \Delta BHD \text{ este isoscel} \\ OB \equiv OD \Rightarrow HO \text{ este mediană} \end{array}\right] \Rightarrow HO \perp BD$.

Din $VO \perp (ABC)$ și $AC \subset (ABC) \Rightarrow VO \perp AC \Rightarrow \sphericalangle VOA = 90°$;

$AC = BD = AB\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ cm; $OA = OC = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ cm.

Din $\sphericalangle VOA = 90°$ și $OH \perp VA \Rightarrow OH = \dfrac{VO \cdot OA}{VA} = \dfrac{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}}{4} =$

$= \dfrac{8}{4} \Rightarrow HO = 2$ cm.

Din $HO \perp BD \Rightarrow \mathcal{A}_{BHD} = \dfrac{BD \cdot HO}{2} = \dfrac{4\sqrt{2} \cdot 2}{2} = 4\sqrt{2}$ cm².

Dar $\mathcal{A}_{BHD} = \dfrac{HB \cdot HD \cdot \sin(\sphericalangle BHD)}{2} = \dfrac{2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sin(\sphericalangle BHD)}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{A}_{BHD} = 6 \cdot \sin(\sphericalangle BHD) \Rightarrow 6 \cdot \sin(\sphericalangle BHD) = 4\sqrt{2} \Rightarrow \sin(\sphericalangle BHD) =$

$= \dfrac{4\sqrt{2}}{6} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. Deci, $\sin(\sphericalangle((VAB), (VAD))) = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

I.7.1.6. PIRAMIDA REGULATĂ CU BAZA HEXAGON

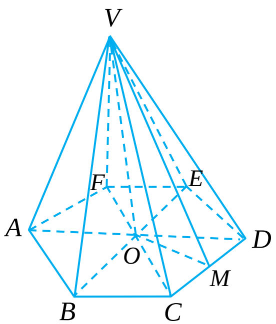
$\mathcal{A}_l = \dfrac{\mathcal{P}_b \cdot a_p}{2}$; $a_p = VM$; $\mathcal{P}_b = 6 \cdot l = 6 \cdot CD \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{A}_l = \dfrac{6 \cdot CD \cdot VM}{2} \Rightarrow \mathcal{A}_l = 3 \cdot CD \cdot VM$;

$\mathcal{A}_b = 6 \cdot \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}$; $\mathcal{A}_b = \dfrac{3l^2\sqrt{3}}{2}$;

$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_b$;

$\mathcal{V} = \dfrac{\mathcal{A}_b \cdot h}{3}$, unde $h = VO$.



I.7.2. PRISMA DREAPTĂ (CU BAZA TRIUNGHI ECHILATERAL SAU PĂTRAT)

I.7.2.1. PRISMA DREAPTĂ REGULATĂ

PRISMA DREAPTĂ REGULATĂ are bazele poligoane regulate congruente, iar fețele laterale sunt dreptunghiuri.

Înălțimea unei prisme drepte regulate este distanța dintre cele două baze.

Înălțimea unei prisme drepte regulate poate fi considerată oricare dintre muchiile laterale sau segmentul care unește centrele celor două baze.

Aria laterală a unei prisme regulate drepte este egală cu perimetrul bazei înmulțit cu înălțimea prismei.

$$\mathcal{A}_l = \mathcal{P}_b \cdot h$$

Aria totală a unei prisme regulate drepte este egală cu suma dintre aria laterală și dublul ariei bazei.

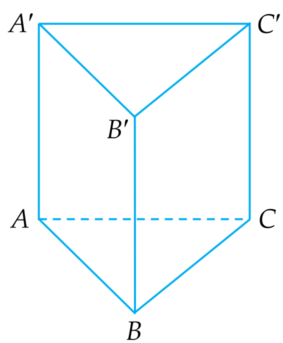
$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2 \cdot \mathcal{A}_b$$

Volumul unei prisme regulate drepte este egal cu produsul dintre aria bazei și înălțime.

$$\mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h$$

I.7.2.2. PRISMA DREAPTĂ (CU BAZA TRIUNGHI ECHILATERAL SAU PĂTRAT)

Prisma dreaptă cu baza triunghi echilateral este prisma dreaptă regulată triunghiulară.



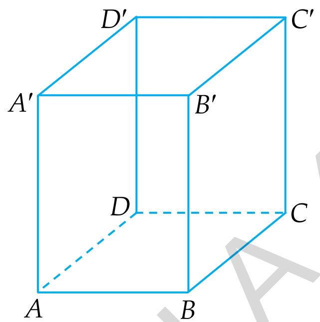
$\mathcal{A}_l = \mathcal{P}_{ABC} \cdot AA'$;

$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2 \cdot \mathcal{A}_{ABC}$;

$\mathcal{V} = \mathcal{A}_{ABC} \cdot AA'$;

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4}.$$

Prisma dreaptă cu baza pătrat este prisma dreaptă regulată patrulateră.



$\mathcal{A}_l = \mathcal{P}_{ABCD} \cdot AA'$;

$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2 \cdot \mathcal{A}_{ABCD}$;

$\mathcal{V} = \mathcal{A}_{ABCD} \cdot AA'$;

$\mathcal{A}_{ABC} = AB^2$.

Probleme rezolvate:

1. În prisma dreaptă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ avem $AB = 4$ cm și $AA' = 6$ cm. Aflați:

a) aria laterală și volumul prismei;

b) distanța de la A' la BC;

c) măsura unghiului dintre planele $(A'BC)$ și (ABC).

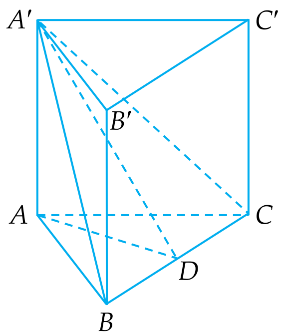
Soluție:

a) $\mathcal{A}_l = \mathcal{P}_{ABC} \cdot AA' = 3 \cdot 4 \cdot 6 = 72$ cm²;

$\mathcal{V} = \mathcal{A}_{ABC} \cdot AA'$;

$\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{16\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$ cm²;

$\mathcal{V} = 4\sqrt{3} \cdot 6 = 24\sqrt{3}$ cm³;



b) Ducem $AD \perp BC$, $D \in BC$.

Din $AA' \perp (ABC)$, $AD \perp BC$ și AD, $BC \subset (ABC) \overset{T3\perp}{\Rightarrow} A'D \perp BC \Rightarrow \mathrm{d}(A', BC) = A'D$.

Din ΔABC – echilateral și $AD \perp BC \Rightarrow$

$\Rightarrow AD = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ cm;

Din $A'A \perp (ABC)$, $AD \subset (ABC) \Rightarrow A'A \perp AD \Rightarrow \sphericalangle A'AD = 90°$.

Din $\sphericalangle A'AD = 90° \Rightarrow A'D^2 = A'A^2 + AD^2 \Rightarrow A'D^2 = 36 + 12 = 48 \Rightarrow A'D = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ cm $\Rightarrow$ d$(A', BC) = 4\sqrt{3}$ cm;

c) Din $(A'BC) \cap (ABC) = BC$, $A'D \perp BC$, $A'D \subset (A'BC)$, $AD \perp BC$ și $AD \subset (ABC) \Rightarrow \sphericalangle((A'BC), (ABC)) = \sphericalangle A'DA$.

Din $\sphericalangle A'AD = 90° \Rightarrow \sin(\sphericalangle A'DA) = \dfrac{A'A}{A'D} = \dfrac{6}{4\sqrt{3}} = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Din $\sin(\sphericalangle A'DA) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sphericalangle A'DA = 60° \Rightarrow \sphericalangle((A'BC), (ABC)) = 60°$.

2. În prisma patrulateră regulată dreaptă $ABCDA'B'C'D'$ avem $AB = 4\sqrt{2}$ cm și $AA' = 6$ cm. Aflați:

a) aria totală și volumul prismei;

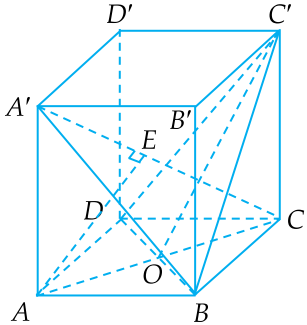
b) distanța de la A la $A'C$;

c) $\cos(\sphericalangle((C'BD), (ABC)))$.

Soluție:

a) $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2 \cdot \mathcal{A}_b$;

$\mathcal{A}_l = \mathcal{P}_b \cdot AA' = 4 \cdot 4\sqrt{2} \cdot 6 \Rightarrow \mathcal{A}_l = 96\sqrt{2}$ cm²;



$\mathcal{A}_b = AB^2 = (4\sqrt{2})^2 = 32$ cm²;

$\mathcal{A}_t = 96\sqrt{2} + 2 \cdot 32 = 96\sqrt{2} + 64 = 32(3\sqrt{2} + 2)$ cm²;

$\mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot AA' = 32 \cdot 6 = 192$ cm³;

b) Din $A'A \perp (ABC)$ și $AC \subset (ABC) \Rightarrow AA' \perp AC \Rightarrow \sphericalangle A'AC = 90°$.

În $\Delta A'AC$, cu $\sphericalangle A'AC = 90°$ ducem $AE \perp A'C$, $E \in A'C$.

Din $AE \perp A'C \Rightarrow d(A, A'C) = AE$.

Din $ABCD$ – pătrat $\Rightarrow AC = AB\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 8$ cm.

Din $\sphericalangle A'AC = 90° \Rightarrow A'C^2 = A'A^2 + AC^2 \Rightarrow A'C^2 = 36 + 64 = 100 \Rightarrow$ $\Rightarrow A'C = 10$ cm;

Cum $\sphericalangle A'AC = 90°$ și $AE \perp A'C \Rightarrow AE = \dfrac{A'A \cdot AC}{A'C} = \dfrac{6 \cdot 8}{10} =$ $= \dfrac{48}{10} = 4{,}8$ cm. Deci $AE = 4{,}8$ cm $\Rightarrow d(A, A'C) = 4{,}8$ cm;

c) Din $ABCD$ – pătrat $\Rightarrow AC \perp BD \Rightarrow CO \perp BD$, unde $AC \cap$ $\cap BD = \{O\}$.

Cum $C'C \perp (ABC)$, $CO \perp BD$ și $CO, BD \subset (ABC) \overset{T3\perp}{\Rightarrow} C'O \perp$ $\perp BD$.

Din $(C'BD) \cap (ABC) = BD$, $C'O \perp BD$, $C'O \subset (C'BD)$, $CO \perp$ $\perp BD$ și $CO \subset (ABC) \Rightarrow \sphericalangle((C'BD), (ABC)) = \sphericalangle C'OC$.

Din $C'C \perp (ABC)$ și $CO \subset (ABC) \Rightarrow C'C \perp CO \Rightarrow \sphericalangle C'CO = 90°$.

Din $ABCD$ – pătrat și $AC \cap BD = \{O\} \Rightarrow OC = OA = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{8}{2} =$ $= 4$ cm.

Din $\sphericalangle C'CO = 90° \Rightarrow C'O^2 = C'C^2 + OC^2 \Rightarrow C'O^2 = 36 + 16 = 52 \Rightarrow$ $\Rightarrow C'O = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ cm.

Din $\sphericalangle C'CO = 90° \Rightarrow \cos(\sphericalangle C'OC) = \dfrac{OC}{C'O} = \dfrac{4}{2\sqrt{13}} = \dfrac{2}{\sqrt{13}} =$ $= \dfrac{2\sqrt{13}}{13}$. Deci $\cos(\sphericalangle C'OC) = \dfrac{2\sqrt{13}}{13} \Rightarrow \cos(\sphericalangle((C'BD), (ABC))) =$ $= \dfrac{2\sqrt{13}}{13}$.

I.7.2.3. Prisma dreaptă cu baza hexagon regulat

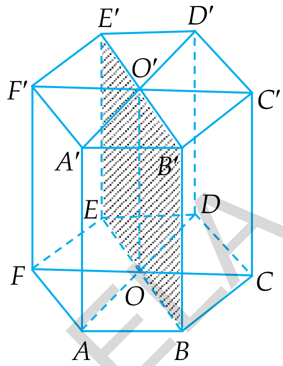
$\mathcal{A}_l = \mathcal{P}_b \cdot h$, unde $h = OO' = AA'$;

$\mathcal{A}_l = 6 \cdot AB \cdot OO'$; $\mathcal{A}_l = 6 \cdot AB \cdot AA'$;

$\mathcal{A}_b = \dfrac{3l^2\sqrt{3}}{2}$; $\mathcal{A}_b = \dfrac{3AB^2\sqrt{3}}{2}$;

$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2 \cdot \mathcal{A}_b$;

$\mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h$.



I.7.2.4. Paralelipipedul dreptunghic, cubul

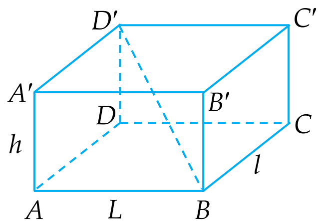
Paralelipipedul dreptunghic

Notăm lungimea cu L sau a.

Notăm lățimea cu l sau b.

Notăm înălțimea cu h sau c.

Putem considera, de exemplu, $AB = L = a$, $BC = l = b$ și $AA' = h = c$.



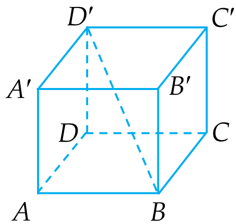
Avem: $\mathcal{A}_t = 2 \cdot L \cdot l + 2 \cdot L \cdot h + 2 \cdot l \cdot h$ sau $\mathcal{A}_t = 2ab + 2ac + 2bc$ sau $\mathcal{A}_t = 2 \cdot AB \cdot BC + 2 \cdot AB \cdot AA' + 2 \cdot BC \cdot AA'$;

$\mathcal{A}_l = \mathcal{P}_b \cdot$ înălțimea $= 2(L + l) \cdot h = 2(a + b) \cdot c = 2(AB + BC) \cdot AA'$;

$\mathcal{V} = L \cdot l \cdot h = abc = AB \cdot BC \cdot AA'$.

Mai reținem că $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ sau $D'B^2 = AB^2 + BC^2 + AA'^2$ sau $d^2 = L^2 + l^2 + h^2$, unde d este notația pentru lungimea diagonalei paralelipipedului.

CUBUL



Notăm lungimea muchiei cubului cu a.

$\mathcal{A}_t = 6a^2$ sau $\mathcal{A}_t = 6 \cdot AB^2$;

$\mathcal{A}_l = 4a^2$ sau $\mathcal{A}_l = 4 \cdot AB^2$;

$\mathcal{V} = a^3$ sau $\mathcal{V} = AB^3$.

Dacă notăm lungimea diagonalei cubului cu d, atunci $D'B = d$ și $d^2 = 3a^2$ sau $d = a\sqrt{3}$ sau $D'B^2 = 3 \cdot AB^2$ sau $D'B = AB\sqrt{3}$.

Probleme rezolvate:

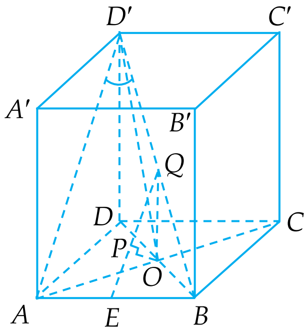
1. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic în care $AB = 4$ cm, $BC = 3$ cm și $AA' = 12$ cm. Aflați:

a) aria totală și volumul paralelipipedului;

b) sinusul unghiului format de $D'B$ cu planul (ADD');

c) distanța de la O la planul ABD', unde $AC \cap BD = \{O\}$.

Soluție:



a) $\mathcal{A}_t = 2 \cdot AB \cdot BC + 2 \cdot AB \cdot AA' + 2 \cdot BC \cdot AA' \Rightarrow \mathcal{A}_t = 2 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 12 + 2 \cdot 3 \cdot 12 = 24 + 96 + 72 = 192$ cm²;

$V = AB \cdot BC \cdot AA' = 4 \cdot 3 \cdot 12 = 12 \cdot 12 = 144$ cm³.

b) Din $BA \perp (ADD') \Rightarrow pr_{(ADD')}\, D'B = D'A \Rightarrow \sphericalangle(D'B, (ADD')) = \sphericalangle BD'A$; $D'B^2 = AB^2 + BC^2 + AA'^2 \Rightarrow D'B^2 = 16 + 9 + 144 = 169 \Rightarrow D'B = 13$ cm. Din $BA \perp (ADD')$ și $AD' \subset (ADD') \Rightarrow BA \perp AD' \Rightarrow \sphericalangle BAD' = 90°$. Din $\sphericalangle BAD' = 90° \Rightarrow \sin(\sphericalangle BD'A) = \dfrac{AB}{D'B} = \dfrac{4}{13} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin(\sphericalangle(D'B, (ADD'))) = \dfrac{4}{13}$;

c) *Soluția 1:*

Fie Q mijlocul lui $D'B$ și E mijlocul lui AB. Deci, $BQ \equiv QD'$ și $BE \equiv EA$.

Ducem $OP \perp QE$, unde $P \in QE$.

Din $ABCD$ – dreptunghi și $AC \cap BD = \{O\} \Rightarrow BO \equiv OD$.

Din $BQ \equiv QD'$ și $BO \equiv OD \Rightarrow QO$ este linie mijlocie în $\Delta BD'D \Rightarrow QO \parallel D'D$ și $QO = \dfrac{D'D}{2}$, deci $QO = \dfrac{12}{2} = 6$ cm.

Din $D'D \perp (ABC)$ și $QO \parallel D'D \Rightarrow QO \perp (ABC)$.

Din $BO \equiv OD$ și $BE \equiv EA \Rightarrow OE$ este linie mijlocie în $\Delta BAD \Rightarrow$ $\Rightarrow OE \parallel AD$ și $OE = \dfrac{AD}{2}$, deci $OE = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$ cm.

Dar $\sphericalangle D'DA = 90° \Rightarrow D'A^2 = AD^2 + D'D^2 \Rightarrow D'A^2 = 9 + 144 = 153 \Rightarrow D'A = \sqrt{153} = 3\sqrt{17}$ cm.

Din $BQ \equiv QD'$ și $BE \equiv EA \Rightarrow QE$ este linie mijlocie în $\Delta BAD' \Rightarrow$ $\Rightarrow QE \parallel D'A$ și $QE = \dfrac{D'A}{2}$. Deci $QE = \dfrac{3\sqrt{17}}{2}$ cm.

Din $ABCD$ – dreptunghi $\Rightarrow DA \perp AB$.

Din $OE \parallel AD$ și $DA \perp AB \Rightarrow OE \perp AB$.

Din $QO \perp (ABC)$, $OE \perp AB$ și $OE, AB \subset (ABC) \overset{T3\perp}{\Rightarrow} QE \perp AB$.

Din $QE \perp AB$, $OE \perp AB$, $OP \perp QE$ și $QE, AB \subset (ABD') \Rightarrow OP \perp (ABD')$.

Din $OP \perp (ABD') \Rightarrow \mathrm{d}(O, (ABD')) = OP$. Din $QO \perp (ABC)$ și $OE \subset (ABC) \Rightarrow QO \perp OE \Rightarrow \sphericalangle QOE = 90°$. Din $\sphericalangle QOE = 90°$ și $OP \perp QE \Rightarrow OP = \dfrac{QO \cdot OE}{QE} = 6 \cdot \dfrac{3}{2} : \dfrac{3\sqrt{17}}{2} \Rightarrow OP = \dfrac{18}{2} \cdot \dfrac{2}{3\sqrt{17}} = \dfrac{6}{\sqrt{17}} = \dfrac{6\sqrt{17}}{17}$ cm. Deci $\mathrm{d}(O, (ABD')) = \dfrac{6\sqrt{17}}{17}$ cm.

Soluția 2:

Exprimăm volumul piramidei triunghiulare $OABD'$ în două feluri.

Din $D'D \perp (ABC) \Rightarrow D'D \perp (AOB) \Rightarrow \mathcal{V}_{OABD'} = \dfrac{\mathcal{A}_{AOB} \cdot D'D}{3}$.

Din $ABCD$ – dreptunghi $\Rightarrow OA \equiv OC$.

Din $OA \equiv OC \Rightarrow BO$ este mediană în $\Delta ABC \Rightarrow \mathcal{A}_{AOB} = \mathcal{A}_{BOC} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{A}_{AOB} = \dfrac{\mathcal{A}_{ABC}}{2}$.

Din $ABCD$ – dreptunghi $\Rightarrow \sphericalangle ABC = 90^\circ \Rightarrow \mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{AB \cdot BC}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{4 \cdot 3}{2} = \dfrac{12}{2} = 6\text{ cm}^2 \Rightarrow \mathcal{A}_{AOB} = \dfrac{6}{2} = 3\text{ cm}^2$.

Deci $\mathcal{V}_{OABD'} = \dfrac{3 \cdot 12}{3} = 12\text{ cm}^3$ (1).

Dar $\mathcal{V}_{OABD'} = \dfrac{\mathcal{A}_{BAD'} \cdot d(O,(ABD'))}{3}$.

Din $BA \perp (ADD')$ și $AD' \subset (ADD') \Rightarrow BA \perp AD' \Rightarrow \sphericalangle BAD' = 90^\circ$.

Din $\sphericalangle BAD' = 90^\circ \Rightarrow \mathcal{A}_{BAD'} = \dfrac{D'A \cdot AB}{2}$, dar am calculat $D'A$ în prima soluție de la punctul c) și am găsit $D'A = 3\sqrt{17}$ cm.

Deci $\mathcal{A}_{BAD'} = \dfrac{3\sqrt{17} \cdot 4}{2} = 6\sqrt{17}\text{ cm}^2$.

Deci $\mathcal{V}_{OABD'} = \dfrac{6\sqrt{17} \cdot d(O,(ABD'))}{3} = 2\sqrt{17} \cdot d(O, (ABD'))$ (2).

Din (1) și (2) $\Rightarrow 2\sqrt{17} \cdot d(O, (ABD')) = 12 \Rightarrow d(O, (ABD')) =$

$= \dfrac{12}{2\sqrt{17}} = \dfrac{6}{\sqrt{17}} = \dfrac{6\sqrt{17}}{17}$ cm.

2. Cubul $ABCDA'B'C'D'$ este un bazin gol cu muchia de 4 m. În bazin se toarnă 32 kl de apă.

a) Aflați la ce înălțime se ridică apa în bazin.

b) Cum se modifică înălțimea apei în bazin dacă după ce s-au turnat 32 kl de apă se introduce o piesă cu volumul de 8 m^3?

Soluție:

a) Notăm înălțimea la care se ridică apa în bazin cu x; 32 kl = 32 m^3. Avem $4 \cdot 4 \cdot x = 32 \Rightarrow 16x = 32 \Rightarrow x = 2$. Deci apa se ridică la 2 m în bazin.

b) Notăm noua înălțime a apei în bazin cu y; 32 m^3 + 8 m^3 = = 40 m^3 $\Rightarrow 4 \cdot 4 \cdot y = 40 \Rightarrow 16y = 40 \Rightarrow y = \frac{40}{16} = \frac{5}{2} = 2{,}5$. Deci noua înălțime a apei este 2,5 m; 2,5 m – 2 m = 0,5 m. Deci, după introducerea piesei nivelul crește cu 0,5 m.

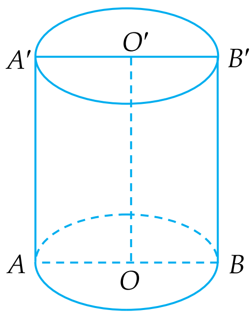
I.7.2.5. CILINDRUL CIRCULAR DREPT

$\mathcal{A}_l = 2\pi RG = 2\pi Rh$;

$\mathcal{A}_t = 2\pi RG + 2\pi R^2$;

$\mathcal{A}_t = 2\pi R(G + R)$;

$\mathcal{V} = \pi R^2 h = \pi R^2 G$.



Probleme rezolvate:

1. Aflați aria laterală, aria totală și volumul unui cilindru circular drept cu raza de 5 cm și înălțimea de 20 cm.

Soluție:

$\mathcal{A}_l = 2\pi RG = 2\pi \cdot 5 \cdot 8 = 80\pi$ cm^2;

$\mathcal{A}_t = 2\pi R(G + R) = 2\pi \cdot 5(8 + 5) = 10\pi \cdot 13 = 130\pi$ cm^2.

$\mathcal{V} = \pi R^2 h = \pi \cdot 5^2 \cdot 8 = \pi \cdot 25 \cdot 8 = 200\pi$ cm^3.

2. Un recipient are forma unui cilindru circular drept cu raza de 5 cm și înălțimea de 50 cm. Verificați dacă în recipient încap:

a) 1,5 ℓ de apă; b) 1,6 ℓ de apă.

Soluție:

$\mathcal{V} = \pi R^2 h = \pi \cdot 25 \cdot 20 = 500\pi$ cm^3.

Din $3,14 < \pi < 3,15 \Rightarrow 500 \cdot 3,14 < 500\pi < 500 \cdot 3,15 \Rightarrow 1570 < 500\pi < 1575 \Rightarrow 1500 < 500\pi < 1600$.

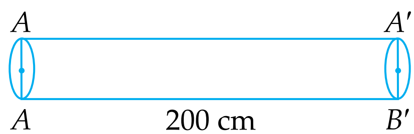
Deci 1500 cm^3 $< \mathcal{V} <$ 1600 cm^3 $\Rightarrow$ 1,5 dm^3 $< \mathcal{V} <$ 1,6 dm^3 $\Rightarrow$ $\Rightarrow 1,5\ \ell < \mathcal{V} < 1,6\ \ell$.

a) Cum $\mathcal{V} > 1,5\ \ell \Rightarrow 1,5\ \ell$ încap în recipient;

b) Cum $\mathcal{V} < 1,6\ \ell \Rightarrow 1,6\ \ell$ nu încap în recipient.

3. Este posibil de realizat o țeavă cu diametru de 3 cm și lungimea de 2 m dintr-o bucată de tablă cu formă dreptunghiulară care are aria de 1800 cm^2?

Soluție:



$\mathcal{A}_{\text{țeavă}} = \mathcal{A}_{l\,\text{cilindru}} = 2\pi RG$; 2 m = 200 cm, iar $R = \frac{3}{2} = 1{,}5$ cm $\Rightarrow \mathcal{A}_{\text{țeavă}} =$
$= 2\pi \cdot 1{,}5 \cdot 200 = 600\pi$ cm²; $3{,}14 < \pi < 3{,}15 \Rightarrow 600 \cdot 3{,}14 < 600\pi <$
$< 600 \cdot 3{,}15 \Rightarrow 1884 < 600\pi < 1890 \Rightarrow 1800 < 600\pi < 1900 \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathcal{A}_{\text{țeavă}} > 1800$ cm² $\Rightarrow$ nu se poate realiza țeava.

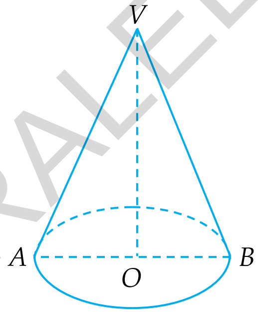
I.7.2.6. Conul circular drept

$\mathcal{A}_l = \pi RG$;

$\mathcal{A}_t = \pi RG + \pi R^2$;

$\mathcal{A}_t = \pi R(G + R)$;

$\mathcal{V} = \frac{\pi R^2 h}{3}$.



Probleme rezolvate:

1. Aflați aria laterală, aria totală și volumul unui con circular drept cu raza de 6 cm și înălțimea de 8 cm.

Soluție:

Din $\sphericalangle VOA = 90° \Rightarrow VA^2 = VO^2 + OA^2 \Rightarrow VA^2 = 64 + 36 = 100 \Rightarrow$
$\Rightarrow VA = 10$ cm $\Rightarrow G = 10$ cm;

$\mathcal{A}_l = \pi RG = \pi \cdot 6 \cdot 10 = 60\pi$ cm²;

$\mathcal{A}_t = \pi R(G + R) = \pi \cdot 6(10 + 6) = 6\pi \cdot 16 = 96\pi$ cm²;

$\mathcal{V} = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{\pi \cdot 36 \cdot 8}{3} = \pi \cdot 12 \cdot 8 = 96\pi$ cm³.

2. Un pahar are forma unui con circular drept cu raza de 3 cm și înălțimea de 8 cm. Verificați dacă în pahar încap:

a) 75 ml de apă; b) 100 ml de apă.

Soluție:

$$\mathcal{V} = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{\pi \cdot 9 \cdot 8}{3} = 24\pi \text{ cm}^3.$$

Cum $3{,}14 < \pi < 3{,}15 \Rightarrow 24 \cdot 3{,}14 < 24\pi < 24 \cdot 3{,}15 \Rightarrow 75{,}36 < < 24\pi < 75{,}60 \Rightarrow 75 < 24\pi < 100$.

a) Din $\mathcal{V} > 75 \text{ cm}^3 \Rightarrow \mathcal{V} > 75$ ml, deci 75 ml de apă încap în pahar;

b) Din $\mathcal{V} < 100 \text{ cm}^3 \Rightarrow \mathcal{V} < 100$ ml, deci 100 ml de apă nu încap în pahar.

3. O doză cilindrică este plină cu suc. Din doza cilindrică se toarnă suc într-un pahar în formă de con circular drept, până se umple paharul. Știind că raza cilindrului este 2 cm, înălțimea este 18 cm, raza bazei paharului este 2 cm și înălțimea paharului 12 cm, aflați la ce înălțime se ridică sucul în doză, după ce a fost umplut paharul.

Soluție:

$\mathcal{V}_{\text{dozei}} = \pi R^2 \cdot h = \pi \cdot 2^2 \cdot 18 = \pi \cdot 4 \cdot 18 = 72\pi \text{ cm}^3$; $\mathcal{V}_{\text{paharului}} = \dfrac{\pi R^2 \cdot h}{3} = \dfrac{\pi \cdot 2^2 \cdot 12}{3} = \dfrac{\pi \cdot 4 \cdot 12}{3} = 16\pi \text{ cm}^3$; $\mathcal{V}_{\text{suc rămas în doză}} = 72\pi - 16\pi = 56\pi \text{ cm}^3$; $\mathcal{V}_{\text{suc rămas în doză}} = \pi R^2 \cdot h_1$, unde h_1 este înălțimea sucului în doză; $\pi R^2 \cdot h_1 = 56\pi \Rightarrow \pi \cdot 2^2 \cdot h_1 = 56\pi \Rightarrow 4\pi \cdot h_1 = 56\pi \Rightarrow h_1 = \dfrac{56\pi}{4\pi} = 14$ cm.

4. Arătați că la un con circular drept $n = 360 \cdot \dfrac{R}{G}$, unde n este unghiul desfășurării conului.

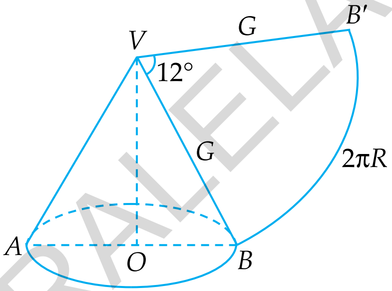
Soluție:

$L_{\overset{\frown}{BB'}} = \dfrac{\pi \cdot r \cdot n}{180} = \dfrac{\pi \cdot G \cdot n}{180}$;

$L_{\overset{\frown}{BB'}} = 2\pi R$, deci $\dfrac{\pi \cdot G \cdot n}{180} = 2\pi R \Rightarrow$

$\Rightarrow \pi \cdot G \cdot n = 360\pi R \Rightarrow G \cdot n =$

$= 360R \Rightarrow n = 360 \cdot \dfrac{R}{G}$.



5. Aflați unghiul desfășurării unui con circular drept în fiecare din situațiile:

a) $G = 2R$; b) $G = 4R$; c) $R = 0{,}75G$.

Soluție:

Folosim rezultatul $n = 360 \cdot \dfrac{R}{G}$.

a) $n = 360 \cdot \dfrac{R}{2R} = 180 \Rightarrow n° = 180°$;

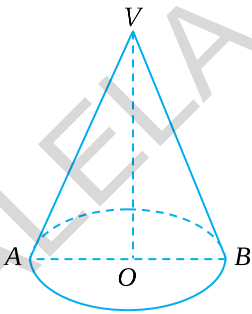
b) $n = 360 \cdot \dfrac{R}{4R} = 90 \Rightarrow n° = 90°$;

c) $n = 360 \cdot \dfrac{0{,}75 \cdot G}{G} = \cancel{360}^{9} \cdot \dfrac{\cancel{75}^{3}}{\cancel{100}_{4}} = 270 \Rightarrow n° = 270°$.

6. Într-un con circular drept generatoarea este de 12 cm și unghiul desfășurării are 180°. Aflați volumul conului.

Soluție:

Din $n = 360 \cdot \dfrac{R}{G} \Rightarrow 180 = 360 \cdot \dfrac{R}{G} \Rightarrow \dfrac{R}{G} = \dfrac{180}{360} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow G = 2R \Rightarrow R = \dfrac{G}{2} = \dfrac{12}{2} = 6$ cm.



$OA = OB = R \Rightarrow AB = 2R;$

$VA = VB = G \Rightarrow VA = VB = 2R.$

Deci $VA = VB = AB \Rightarrow \Delta VAB$ este echilateral $\Rightarrow VO = \dfrac{VB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ cm.

$$\mathcal{V} = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{\pi \cdot 36 \cdot 6\sqrt{3}}{3} = 72\pi\sqrt{3}\ \text{cm}^3.$$

I.7.2.7. TRUNCHIUL DE PIRAMIDĂ REGULATĂ

$$\mathcal{A}_l = \frac{(\mathcal{P}_B + \mathcal{P}_b) \cdot a_p}{2};$$

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b;$$

$$\mathcal{V} = \frac{h}{3}\left(\mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b + \sqrt{\mathcal{A}_B \cdot \mathcal{A}_b}\right);$$

$\mathcal{P}_B$ – perimetrul bazei mari;

$\mathcal{A}_B$ – aria bazei mari;

$\mathcal{P}_b$ – perimetrul bazei mici;

$\mathcal{A}_b$ – aria bazei mici.

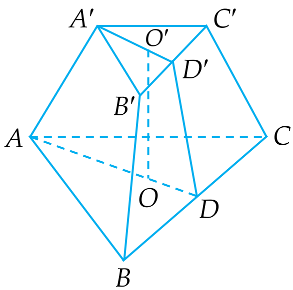


Fig. 1

Problemă rezolvată:

Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are latura bazei mari de 9 cm, latura bazei mici de 6 cm, apotema de $\sqrt{3}$ cm și înălțimea trunchiului de 1,5 cm. Aflați:

a) aria laterală și aria totală ale trunchiului;

b) volumul trunchiului.

Soluție:

Folosim figura 1; $AB = 9$ cm, $A'B' = 6$ cm și $DD' = \sqrt{3}$ cm.

a) $\mathcal{A}_l = \dfrac{(\mathcal{P}_B + \mathcal{P}_b) \cdot a_p}{2}$; $\mathcal{P}_B = 3 \cdot AB = 3 \cdot 9 = 27$ cm; $\mathcal{P}_b = 3 \cdot A'B' = 3 \cdot 6 = 18$ cm; $a_t = DD' = \sqrt{3}$ cm;

$\mathcal{A}_l = \dfrac{(27+18) \cdot \sqrt{3}}{2} = \dfrac{45\sqrt{3}}{2}$ cm²;

$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b$; $\mathcal{A}_B = \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{81\sqrt{3}}{4}$ cm²; $\mathcal{A}_b = \dfrac{A'B'^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$ cm² $\Rightarrow \mathcal{A}_t = \dfrac{45\sqrt{3}}{2} + \dfrac{81\sqrt{3}}{4} + 9\sqrt{3} = \dfrac{207\sqrt{3}}{4}$ cm²;

b) $\mathcal{V} = \dfrac{h}{3}\left(\mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b + \sqrt{\mathcal{A}_B \cdot \mathcal{A}_b}\right)$;

rezultă că $\mathcal{V} = \dfrac{1,5}{3}\left(\dfrac{81\sqrt{3}}{4} + 9\sqrt{3} + \sqrt{\dfrac{81\sqrt{3}}{4} \cdot 9\sqrt{3}}\right) = \dfrac{\cancel{3}}{2} \cdot \dfrac{1}{\cancel{3}}\left(\dfrac{81\sqrt{3}}{4} + 9\sqrt{3} + \dfrac{27\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{81\sqrt{3} + 36\sqrt{3} + 54\sqrt{3}}{4} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{171\sqrt{3}}{4} = \dfrac{171\sqrt{3}}{8}$ cm³.

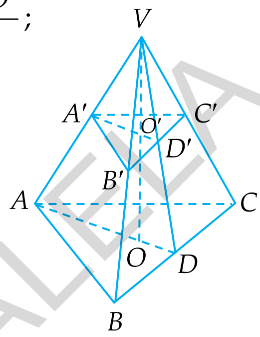
TRUNCHIUL DE PIRAMIDĂ REGULATĂ CU BAZA TRIUNGHI ECHILATERAL

$$\mathcal{A}_l = \frac{(\mathcal{P}_B + \mathcal{P}_b)\cdot a_p}{2};\ \mathcal{A}_l = \frac{(3\cdot AB + 3\cdot A'B')\cdot DD'}{2};$$

$$\mathcal{V} = \frac{h}{3}\left(\mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b + \sqrt{\mathcal{A}_B \cdot \mathcal{A}_b}\right);$$

$$\mathcal{A}_B = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4};\ \mathcal{A}_b = \frac{A'B'^2\sqrt{3}}{4};$$

$$\sqrt{\mathcal{A}_B \cdot \mathcal{A}_b} = \frac{AB\cdot A'B'\sqrt{3}}{4};\ h = OO'.$$



TRUNCHIUL DE PIRAMIDĂ REGULATĂ CU BAZA PĂTRAT

$$\mathcal{A}_l = \frac{(\mathcal{P}_B + \mathcal{P}_b)\cdot a_p}{2};$$

$$\mathcal{A}_l = \frac{(4\cdot AB + 4\cdot A'B')\cdot EE'}{2};$$

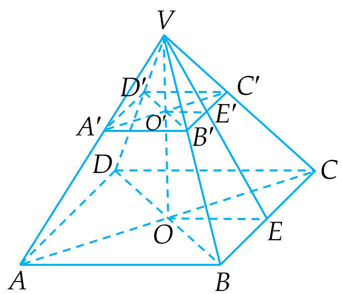
$$\mathcal{A}_l = \frac{4(AB + A'B')\cdot EE'}{2};$$

$$\mathcal{A}_l = 2(AB + A'B')\cdot EE';$$

$$\mathcal{V} = \frac{h}{3}\left(\mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b + \sqrt{\mathcal{A}_B \cdot \mathcal{A}_b}\right);$$

$$\mathcal{A}_B = AB^2;\ \mathcal{A}_b = A'B'^2;$$

$$\sqrt{\mathcal{A}_B \cdot \mathcal{A}_b} = AB\cdot A'B';\ h = OO'.$$



Problemă rezolvată:

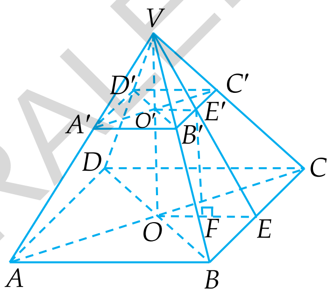
Într-un trunchi de piramidă patrulateră regulată latura bazei mari este de $24\sqrt{2}$ cm, latura bazei mici este $16\sqrt{2}$ cm și aria laterală 800 cm². Aflați:

a) apotema și înălțimea trunchiului;

b) volumul trunchiului;

c) înălțimea piramidei din care provine trunchiul.

Soluție:



$\mathscr{A}_l = \dfrac{(\mathscr{P}_B + \mathscr{P}_b) \cdot a_p}{2}$;

$\mathscr{P}_B = 4 \cdot AB = 4 \cdot 24\sqrt{2} = 96\sqrt{2}$ cm;

$\mathscr{P}_b = 4 \cdot A'B' = 4 \cdot 16\sqrt{2} = 64\sqrt{2}$ cm;

$\mathscr{A}_l = \dfrac{\left(96\sqrt{2} + 64\sqrt{2}\right) \cdot a_p}{2} = \dfrac{160\sqrt{2} \cdot a_p}{2} =$

$= 80\sqrt{2} \cdot a_p$.

Deci, $80\sqrt{2} \cdot a_p = 800 \Rightarrow a_p = \dfrac{800}{80\sqrt{2}} = \dfrac{10}{\sqrt{2}} = \dfrac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow E'E = 5\sqrt{2}$ cm.

Ducem $E'F \perp OE$, $F \in OE \Rightarrow \sphericalangle E'FO = \sphericalangle E'FE = 90°$.

Din $VO \perp (ABCD)$, $OE \subset (ABCD) \Rightarrow VO \perp OE \Rightarrow \sphericalangle VOE =$
$= 90° \Rightarrow \sphericalangle O'OF = 90°$.

Din $VO' \perp (A'B'C'D')$, $O'E' \subset (A'B'C'D') \Rightarrow VO' \perp O'E' \Rightarrow$
$\Rightarrow \sphericalangle VO'E' = \sphericalangle OO'E' = 90°$.

Din $\sphericalangle E'FO = \sphericalangle O'OF = \sphericalangle OO'E' = 90° \Rightarrow O'OFE$ – dreptunghi $\Rightarrow$
$\Rightarrow OO' \equiv E'F$ și $O'E' \equiv OF$; $OE = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{24\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2}$ cm; $O'E' =$
$= \dfrac{A'B'}{2} = \dfrac{16\sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{2}$ cm $\Rightarrow OF = 8\sqrt{2}$ cm.

Deci $FE = OE - OF = 12\sqrt{2} - 8\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ cm.

Din $\sphericalangle E'FE = 90° \Rightarrow E'F^2 = E'E^2 - FE^2 \Rightarrow E'F^2 = 50 - 32 = 18 \Rightarrow$
$\Rightarrow E'F = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ cm $\Rightarrow OO' = 3\sqrt{2}$ cm;

b) $\mathscr{V} = \frac{h}{3}\left(\mathscr{A}_B + \mathscr{A}_b + \sqrt{\mathscr{A}_B \cdot \mathscr{A}_b}\right)$; $\mathscr{A}_B = AB^2 = (24\sqrt{2})^2 = 576 \cdot 2 =$
$= 1152$ cm^2; $\mathscr{A}_b = A'B'^2 = (16\sqrt{2})^2 = 256 \cdot 2 = 512$ cm^2;

$\sqrt{\mathscr{A}_B \cdot \mathscr{A}_b} = \sqrt{(24\sqrt{2})^2 \cdot (16\sqrt{2})^2} = 24\sqrt{2} \cdot 16\sqrt{2} = 384 \cdot 2 = 768$ cm^2;

$\mathscr{V} = \frac{3\sqrt{2}}{3}(1152 + 512 + 768) = 2432\sqrt{2}$ cm^3;

c) Din $O'OFE$ dreptunghi $\Rightarrow E'F \parallel O'O \Rightarrow E'F \parallel VO$.

Din $E'F \parallel VO \Rightarrow \Delta EFE' \sim \Delta EOV \Rightarrow \frac{E'F}{VO} = \frac{EF}{EO} \Rightarrow \frac{3\sqrt{2}}{VO} =$
$\frac{4\sqrt{2}}{12\sqrt{2}} \Rightarrow VO = \frac{3\sqrt{2} \cdot 12\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = 9\sqrt{2}$ cm.

TRUNCHIUL DE PIRAMIDĂ REGULATĂ CU BAZA HEXAGON REGULAT

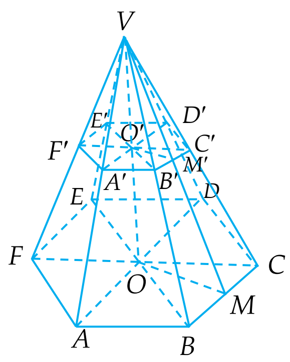
$\mathscr{A}_l = \frac{(\mathscr{P}_B + \mathscr{P}_b) \cdot a_p}{2}$;

$\mathscr{A}_l = \frac{(6 \cdot AB + 6 \cdot A'B') \cdot MM'}{2}$;

$\mathscr{A}_l = \frac{6(AB + A'B') \cdot MM'}{2}$;

$\mathscr{A}_l = 3(AB + A'B') \cdot MM'$;

$\mathscr{V} = \frac{h}{3}\left(\mathscr{A}_B + \mathscr{A}_b + \sqrt{\mathscr{A}_B \cdot \mathscr{A}_b}\right)$;



$$\mathcal{A}_B = \frac{3 \cdot AB^2\sqrt{3}}{4}; \mathcal{A}_b = \frac{3 \cdot A'B'^2\sqrt{3}}{4};$$

$$\sqrt{\mathcal{A}_B \cdot \mathcal{A}_b} = \frac{3 \cdot AB \cdot A'B'\sqrt{3}}{4}; h = OO'.$$

Teoremă:

Dacă secționăm o piramidă cu un plan paralel cu baza, rezultă o piramidă mică asemenea cu piramida mare și un trunchi de piramidă.

Raportul ariilor laterale este egal cu pătratul raportului de asemănare.

Raportul de asemănare este raportul oricăror două elemente corespunzătoare.

$k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{VA'}{VA} = \frac{VO'}{VO} = \frac{VE'}{VE} = \frac{O'A'}{OA} = \frac{O'E'}{OE}$, unde k este raportul de asemănare.

Deci, $\frac{\mathcal{A}_{l\ \text{piramidă mică}}}{\mathcal{A}_{l\ \text{piramidă mare}}} = k^2$ și $\frac{\mathcal{V}_{\text{piramidă mică}}}{\mathcal{V}_{\text{piramidă mare}}} = k^3$.

Raportul dintre aria bazei mici și aria bazei mari este egal cu pătratul raportului de asemănare, adică $\frac{\mathcal{A}_b}{\mathcal{A}_B} = k^2$.

Probleme rezolvate:

1. O piramidă regulată se intersectează cu un plan paralel cu baza. Punctul de intersecție dintre înălțimea piramidei și acest plan este mijlocul înălțimii.

a) Dacă aria laterală a piramidei este 20 cm², atunci aflați aria laterală a piramidei mici care rezultă.

b) Dacă volumul piramidei este 32 cm³, atunci aflați volumul piramidei mici care rezultă.

Soluție:

a) $\frac{\mathcal{A}_{l\ \text{piramidă mică}}}{\mathcal{A}_{l\ \text{piramidă mare}}} = \left(\frac{VO'}{VO}\right)^2 \Rightarrow \frac{\mathcal{A}_{l\ \text{piramidă mică}}}{20} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\mathcal{A}_{l\ \text{piramidă mică}}}{20} = \frac{1}{4} \Rightarrow \mathcal{A}_{l\ \text{piramidă mică}} = \frac{20 \cdot 1}{4} = \frac{20}{4} = 5\ \text{cm}^2;$

b) $\frac{\mathcal{V}_{\text{piramidă mică}}}{\mathcal{V}_{\text{piramidă mare}}} = \left(\frac{VO'}{VO}\right)^3 \Rightarrow \frac{\mathcal{V}_{\text{piramidă mică}}}{32} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\mathcal{V}_{\text{piramidă mică}}}{32} = \frac{1}{8} \Rightarrow \mathcal{V}_{\text{piramidă mică}} = \frac{32 \cdot 1}{8} = 4\ \text{cm}^3.$

2. Înălțimea VO a unei piramide regulate este 18 cm. Se intersectează piramida cu un plan paralel cu baza care intersectează înălțimea VO în punctul O'. Aflați OO', știind că $27 \cdot \mathcal{V}_{\text{tr}} = 19 \cdot \mathcal{V}_{\text{piramidă mare}}$.

Soluție:

$27 \cdot \mathcal{V}_{\text{tr}} = 19 \cdot \mathcal{V}_{\text{piramidă mare}} \Rightarrow 27(\mathcal{V}_{\text{piramidă mare}} - \mathcal{V}_{\text{piramidă mică}}) = 19 \cdot$ $\cdot \mathcal{V}_{\text{piramidă mare}} \Rightarrow 27 \cdot \mathcal{V}_{\text{piramidă mare}} - 27 \cdot \mathcal{V}_{\text{piramidă mică}} = 19 \cdot \mathcal{V}_{\text{piramidă mare}} \Rightarrow$ $\Rightarrow 27 \cdot \mathcal{V}_{\text{piramidă mare}} - 19 \cdot \mathcal{V}_{\text{piramidă mare}} = 27 \cdot \mathcal{V}_{\text{piramidă mică}} \Rightarrow 8 \cdot$ $\cdot \mathcal{V}_{\text{piramidă mare}} = 27 \cdot \mathcal{V}_{\text{piramidă mică}}$; $\frac{\mathcal{V}_{\text{piramidă mică}}}{\mathcal{V}_{\text{piramidă mare}}} = \frac{8}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\mathcal{V}_{\text{piramidă mică}}}{\mathcal{V}_{\text{piramidă mare}}} = \left(\frac{VO'}{VO}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \Rightarrow \frac{VO'}{VO} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{VO'}{18} = \frac{2}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow VO' = \frac{18 \cdot 2}{3} = 12\ \text{cm}$; $OO' = VO - VO' = 18\ \text{cm} - 12\ \text{cm} = 6\ \text{cm}$.

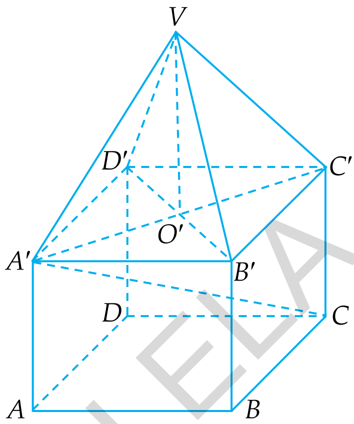
3. Fie $ABCDA'B'C'D'$ o prismă dreaptă cu baza pătrat și $VA'B'C'D'$ o piramidă regulată. Se știe că $AB = 3\sqrt{2}$ cm, $AA' = 2\sqrt{3}$ cm și $VA' = 6$ cm.

a) Aflați aria totală a prismei $ABCDA'B'C'D'$.

b) Aflați volumul piramidei $VA'B'C'D'$.

c) Arătați că V, A', C', C sunt coplanare și $VA' \perp A'C$.

Soluție:



a) $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2 \cdot \mathcal{A}_b$;

$\mathcal{A}_l = \mathcal{P}_b \cdot h$;

$\mathcal{A}_l = 4 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{3} = 24\sqrt{6}$ cm²;

$\mathcal{A}_b = AB^2 = (3\sqrt{2})^2 = 18$ cm²;

$\mathcal{A}_t = 24\sqrt{6} + 2 \cdot 18 = 24\sqrt{6} + 36 =$
$= 12(2\sqrt{6} + 3)$ cm²;

b) $\mathcal{V}_{\text{piramidă}} = \dfrac{\mathcal{A}_{A'B'C'D'} \cdot VO'}{3}$;

$\mathcal{A}_{A'B'C'D'} = \mathcal{A}_{ABCD} = 18$ cm²;

$A'B'C'D'$ este pătrat $\Rightarrow A'C' = A'B'\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 6$ cm $\Rightarrow$
$\Rightarrow VA' = A'C' = VC' = 6$ cm $\Rightarrow \Delta VA'C'$ este echilateral $\Rightarrow VO' =$
$= \dfrac{l\sqrt{3}}{2} = \dfrac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \Rightarrow \mathcal{V}_{\text{piramidă}} = \dfrac{18 \cdot 3\sqrt{3}}{3} = 18\sqrt{3}$ cm³.

c) Din $VO' \perp (A'B'C'D')$ și $CC' \perp (A'B'C'D') \Rightarrow VO' \parallel CC' \Rightarrow$
$\Rightarrow V, O', C, C'$ sunt coplanare $\Rightarrow O'C' \subset (VC'C)$. Din $A' \in O'C'$ și $O'C' \subset (VC'C) \Rightarrow A' \in (VC'C) \Rightarrow V, A', C', C$ sunt coplanare $\Rightarrow$
$\Rightarrow \sphericalangle VA'C = \sphericalangle VA'C' + \sphericalangle C'A'C$. Din $\Delta VA'C'$ – echilateral $\Rightarrow \sphericalangle VA'C' =$
$= 60°$; $A'C^2 = AB^2 + BC^2 + C'C^2 = (3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{3})^2 = 18 +$
$+ 18 + 12 = 48$. Deci $A'C = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ cm.

Din $CC' \perp (A'B'C'D')$ și $A'C' \subset (A'B'C'D') \Rightarrow CC' \perp A'C' \Rightarrow$
$\Rightarrow \sphericalangle A'C'C = 90°$.

În $\Delta A'C'C$ avem $\sphericalangle A'C'C = 90°$, $CC' = 2\sqrt{3}$, $A'C = 4\sqrt{3}$ cm $\Rightarrow$
$\Rightarrow CC' = \dfrac{A'C}{2} \Rightarrow \sphericalangle C'A'C = 30°$. Deci $\sphericalangle VA'C = \sphericalangle VA'C' + \sphericalangle C'A'C =$
$= 60° + 30° = 90° \Rightarrow VA' \perp A'C$.

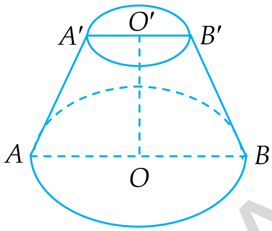
I.7.2.8. TRUNCHIUL DE CON CIRCULAR DREPT

$\mathcal{A}_l = \pi G(R + r);$

$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b;$

$\mathcal{A}_t = \pi G(R + r) + \pi R^2 + \pi r^2;$

$\mathcal{V} = \dfrac{\pi \cdot h}{3}\left(R^2 + r^2 + Rr\right).$



Probleme rezolvate:

1. Un trunchi de con circular drept are $G = 15$ cm, $R = 20$ cm și $h = 9$ cm. Aflați:

a) raza bazei mici;

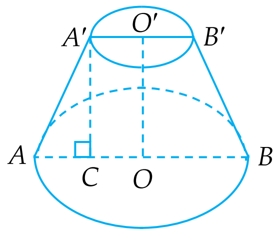
b) aria laterală și volumul trunchiului.

Soluție:

a) Ducem $A'C \perp AB$, $C \in AB \Rightarrow A'COO'$ este dreptunghi $\Rightarrow$ $\Rightarrow A'C \equiv OO'$ și $A'O' \equiv CO$.

Din $OO' = 9$ cm $\Rightarrow A'C = 9$ cm.

Din $A'C \perp AB \Rightarrow \sphericalangle A'CA = 90° \Rightarrow AC^2 = $ $= A'A^2 - A'C^2 \Rightarrow AC^2 = 225 - 81 = 144 \Rightarrow$ $\Rightarrow AC = 12$ cm; $CO = AO - AC \Rightarrow CO = 20$ $- 12 = 8$ cm $\Rightarrow A'O' = 8$ cm;



b) $\mathcal{A}_l = \pi G(R + r) = 15\pi\,(20 + 8) = 15\pi \cdot 28 = 420\pi$ cm^2;

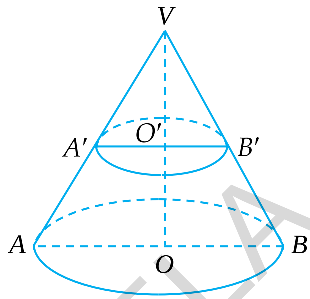
$$\mathcal{V} = \frac{\pi \cdot h}{3}\left(R^2 + r^2 + Rr\right) = \frac{9\pi}{3}(400 + 64 + 160) = 3\pi \cdot 624 = 1872\pi \text{ cm}^3.$$

2. Secțiunea axială a trunchiului de con $ABB'A'$ este un trapez isoscel. Se știe că $R = 12$ cm, $r = 6$ cm și $G = 12$ cm. Aflați:

a) aria totală și volumul trunchiului;

b) unghiul desfășurării suprafeței laterale a conului din care provine trunchiul de con.

Soluție:



a) $R = 12$ cm $\Rightarrow OA = 12$ cm $\Rightarrow AB = 24$ cm; $r = 6$ cm $\Rightarrow O'A' = 6$ cm $\Rightarrow A'B' = 12$ cm $\Rightarrow A'B' = \dfrac{AB}{2}$.

Din $A'B' \parallel AB$ și $A'B' = \dfrac{AB}{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow A'B'$ este linie mijlocie în $\Delta VAB \Rightarrow$ $\Rightarrow VA' \equiv A'A$ și $VB' \equiv B'B \Rightarrow VA = 2AA' = 2 \cdot 12 = 24$ cm și $VB = 2BB' = 2 \cdot 12 = 24$ cm.

Deci $VA = VB = AB = 24$ cm $\Rightarrow \Delta VAB$ este triunghi echilateral; $VO \perp AB \Rightarrow VO = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{24\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$ cm;

$A'B'$ este linie mijlocie în $\Delta VAB \Rightarrow A'O'$ este linie mijlocie în $\Delta VAO \Rightarrow VO' = O'O = \dfrac{VO}{2} = \dfrac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ cm;

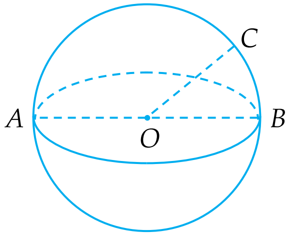
$\mathscr{A}_t = \pi G(R + r) + \pi R^2 + \pi r^2 = 12\pi(12 + 6) + 144\pi + 36\pi = 216\pi + 144\pi + 36\pi = 396\pi$ cm^2;

$\mathscr{V} = \dfrac{\pi \cdot h}{3}\left(R^2 + r^2 + Rr\right) = \dfrac{6\sqrt{3}\pi}{3}(144 + 36 + 72) = 2\sqrt{3}\pi \cdot 252 = 504\sqrt{3}\pi$ cm^3;

b) $n = 360 \cdot \dfrac{R}{G} = 360 \cdot \dfrac{12}{24} = 360 \cdot \dfrac{1}{2} = 180 \Rightarrow n° = 180°$.

I.7.3. SFERA: ARIE, VOLUM

Sfera de centru O și rază r este corpul geometric format de punctele din spațiu situate la distanța r față de punctul O.



$\mathcal{S}(O, r)$

Fig. 1

Intersecția dintre o sferă și un plan este un cerc.

Cercul mare este intersecția dintre o sferă și un plan care trece prin centrul sferei.

Raza unui cerc mare este egală cu raza sferei.

În figura 1 este desenată o sferă de centru O și rază r care se notează $\mathcal{S}(O, r)$.

În figura 1 avem $OA = OB = OC = r$.

Aria sferei este: $\mathcal{A} = 4\pi r^2$.

Volumul sferei este: $\mathcal{V} = \dfrac{4\pi r^3}{3}$.

Probleme rezolvate:

1. Aflați aria și volumul unei sfere cu raza de 10 cm.

Soluție:

$\mathcal{A} = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 10^2 = 4\pi \cdot 100 = 400\pi$ cm^2;

$\mathcal{V} = \dfrac{4\pi r^3}{3} = \dfrac{4\pi \cdot 10^3}{3} = \dfrac{4\pi \cdot 1000}{3} = \dfrac{4000\pi}{3}$ cm^3.

2. Volumul unei sfere este 288π cm³. Aflați aria sferei.

Soluție:

$\mathcal{V} = \dfrac{4\pi r^3}{3}$ și $\mathcal{V} = 288\pi$ cm³. Deci $\dfrac{4\pi r^3}{3} = 288\pi \Rightarrow 4\pi r^3 = 864\pi \Rightarrow$
$\Rightarrow r^3 = \dfrac{864\pi}{4\pi} \Rightarrow r^3 = 216 \Rightarrow r^3 = 6^3 \Rightarrow r = 6$ cm $\Rightarrow \mathcal{A} = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 6^2 =$
$= 4\pi \cdot 36 \Rightarrow \mathcal{A} = 144\pi$ cm².

3. Se topește o bară plină din metal în formă de cilindru circular drept cu raza de 4 cm și înălțimea de 144 cm. Din materialul rezultat se formează o piesă în formă de sferă. Aflați aria piesei rezultate.

Soluție:

Volumul piesei în formă de cilindru este egal cu volumul piesei în formă de sferă;
$\mathcal{V}_{cilindru} = \pi \cdot R^2 \cdot h = \pi \cdot 4^2 \cdot 144 = \pi \cdot 16 \cdot 144 = 2304\pi$ cm³;
$\mathcal{V}_{sferă} = \mathcal{V}_{cilindru} \Rightarrow \mathcal{V}_{sferă} = 2304\pi$ cm³;
$\mathcal{V}_{sferă} = \dfrac{4\pi R_{sf}^3}{3} \Rightarrow \dfrac{4\pi R_{sf}^3}{3} = 2304\pi \Rightarrow 4\pi \cdot R_{sf}^3 = 6912\pi \Rightarrow R_{sf}^3 =$
$= \dfrac{6912\pi}{4\pi} = 1728 \Rightarrow R_{sf}^3 = 12^3 \Rightarrow R_{sf} = 12$ cm $\Rightarrow \mathcal{A}_{sferă} = 4\pi R_{sf}^2 =$
$= 4\pi \cdot 12^2 = 4\pi \cdot 144 = 576\pi$ cm².

PARTEA a II-a

COMPLEMENTE DE GEOMETRIE ÎN SPAȚIU PENTRU OLIMPIADELE ȘCOLARE

II.1. DISTANȚA DINTRE DOUĂ DREPTE NECOPLANARE

Fiind date două drepte necoplanare, există o dreaptă și numai una care intersectează cele două drepte și este perpendiculară pe fiecare dintre ele. Această dreaptă se numește perpendiculara comună a celor două drepte.

Distanța dintre două drepte necoplanare este egală cu lungimea perpendicularei comune.

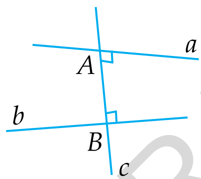


Fig. 1

În exemplul din figura 1 dreptele a și b sunt necoplanare, dreapta c este perpendiculara comună și distanța dintre dreptele a și b este egală cu lungimea segmentului AB.

Pentru aflarea distanței dintre două drepte necoplanare trebuie să determinăm perpendiculara comună și apoi să calculăm lungimea ei.

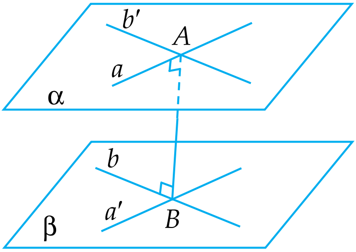
Sunt probleme în care perpendiculara comună este greu de determinat. Există teoreme care ne permit să aflăm distanța dintre două drepte necoplanare fără să determinăm perpendiculara comună.

Teorema 1:

Distanța dintre două drepte necoplanare este egală cu distanța dintre două plane paralele care conțin cele două drepte.

Demonstrație:

Fie AB perpendiculara comună a dreptelor necoplanare a și b. Deci $d(a, b) = AB$.



Fie $A \in a$ și $b' \parallel b$, $A \in b'$. Din $a \cap b' = \{A\} \Rightarrow \alpha = (a, b')$.

Fie $B \in b$ și $a' \parallel a$, $B \in a'$. Din $a' \cap b = \{B\} \Rightarrow \beta = (a', b)$.

$$\text{Din } \left.\begin{array}{l} a \parallel a',\ b \parallel b' \\ a,\ b' \subset \alpha,\ a \cap b' = \{A\} \\ a',\ b \subset \beta,\ a' \cap b = \{B\} \end{array}\right| \Rightarrow \alpha \parallel \beta.$$

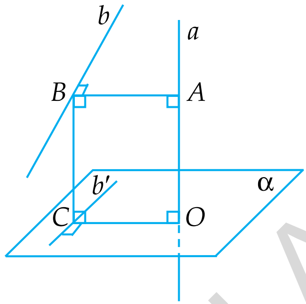
$$\text{Din } \left.\begin{array}{l} \alpha \parallel \beta \\ AB \perp \beta \\ A \in \alpha, B \in \beta \end{array}\right| \Rightarrow d(\alpha,\ \beta) = AB.$$

Din $d(a, b) = AB$ și $d(\alpha, \beta) = AB \Rightarrow d(a, b) = d(\alpha, \beta)$.

Teorema 2:

Distanța dintre două drepte necoplanare este egală cu distanța de la punctul de intersecție dintre una din ele și un plan perpendicular pe ea la proiecția celeilalte drepte pe acel plan.

Demonstrație:



Fie a și b dreptele necoplanare, $a \perp \alpha$, $a \cap \alpha = \{O\}$, $b' = pr_\alpha\, b$, $OC \perp b'$, $C \in b'$ și $\beta = (b, b')$. Din $b' = pr_\alpha\, b$ și $\beta = (b, b') \Rightarrow \beta \perp \alpha$.

Din $b' = pr_\alpha\, b$, $C \in b' \Rightarrow$ există $B \in b$, astfel încât $C = pr_{b'}\, B$.

Din $b' = pr_\alpha\, b$, $C = pr_{b'}\, B \Rightarrow BC \perp \alpha$.

Ducem $BA \perp a$, $A \in a \Rightarrow \sphericalangle BAO = 90°$ (1).

Din $BC \perp \alpha$, $OC \subset \alpha \Rightarrow BC \perp CO \Rightarrow \sphericalangle BCO = 90°$ (2).

Din $AO \perp \alpha$, $OC \subset \alpha \Rightarrow AO \perp OC \Rightarrow \sphericalangle AOC = 90°$ (3).

Din $AO \perp \alpha$ și $BC \perp \alpha \Rightarrow AO \parallel BC \Rightarrow A, B, C, O$ sunt puncte coplanare (4).

Din (1), (2), (3) și (4) $\Rightarrow ABCO$ este dreptunghi.

Din $ABCO$ – dreptunghi $\Rightarrow AB \parallel OC$ și $AB \equiv OC$.

Din $BC \perp CO \Rightarrow OC \perp BC$.

Din $\left.\begin{array}{l} OC \perp BC, BC \subset \beta \\ OC \perp b', b' \subset \beta \end{array}\right| \Rightarrow OC \perp \beta$.

Din $OC \perp \beta$, $AB \parallel OC \Rightarrow AB \perp \beta$.

Din $AB \perp \beta$, $b \subset \beta \Rightarrow AB \perp b$.

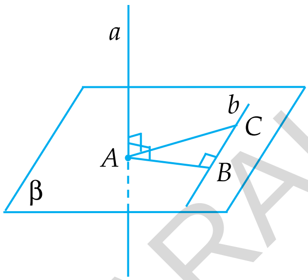
Din $AB \perp b$ și $AB \perp a \Rightarrow d(a, b) = AB$.

Din $d(a, b) = AB$ și $AB \equiv OC \Rightarrow d(a, b) = OC$.

Teorema 3:

Distanța dintre două drepte necoplanare perpendiculare este egală cu distanța de la punctul de intersecție dintre una din ele și un plan perpendicular pe ea care conține cealaltă dreaptă. Perpendiculara din punctul de intersecție pe dreapta din plan este chiar perpendiculara comună.

Demonstrație:



Fie a și b drepte necoplanare perpendiculare, $C \in b$. Ducem $CA \perp a$, $A \in a$. Notăm $(b, CA) = \beta$.

Din $CA \perp a \Rightarrow a \perp AC$.

Din $\left.\begin{array}{l} a \perp AC,\ AC \subset \beta \\ a \perp b,\ b \subset \beta \end{array}\right| \Rightarrow a \perp \beta$.

Ducem $AB \perp b$, $B \in b$.

Din $a \perp \beta$, $AB \subset \beta \Rightarrow a \perp AB \Rightarrow AB \perp a$.

Din $AB \perp a$ și $AB \perp b \Rightarrow AB$ este perpendiculara comună.

Deci $\mathrm{d}(a, b) = AB$.

Situația din teorema 3 reprezintă un caz particular pentru dreptele necoplanare din teorema 2, când dreptele necoplanare sunt perpendiculare.

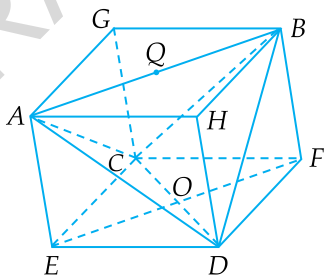
Teorema 4:

Volumul unui tetraedru este egal cu o șesime din produsul lungimilor a două muchii opuse înmulțit cu distanța dintre ele și cu sinusul unghiului format de cele două muchii.

Demonstrație:

Fiecărui tetraedru i se poate asocia un paralelipiped, astfel încât muchiile tetraedrului sunt diagonale în fețele paralelipipedului.

De exemplu, tetraedrului $ABCD$ i se poate asocia paralelipipedul $AGBHECFD$ în felul următor: prin mijlocul O al muchiei EF construim $EF \parallel AB$, $EF \equiv AB$, O – mijlocul lui EF și prin mijlocul Q al muchiei AB construim GH, astfel încât $GH \parallel CD$, $GH \equiv CD$, Q – mijlocul lui GH.



$\mathcal{V}_{\text{paralelipiped}} = \mathcal{A}_b \cdot h$, unde h este înălțimea;
$h = \mathrm{d}(A, (EDFC)) = \mathrm{d}((AHBG), (EDFC)) = \mathrm{d}(AB, CD)$;

$$\mathcal{A}_b = \frac{1}{2} \cdot EF \cdot CD \cdot \sin(\sphericalangle(EF, CD)).$$

Cum $AB \parallel EF$, $AB \equiv EF \Rightarrow \mathcal{A}_b = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD \cdot \sin(\sphericalangle(AB, CD))$.

Deci, $\mathcal{V}_{\text{paralelipiped}} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD \cdot \mathrm{d}(AB, CD) \cdot \sin(\sphericalangle(AB, CD))$.

$\mathcal{V}_{ACED} = \mathcal{V}_{BFCD} = \mathcal{V}_{DHAB} = \mathcal{V}_{CGAB} = \frac{1}{6} \cdot \mathcal{V}_{\text{paralelipiped}}$; $\mathcal{V}_{ACED} + \mathcal{V}_{BFCD} + \mathcal{V}_{DHAB} + \mathcal{V}_{CGAB} = \frac{2}{3} \cdot \mathcal{V}_{\text{paralelipiped}}$; $\mathcal{V}_{ABCD} = \mathcal{V}_{\text{paralelipiped}} - (\mathcal{V}_{ACED} + \mathcal{V}_{BFCD} + \mathcal{V}_{DHAB} + \mathcal{V}_{CGAB}) \Rightarrow \mathcal{V}_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \mathcal{V}_{\text{paralelipiped}}$. Deci $\mathcal{V}_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot AB \cdot CD \cdot \mathrm{d}(AB, CD) \cdot \sin(\sphericalangle(AB, CD))$.

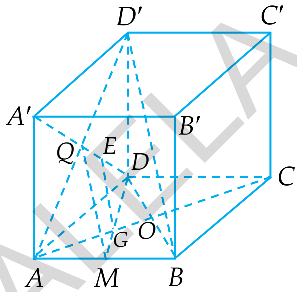
Aplicația 1:

Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub și $AB = a$. Calculați d(AC, $A'D$).

Soluție:

Metoda 1:

Are la bază definiția. În primul rând aflăm perpendiculara comună și apoi calculăm distanța.



Arătăm că $D'B \perp AC$. Din $D'D \perp (ABCD)$ și $AC \subset (ABCD) \Rightarrow D'D \perp AC \Rightarrow AC \perp D'D$.

Din $ABCD$ – pătrat $\Rightarrow AC \perp DB$. Din $AC \perp D'D$ și $AC \perp DB \Rightarrow AC \perp (D'DB)$. Din $AC \perp (D'DB)$ și $D'B \subset (D'DB) \Rightarrow AC \perp D'B \Rightarrow D'B \perp AC$.

Din $BA \perp (ADD'A')$ și $A'D \subset (ADD'A') \Rightarrow BA \perp A'D \Rightarrow A'D \perp BA$. Din $ADD'A'$ – pătrat $\Rightarrow A'D \perp AD'$.

Din $A'D \perp BA$ și $A'D \perp AD' \Rightarrow A'D \perp (BAD')$.

Din $A'D \perp (BAD')$ și $D'B \subset (BAD') \Rightarrow A'D \perp D'B \Rightarrow D'B \perp A'D$.

Observăm că $D'B$ este perpendiculară pe AC și pe $A'D$. Încercăm să găsim perpendiculara comună a dreptelor AC și $A'D$ cu ajutorul unor paralele la $D'B$. O paralelă la $D'B$ este linia mijlocie QM în triunghiul ABD', unde M este mijlocul lui AB și Q centrul pătratului $ADD'A'$, adică $A'D \cap AD' = \{Q\}$. Din QM linie mijlocie în $\Delta ABD' \Rightarrow QM \parallel D'B$, $QM = \dfrac{D'B}{2}$.

Notăm $DM \cap AC = \{G\}$ și $BD \cap AC = \{O\}$. În ΔDMQ ducem $GE \parallel QM$, $E \in QD$. În ΔABD, AO și DM sunt mediane.

Cum $AO \cap DM = \{G\} \Rightarrow G$ este centru de greutate în $\Delta ABD \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{DG}{DM} = \frac{2}{3}.$$

În ΔDMQ avem $GE \parallel QM \Rightarrow \dfrac{GE}{QM} = \dfrac{DG}{DM} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow GE = \dfrac{2}{3} \cdot QM$ și cum $QM = \dfrac{D'B}{2} \Rightarrow GE = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{D'B}{2} \Rightarrow GE = \dfrac{D'B}{3}$. Dar $D'B$ este diagonală în cub $\Rightarrow D'B = AB\sqrt{3} = a\sqrt{3} \Rightarrow GE = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Cum $GE \parallel QM$ și $QM \parallel D'B \Rightarrow GE \parallel D'B$.

Cum $GE \parallel D'B$ și $D'B \perp AC \Rightarrow GE \perp AC$.

Cum $GE \parallel D'B$ și $D'B \perp A'D \Rightarrow GE \perp A'D$.

Din $GE \perp AC$ și $GE \perp A'D \Rightarrow GE$ este perpendiculara comună a dreptelor AC și $A'D \Rightarrow \mathrm{d}(AC, A'D) = GE \Rightarrow \mathrm{d}(AC, A'D) = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Metoda 2:

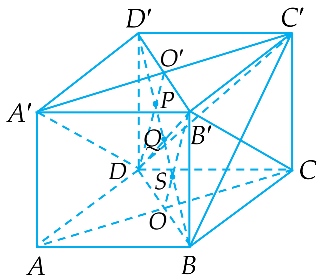
Această rezolvare se bazează pe teorema 1.

Din $AA' \parallel CC'$ și $AA' \equiv CC' \Rightarrow ACC'A'$ – paralelogram $\Rightarrow AC \parallel A'C'$.

Din $A'B' \parallel DC$, $A'B' \equiv DC \Rightarrow A'B'CD$ – paralelogram $\Rightarrow A'D \parallel B'C$.

Din $AC \parallel A'C'$, $A'D \parallel B'C \Rightarrow (AB'C) \parallel (A'DC')$.

Din $AC \subset (AB'C)$, $A'D \subset (A'DC')$ și $(AB'C) \parallel (A'DC') \Rightarrow \mathrm{d}(AC, A'D) = \mathrm{d}((AB'C), (A'DC'))$.



Am arătat în rezolvarea folosită la metoda 1 că $D'B \perp AC$.

Arătăm acum că $D'B \perp B'C$.

Din $D'C' \perp (BCC'B')$ și $B'C \subset (BCC'B') \Rightarrow D'C' \perp B'C \Rightarrow B'C \perp D'C'$. Din $BCC'B'$ – pătrat $\Rightarrow B'C \perp BC'$.

Din $B'C \perp D'C'$ și $B'C \perp BC' \Rightarrow B'C \perp (D'C'B)$.

Din $B'C \perp (D'C'B)$ și $D'B \subset (D'C'B) \Rightarrow B'C \perp D'B \Rightarrow D'B \perp$ $\perp B'C$.

Din $D'B \perp AC$ și $D'B \perp B'C \Rightarrow D'B \perp (AB'C)$.

Notăm $AC \cap BD = \{O\}$ și $A'C' \cap B'D' = \{O'\}$.

Notăm $D'B \cap DO' = \{P\}$ și $D'B \cap B'O = \{S\}$.

Din $D'B \perp (AB'C) \Rightarrow PS \perp (AB'C)$.

Din $(A'DC') \parallel (AB'C)$ și $PS \perp (AB'C) \Rightarrow d((AB'C), (A'DC')) = PS$.

Din $BB' \parallel DD'$, $BB' \equiv DD' \Rightarrow BB'D'D$ este paralelogram.

Notăm $D'B \cap BD' = \{Q\}$.

Din $ABCD$ – pătrat și $AC \cap BD = \{O\} \Rightarrow OB \equiv OD$.

Din $A'B'C'D'$ – pătrat și $A'C' \cap B'D' = \{O'\} \Rightarrow O'B' \equiv O'D'$.

Din $BB'D'D$ – paralelogram și $D'B \cap BD' = \{Q\} \Rightarrow QD \equiv QB' \Rightarrow$ $\Rightarrow QD' = QB = \dfrac{BD'}{2}$.

Din $OB \equiv OD \Rightarrow B'O$ – mediană în $\Delta BB'D$.

Din $QD \equiv QB' \Rightarrow BQ$ – mediană în $\Delta BB'D$.

Deoarece $BQ \cap B'O = \{S\}$, $B'O$ – mediană în $\Delta BB'D$ și BQ – mediană în $\Delta BB'D \Rightarrow S$ este centru de greutate $\Rightarrow \dfrac{BS}{BQ} =$ $= \dfrac{2}{3} \Rightarrow BS = \dfrac{2}{3} \cdot BQ = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{BD'}{2} \Rightarrow BS = \dfrac{BD'}{3}$.

Din $O'B' \equiv O'D' \Rightarrow DO'$ – mediană în $\Delta DD'B'$.

Din $DQ \equiv QB' \Rightarrow D'Q$ – mediană în $\Delta DD'B'$.

Deoarece $D'Q \cap DO' = \{P\}$, $D'Q$ – mediană în $\Delta DD'B'$ și DO' – mediană în $\Delta DD'B' \Rightarrow P$ este centru de greutate $\Rightarrow \dfrac{D'P}{D'Q} =$ $= \dfrac{2}{3} \Rightarrow D'P = \dfrac{2}{3} \cdot D'Q = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{BD'}{2} \Rightarrow D'P = \dfrac{BD'}{3}$.

Deoarece $D'P + PS + SB = BD'$, $BS = \dfrac{BD'}{3}$ și $D'P = \dfrac{BD'}{3} \Rightarrow PS =$

$= \dfrac{BD'}{3}$. Deci $D'P = PS = SB = \dfrac{BD'}{3}$.

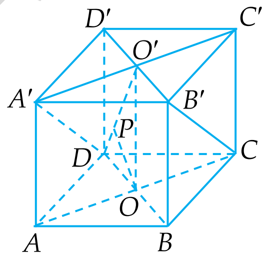
Din $PS = \dfrac{BD'}{3}$ și $BD' = a\sqrt{3} \Rightarrow PS = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Cum $\mathrm{d}((AB'C), (A'DC')) = PS \Rightarrow \mathrm{d}((AB'C), (A'DC')) = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Cum $\mathrm{d}(AC, A'D) = \mathrm{d}((AB'C), (A'DC')) \Rightarrow \mathrm{d}(AC, A'D) = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Metoda 3:

Această rezolvare se bazează pe teorema 2.



Din $BB' \perp (ABCD)$ și $AC \subset (ABCD) \Rightarrow B'B \perp AC \Rightarrow AC \perp B'B$.

Din $ABCD$ – pătrat $\Rightarrow AC \perp BD$.

Din $B'B \parallel D'D \Rightarrow B, B', D', D$ sunt coplanare.

Din $AC \perp B'B$ și $AC \perp BD \Rightarrow AC \perp (BB'D'D)$.

Din $AA' \parallel CC'$ și $AA' \equiv CC' \Rightarrow ACC'A'$ este paralelogram $\Rightarrow A'C' \parallel AC$.

Din $AC \perp (BB'D'D)$ și $A'C' \parallel AC \Rightarrow A'C' \perp (BB'D'D)$.

Notăm $A'C' \cap B'D' = \{O'\}$.

Din $A'C' \perp (BB'D'D) \Rightarrow A'O' \perp (BB'D'D)$.

Din $A'O' \perp (BB'D'D) \Rightarrow \mathrm{pr}_{(BB'D'D)}\, A' = O'$.

Cum $D \in (BB'D'D) \Rightarrow \mathrm{pr}_{(BB'D'D)}\, D = D$.

Din $\mathrm{pr}_{(BB'D'D)}\, A' = O'$ și $\mathrm{pr}_{(BB'D'D)}\, D = D \Rightarrow \mathrm{pr}_{(BB'D'D)}\, A'D = O'D$.

Ducem $OP \perp O'D$.

Din $AC \perp (BB'D'D)$, $AC \cap (BB'D'D) = \{O\}$, $\mathrm{pr}_{(BB'D'D)}\, A'D = O'D$ și $OP \perp O'D$, $P \in O'D \Rightarrow \mathrm{d}(AC, A'D) = OP$.

Cum $O'O \perp (ABCD)$ și $BD \subset (ABCD) \Rightarrow O'O \perp BD \Rightarrow \sphericalangle O'OD =$
$= 90°$. Avem $BD = AB\sqrt{2} \Rightarrow OD = \dfrac{AB\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; $OO' = AA' = a$.

Din $\sphericalangle O'OD = 90° \Rightarrow O'D^2 = O'O^2 + OD^2 \Rightarrow O'D^2 = a^2 + \dfrac{2a^2}{4} =$
$= \dfrac{6a^2}{4} \Rightarrow O'D = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Din $\sphericalangle O'OD = 90°$ și $OP \perp O'D \Rightarrow OP = \dfrac{OO' \cdot OD}{O'D} \Rightarrow OP =$
$= a \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} : \dfrac{a\sqrt{6}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{2}{a\sqrt{6}} = \dfrac{a}{\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow OP = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$;
$\mathrm{d}(AC, A'D) = OP \Rightarrow \mathrm{d}(AC, A'D) = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

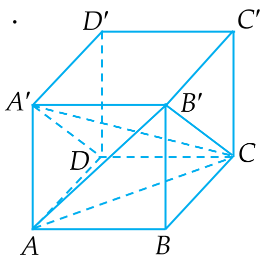
Metoda 4:

Această rezolvare se bazează pe teorema 4.

$\mathcal{V}_{ACDA'} = \dfrac{1}{6} \cdot AC \cdot A'D \cdot \mathrm{d}(AC, A'D) \cdot \sin(\sphericalangle(AC, A'D))$.

Din $AA' \perp (ABCD) \Rightarrow AA' \perp (ADC)$.

Din $AA' \perp (ADC) \Rightarrow \mathcal{V}_{ACDA'} = \dfrac{\mathcal{A}_{ADC} \cdot AA'}{3}$.



$\mathcal{A}_{ADC} = \dfrac{\mathcal{A}_{ABCD}}{2} = \dfrac{a^2}{2}$;

$\mathcal{V}_{ACDA'} = \dfrac{a^2}{2} \cdot a : 3 = \dfrac{a^3}{2} : 3 = \dfrac{a^3}{6}$;

$AC = A'D = a\sqrt{2}$.

Din $A'B' \parallel DC$, $A'B' \equiv DC \Rightarrow A'B'CD$ este paralelogram.

Din $A'B'CD$ – paralelogram $\Rightarrow A'D \parallel B'C$.

Din $A'D \parallel B'C \Rightarrow \sphericalangle(AC, A'D) = \sphericalangle(AC, B'C) = \sphericalangle ACB'$.

Din $AC = AB' = B'C = a\sqrt{2} \Rightarrow \Delta AB'C$ este echilateral.

Din $\Delta AB'C$ – echilateral $\Rightarrow \sphericalangle ACB' = 60°$.

Din $\sphericalangle ACB' = 60° \Rightarrow \sphericalangle(AC, A'D) = 60°$.

Deci, prin înlocuire, obținem: $\frac{a^3}{6} = \frac{1}{6} \cdot a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot$ $\cdot\, d(AC, A'D) \cdot \sin 60° \Rightarrow a^3 = 2a^2 \cdot d(AC, A'D) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a^3 = a^2 \cdot$ $\cdot\, d(AC, A'D) \cdot \sqrt{3}$.

Deci $d(AC, A'D) = \frac{a^3}{a^2\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow d(AC, A'D) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câteva observații, ce rezultă din rezolvările prezentate, care este bine să fie reținute și demonstrate cu ușurință:

1. În rezolvările 2 și 3 s-a demonstrat că $D'B \perp AC$, $D'B \perp A'D$ și $D'B \perp B'C$. Asemănător se putea arăta că $D'B \perp AB'$, $D'B \perp A'C'$ și $D'B \perp DC'$. Deci diagonala cubului $D'B$ este perpendiculară pe toate diagonalele conținute în fețele cubului care nu au vârf comun cu ea. Acest lucru e valabil pentru orice diagonală din cub.

Concluzie:

Într-un cub fiecare diagonală este perpendiculară pe toate diagonalele conținute în fețele cubului care nu au vârf comun cu ea.

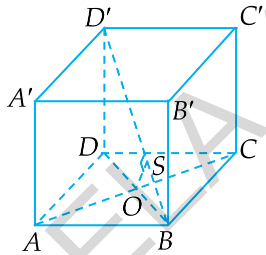
2. În rezolvarea 2 s-a demonstrat că $(AB'C) \parallel (A'DC')$ și $D'P \equiv PS \equiv SB$.

Se poate spune că planele $(AB'C)$ și $(A'DC')$ împart diagonala $D'B$ în trei segmente congruente. Proprietatea este valabilă și dacă $ABCDA'B'C'D'$ este paralelipiped dreptunghic.

Aplicația 2:

Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub și $AB = a$. Calculați $d(D'B, AC)$.

Soluție:



În acest caz avem $D'B \perp AC$, am arătat la metoda 1, și vom folosi teorema 3.

Am arătat la metoda 1 că $AC \perp$ $\perp (D'DB)$.

Ducem $OS \perp D'B$, $S \in D'B$.

Din $AC \perp (D'DB)$ și $OS \subset (D'DB) \Rightarrow$ $\Rightarrow AC \perp OS \Rightarrow OS \perp AC$.

Din $OS \perp AC$ și $OS \perp D'B \Rightarrow d(D'B, AC) = OS$, OS este perpendiculara comună.

Din $D'D \perp (ABCD)$ și $DB \subset (ABCD) \Rightarrow D'D \perp DB \Rightarrow \sphericalangle D'DB =$ $= 90°$.

Cum $\sphericalangle D'DB \equiv \sphericalangle OSB$ și $\sphericalangle DBS \equiv \sphericalangle OBS \Rightarrow \Delta OSB \sim \Delta D'DB \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{OS}{DD'} = \frac{OB}{D'B} \Rightarrow \frac{OS}{a} = \frac{a\sqrt{2}}{2} : a\sqrt{3} \Rightarrow OS = \frac{a^2\sqrt{2}}{2} : a\sqrt{3} \Rightarrow OS =$$

$$= \frac{a^2\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Deci $OS = \dfrac{a\sqrt{6}}{6} \Rightarrow d(D'B, AC) = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Observație:

Am folosit ca exemplu aplicația cu $d(AC, A'D)$ în cubul $ABCDA'B'C'D'$, pentru că am rezolvat-o cu cele 4 metode în care am folosit pe rând definiția, teorema 1, teorema 2 și teorema 4.

Este bine să cunoaștem teoremele 1, 2 și 4 pentru că sunt multe situații în care trebuie să calculăm distanța dintre două drepte necoplanare și definiția este greu de folosit sau greu de aplicat. Dăm câteva exemple:

Aplicația 3:

Cubul $ABCDA'B'C'D'$, cu $AB = a$, considerăm dreptele d și g, astfel încât $d \subset (AB'C)$, $g \subset (A'DC')$ și d, g – necoplanare. Calculați $\text{d}(d, g)$.

Soluție:

Am arătat când am folosit metoda 2 că $(AB'C) \parallel (A'DC')$ și $\text{d}((AB'C), (A'DC')) = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Conform teoremei 2 avem:

$$\left.\begin{array}{l} (AB'C) \parallel (A'DC') \\ d \subset (AB'C), g \subset (A'DC') \\ d, g - \text{necoplanare} \end{array}\right| \Rightarrow \text{d}(d,\ g) = \text{d}((AB'C),(A'DC')).$$

Deci $\text{d}(d, g) = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Este clar că era imposibil de folosit definiția din cauza faptului că dreptele d și g erau oarecare.

Concluzie:

Când despre dreptele necoplanare nu avem informații care să conducă la aflarea perpendicularei comune, mai repede calculăm distanța dintre două plane paralele care conțin respectiv cele două drepte.

Aplicația 4:

Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic. Arătați că $\text{d}(AB, A'B) = \text{d}(AD, BD')$.

Soluție:

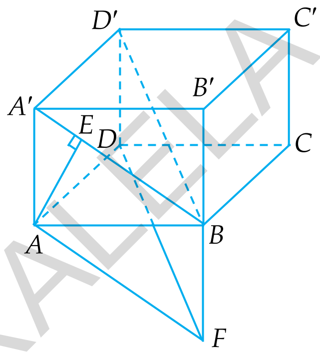
Fie F simetricul punctului B' față de punctul B.

Din $F = \text{sim}_B\, B' \Rightarrow BB' \equiv BF$.

Din $BB' \equiv BF$ și $AA' \equiv BB' \Rightarrow AA' \equiv BF$.

Din $AA' \parallel BB' \Rightarrow AA' \parallel BF$.

Din $AA' \equiv BF$ și $AA' \parallel BF \Rightarrow$ $\Rightarrow AA'BF$ – paralelogram $\Rightarrow A'B \parallel AF$.



Din $A'D' \parallel AD$ și $A'B \parallel AF \Rightarrow$ $\Rightarrow (D'A'B) \parallel (DAF)$.

Din $(D'A'B) \parallel (DAF)$, $A'B \subset (D'A'B)$ și $AD \subset (DAF) \Rightarrow \text{d}(AD, A'B) =$ $= \text{d}((D'A'B), (DAF))$ (1).

Din $(D'A'B) \parallel (DAF)$, $BD' \subset (D'A'B)$ și $AD \subset (DAF) \Rightarrow \text{d}(AD, BD') =$ $= \text{d}((D'A'B), (DAF))$ (2).

Din (1) și (2) $\Rightarrow \text{d}(AD, A'B) = \text{d}(AD, BD')$.

Observație:

Din $AD \parallel A'D'$ și $A'D' \subset (A'BD') \Rightarrow AD \parallel (A'BD')$.

Deci am fost în situația: o dreaptă paralelă cu un plan. Această situație se transformă ușor în plane paralele și poate fi folosită teorema 1.

Aplicația 5:

Fie $ABCA'B'C'$ o prismă dreaptă cu baza triunghiul echilateral ABC. Notăm cu D mijlocul lui BC. Fie $E \in AA'$, $F \in CC'$, astfel încât $CF = 2AE$. Arătați că $\text{d}(AD, BF) = \text{d}(AD, CE)$.

Soluție:

Din $BB' \perp (ABC)$ și $AD \subset (ABC) \Rightarrow B'B \perp AD \Rightarrow AD \perp B'B$.

Din ΔABC – echilateral și $BD \equiv DC \Rightarrow AD \perp BC$.

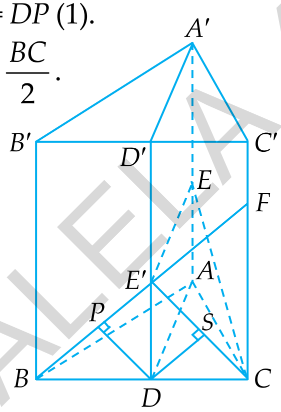
Din $AD \perp B'B$ și $AD \perp BC \Rightarrow AD \perp (BCC'B')$.

Din $AD \perp (BCC'B')$ și $BF \subset (BCC'B') \Rightarrow AD \perp BF$.

Ducem $DP \perp BF$.

Din $AD \perp (BCC'B')$ și $DP \subset (BCC'B') \Rightarrow AD \perp DP \Rightarrow DP \perp AD$.

Din $DP \perp AD$ și $DP \perp BF \Rightarrow \mathrm{d}(AD, BF) = DP$ (1).



Fie D' mijlocul lui $B'C' \Rightarrow B'D' = \dfrac{B'C'}{2} = \dfrac{BC}{2}$.

Din $DB \equiv BC \Rightarrow BD = \dfrac{BC}{2}$.

Deci $BD = B'D' = \dfrac{BC}{2}$ și $BD \parallel B'D' \Rightarrow$
$\Rightarrow$ $BDD'B'$ este paralelogram $\Rightarrow DD' \parallel$
$\parallel BB' \parallel CC' \parallel AA'$.

Din $BB' \perp (ABC)$ și $DD' \parallel BB' \Rightarrow DD' \perp$
$\perp (ABC)$.

Notăm $BF \cap DD' = \{E'\} \Rightarrow E'D \parallel FC$ și $E'D \perp (ABC)$.

Din $BD \equiv DC$ și $E'D \parallel FC \Rightarrow E'D$ este linie mijlocie în $\Delta BCF \Rightarrow$
$\Rightarrow E'D = \dfrac{FC}{2}$. Din $FC = 2AE \Rightarrow AE = \dfrac{FC}{2}$.

Deci $AE = E'D = \dfrac{FC}{2} \Rightarrow AE \equiv E'D$. Din $DD' \parallel AA' \Rightarrow AE \parallel E'D$.

Din $AE \equiv E'D$ și $AE \parallel E'D \Rightarrow AEE'D$ – paralelogram $\Rightarrow EE' \parallel AD$.

Din $EE' \parallel AD$ și $AD \perp (BCC'B') \Rightarrow EE' \perp (BCC'B')$.

Din $EE' \perp (BCC'B')$ și $C \in (BCC'B') \Rightarrow E'C = \mathrm{pr}_{(BCC'B')}\, EC$.

Ducem $DS \perp E'C$.

Din $AD \perp (BCC'B')$, $E'C = \mathrm{pr}_{(BCC'B')}\, EC$, $AD \cap (BCC'B') = \{D\}$ și $DS \perp E'C \Rightarrow \mathrm{d}(AD, CE) = DS$ (2).

Din $E'D \perp (ABC)$ și $BC \subset (ABC) \Rightarrow E'D \perp BC$.

Din $E'D \perp BC$ și $DB \equiv DC \Rightarrow \Delta BE'C$ este isoscel, $E'B \equiv E'C$.

Din $\Delta BE'C$ – isoscel și $E'D \perp BC \Rightarrow E'D$ este bisectoare $\Rightarrow$
$\Rightarrow \sphericalangle BE'D \equiv \sphericalangle CE'D \Rightarrow \sphericalangle PE'D \equiv \sphericalangle SE'D$.

Din $DP \perp E'B$ și $DS \perp E'C \Rightarrow \sphericalangle DPE' \equiv \sphericalangle DSE' = 90°$.

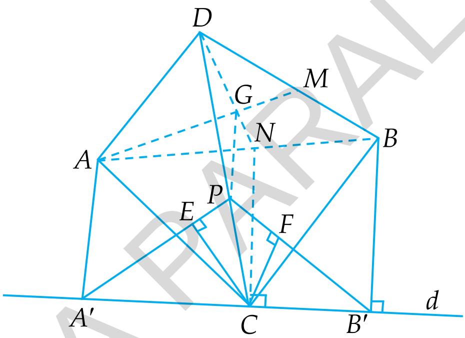
Din $\sphericalangle DPE' \equiv \sphericalangle DSE'$, $E'D \equiv E'D$, $\sphericalangle PE'D \equiv \sphericalangle SE'D \Rightarrow \Delta DPE' \equiv$ $\equiv \Delta DSE' \Rightarrow DP \equiv DS$ (3).

Din (1), (2) și (3) $\Rightarrow$ d(AD, BF) = d(AD, CE).

Aplicația 6:

În tetraedrul $ABCD$, muchia CD este perpendiculară pe planul ABC, N este mijlocul lui AB, M este mijlocul lui DB și $P \in$ $\in DC$, astfel încât $CP = \dfrac{1}{3} \cdot CD$. Arătați că d($CN$, AM) = d(CN, BP).

Soluție:



Construim $d \perp CN$, $C \in d$, $d \subset (ABC)$.

Ducem $AA' \perp d$, $A' \in d$, $BB' \perp d$, $B' \in d$.

Notăm $AM \cap DN = \{G\}$.

Ducem $CE \perp PA'$, $E \in PA'$ și $CF \perp PB'$, $F \in PB'$.

Din $CD \cap d = \{C\} \Rightarrow \alpha = (CD, d)$.

Din $DC \perp (ABC)$ și $DC \subset \alpha \Rightarrow \alpha \perp (ABC)$.

Din $\alpha \perp (ABC) \Rightarrow (ABC) \perp \alpha$.

Din $(ABC) \perp \alpha$, $(ABC) \cap \alpha = d$ și $AA' \perp d \Rightarrow AA' \perp \alpha$.

Din $(ABC) \perp \alpha$, $(ABC) \cap \alpha = d$ și $BB' \perp d \Rightarrow BB' \perp \alpha$.

Din AM mediană în ΔABD, DN mediană în ΔABD și $AM \cap DN = \{G\} \Rightarrow G$ este centru de greutate în $\Delta ABD \Rightarrow \dfrac{GN}{DN} = \dfrac{1}{3}$ și din $CP = \dfrac{1}{3} \cdot CD \Rightarrow \dfrac{CP}{CD} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{GN}{DN} = \dfrac{CP}{CD}$.

Din $\dfrac{GN}{DN} = \dfrac{CP}{CD} \Rightarrow GP \parallel NC$.

Din $(ABC) \perp \alpha$, $(ABC) \cap \alpha = d$ și $NC \perp d \Rightarrow NC \perp \alpha$.

Din $GP \parallel NC$ și $NC \perp \alpha \Rightarrow GP \perp \alpha$.

Din $AA' \perp \alpha$ și $GP \perp \alpha \Rightarrow A'P = \mathrm{pr}_\alpha\, AG$.

Cum $G \in AM \Rightarrow A'P = \mathrm{pr}_\alpha\, AM$.

Din $NC \perp \alpha$, $NC \cap \alpha = \{C\}$, $A'P = \mathrm{pr}_\alpha\, AM$ și $CE \perp A'P \Rightarrow \Rightarrow \mathrm{d}(CN, AM) = CE$.

Din $P \in DC$, $DC \subset \alpha \Rightarrow P \in \alpha$.

Din $P \in \alpha$ și $BB' \perp \alpha \Rightarrow B'P = \mathrm{pr}_\alpha\, BP$.

Din $NC \perp \alpha$, $NC \cap \alpha = \{C\}$, $B'P = \mathrm{pr}_\alpha\, BP$ și $CE \perp B'P \Rightarrow \Rightarrow \mathrm{d}(CN, BP) = B'P$.

Din $AA' \perp d$, $NC \perp d$, $BB' \perp d \Rightarrow AA' \parallel NC \parallel BB'$.

Din $AA' \parallel BB' \Rightarrow ABB'A'$ – trapez.

Din $ABB'A'$ – trapez, $AN \equiv NB$ și $NC \parallel AA' \Rightarrow NC$ este linie mijlocie în trapezul $ABB'A' \Rightarrow A'C \equiv CB'$.

Din $PC \perp A'B'$ și $A'C \equiv CB' \Rightarrow \Delta A'PB'$ este isoscel cu $PA' \equiv PB'$.

Din $\Delta A'PB'$ – isoscel și $PC \perp A'B' \Rightarrow PC$ este bisectoarea $\sphericalangle A'PB'$.

Din PC este bisectoarea $\sphericalangle A'PB'$ și $C \in PC \Rightarrow \mathrm{d}(C, PA') = = \mathrm{d}(C, PB') \Rightarrow CE \equiv CF$.

Din $CE \equiv CF \Rightarrow \mathrm{d}(CN, AM) = \mathrm{d}(CN, BP)$.

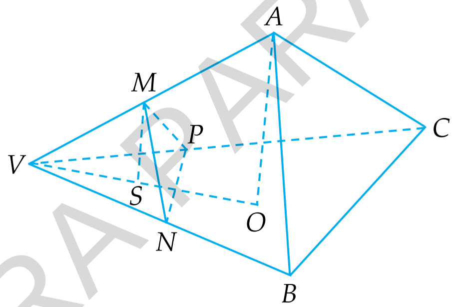
II.2. TIPURI DEOSEBITE DE PROBLEME

O problemă este deosebită dacă rezultatul acelei probleme se folosește în rezolvarea altor probleme sau atunci când rezolvarea problemei respective este deosebită.

1. Pe muchiile $VA = a$, $VB = b$, $VC = c$ ale tetraedrului oarecare $VABC$ se iau, respectiv, punctele M, N, P astfel încât $VM = m$, $VN = n$, $VP = p$. Să se arate că raportul volumelor tetraedrelor $VMNP$ și $VABC$ este $\frac{mnp}{abc}$.

(O. N. 1983, V. Brînzănescu)

Soluție:



Fie $AO \perp (VBC)$, $O \in (VBC)$.

Din $AO \perp (VBC)$ și $AO \subset (VAO) \Rightarrow (VAO) \perp (VBC)$.

Ducem $MS \perp VO$, $S \in VO$.

Din $(VAO) \perp (VBC)$, $(VAO) \cap (VBC) = VO$, $MS \perp VO$, $M \in$ $\in (VAO) \Rightarrow MS \perp (VBC)$.

Din $AO \perp (VBC) \Rightarrow \mathscr{V}_{VABC} = \dfrac{\mathscr{A}_{VBC} \cdot AO}{3}$;

$\mathscr{A}_{VBC} = \dfrac{VB \cdot VC \cdot \sin(\sphericalangle BVC)}{2}$.

Din $AO \perp (VBC)$ și $VO \subset (VBC) \Rightarrow AO \perp VO \Rightarrow \sphericalangle VOA = 90°$.

Cum $\sphericalangle VOA = 90° \Rightarrow \sin(\sphericalangle AVO) = \dfrac{OA}{VA}$.

Deci $OA = VA \cdot \sin(\sphericalangle AVO)$.

$$\mathcal{V}_{VABC} = \frac{VA \cdot VB \cdot VC \cdot \sin(\sphericalangle BVC) \cdot \sin(\sphericalangle AVO)}{6} \quad (1).$$

Din $MS \perp (VBC) \Rightarrow MS \perp (VNP) \Rightarrow \mathcal{V}_{VMNP} = \dfrac{\mathcal{A}_{VNP} \cdot MS}{3}$.

Dar $\mathcal{A}_{VNP} = \dfrac{VN \cdot VP \cdot \sin(\sphericalangle NVP)}{2} = \dfrac{VN \cdot VP \cdot \sin(\sphericalangle BVC)}{2}$.

Din $MS \perp (VBC)$ și $VO \subset (VBC) \Rightarrow MS \perp VO \Rightarrow \sphericalangle VSM = 90°$.

Cum $\sphericalangle VSM = 90° \Rightarrow \sin(\sphericalangle MVS) = \dfrac{MS}{VM}$.

Deci $MS = VM \cdot \sin(\sphericalangle MVS) = VM \cdot \sin(\sphericalangle AVO)$.

$$\mathcal{V}_{VMNP} = \frac{VM \cdot VN \cdot VP \cdot \sin(\sphericalangle BVC) \cdot \sin(\sphericalangle AVO)}{6} \quad (2).$$

Din (1) și (2) $\Rightarrow \dfrac{\mathcal{V}_{VMNP}}{\mathcal{V}_{VABC}} = \dfrac{VM \cdot VN \cdot VP \cdot \sin(\sphericalangle BVC) \cdot \sin(\sphericalangle AVO)}{6}$:

$: \dfrac{VA \cdot VB \cdot VC \cdot \sin(\sphericalangle BVC) \cdot \sin(\sphericalangle AVO)}{6}$.

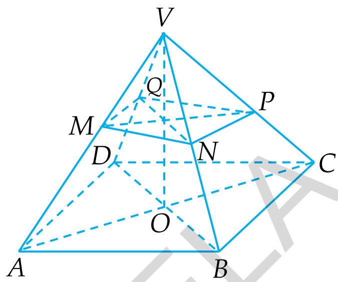
Deci $\dfrac{\mathcal{V}_{VMNP}}{\mathcal{V}_{VABC}} = \dfrac{VM \cdot VN \cdot VP}{VA \cdot VB \cdot VC} = \dfrac{m \cdot n \cdot p}{a \cdot b \cdot c}$.

Această problemă este deosebită, deoarece concluzia ei se folosește în rezolvarea altor probleme.

2. Fie $VABC$ o piramidă în care $ABCD$ este dreptunghi și $VA \equiv VB \equiv VC \equiv VD$. Punctele M, N, P, Q situate pe muchiile VA, VB, VC, respectiv VD sunt coplanare dacă și numai dacă $\dfrac{1}{VM} + \dfrac{1}{VP} = \dfrac{1}{VN} + \dfrac{1}{VQ}$.

Soluție:

Din $ABCD$ – dreptunghi rezultă că $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{BCD} = \mathcal{A}_{CDA} = \mathcal{A}_{DAB} = $ $= \frac{1}{2} \cdot \mathcal{A}_{ABCD}$ (1).



Din $VA \equiv VC$ și $OA \equiv OC \Rightarrow$ $\Rightarrow VO \perp AC$.

Din $VB \equiv VD$ și $OB \equiv OD \Rightarrow$ $\Rightarrow VO \perp BD$.

Din $VO \perp AC$ și $VO \perp BD \Rightarrow$ $\Rightarrow VO \perp (ABCD)$ (2).

Din (1) rezultă că $\frac{\mathcal{A}_{ABC} \cdot VO}{3} = \frac{\mathcal{A}_{BCD} \cdot VO}{3} = \frac{\mathcal{A}_{CDA} \cdot VO}{3} = $ $= \frac{\mathcal{A}_{DAB} \cdot VO}{3}$ (3).

Din (2) și (3) $\Rightarrow \mathcal{V}_{VABC} = \mathcal{V}_{VBCD} = \mathcal{V}_{VCDA} = \mathcal{V}_{VDAB} = \frac{1}{2} \cdot \mathcal{V}_{VABCD}$.

I. M, N, P, Q – coplanare $\Rightarrow \frac{1}{VM} + \frac{1}{VP} = \frac{1}{VN} + \frac{1}{VQ}$.

Din M, N, P, Q – coplanare $\Rightarrow \mathcal{V}_{VMNP} = \mathcal{V}_{VMQP} = \mathcal{V}_{VQMN} = $ $= \mathcal{V}_{VNPQ} = \mathcal{V}_{VMNPQ}$.

Dacă împărțim prin $\frac{1}{2} \cdot \mathcal{V}_{VABCD}$, obținem:

$$\frac{\mathcal{V}_{VMNP}}{\frac{1}{2} \cdot \mathcal{V}_{VABCD}} + \frac{\mathcal{V}_{VMQP}}{\frac{1}{2} \cdot \mathcal{V}_{VABCD}} = \frac{\mathcal{V}_{VQMN}}{\frac{1}{2} \cdot \mathcal{V}_{VABCD}} = \frac{\mathcal{V}_{VNPQ}}{\frac{1}{2} \cdot \mathcal{V}_{VABCD}} \Rightarrow \frac{\mathcal{V}_{VMNP}}{\mathcal{V}_{VABC}} +$$

$$+ \frac{\mathcal{V}_{VMQP}}{\mathcal{V}_{VADC}} = \frac{\mathcal{V}_{VQMN}}{\mathcal{V}_{VDAB}} = \frac{\mathcal{V}_{VNPQ}}{\mathcal{V}_{VBCD}} \Rightarrow \frac{VM \cdot VN \cdot VP}{VA \cdot VB \cdot VC} + \frac{VM \cdot VQ \cdot VP}{VA \cdot VD \cdot VC} =$$

$$= \frac{VQ \cdot VM \cdot VN}{VD \cdot VA \cdot VB} + \frac{VN \cdot VP \cdot VQ}{VB \cdot VC \cdot VD} \quad (4).$$

Din $VA \equiv VB \equiv VC \equiv VD \Rightarrow VA \cdot VB \cdot VC = VA \cdot VD \cdot VC = $ $= VD \cdot VA \cdot VB = VB \cdot VC \cdot VD$ (5).

Din (4) și (5) $\Rightarrow VM \cdot VN \cdot VP + VM \cdot VQ \cdot VP = VQ \cdot VM \cdot VN +$ $+ VN \cdot VP \cdot VQ$ (6).

Dacă împărțim egalitatea (6) prin $VM \cdot VN \cdot VP \cdot VQ \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{1}{VQ} + \frac{1}{VN} = \frac{1}{VP} + \frac{1}{VM}$, adică $= \frac{1}{VM} + \frac{1}{VP} = \frac{1}{VN} + \frac{1}{VQ}$;

II. $\frac{1}{VM} + \frac{1}{VP} = \frac{1}{VN} + \frac{1}{VQ} \Rightarrow M, N, P, Q$ – coplanare.

Presupunem că M, N, P, Q nu sunt coplanare, rezultă că $(QMN) \cap VC = \{P'\}$, $P' \neq P \Rightarrow M, N, P', Q$ sunt coplanare $\Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{1}{VM} + \frac{1}{VP'} = \frac{1}{VN} + \frac{1}{VQ} \Rightarrow \frac{1}{VP'} = \frac{1}{VN} + \frac{1}{VQ} - \frac{1}{VM}$ (7).

Din ipoteza implicației $\Rightarrow \frac{1}{VP} = \frac{1}{VN} + \frac{1}{VQ} - \frac{1}{VM}$ (8).

Din (7) și (8) $\Rightarrow \frac{1}{VP'} = \frac{1}{VP} \Rightarrow VP' = VP \Rightarrow P' = P$, absurd, rezultă că presupunerea făcută este falsă $\Rightarrow M, N, P, Q$ sunt coplanare.

Această problemă merită reținută pentru că ea reprezintă o teoremă de coplanaritate într-o piramidă cu baza dreptunghi și muchiile laterale congruente.

3. Se dă cubul $ABCDA'B'C'D'$ de muchie a. Notăm cu P, respectiv Q proiecțiile vârfului B' pe planele $(BC'D)$ și $(A'DC')$.

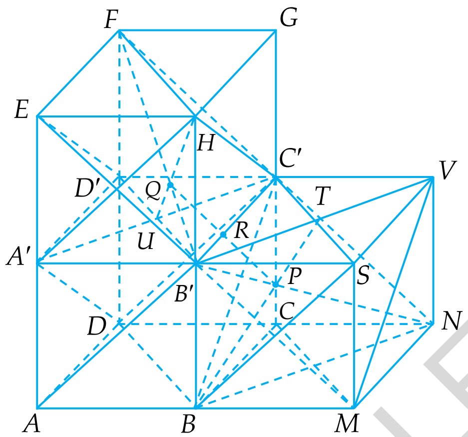
a) Să se arate că punctele B', P, C, Q sunt coplanare.

b) Să se demonstreze că PQ este perpendiculară pe planul $(AB'C')$ și să se afle distanța dintre dreptele PQ și AB'.

(O. N. 1995, S. Peligrad)

Soluție:

Construim cuburile $A'B'C'D'EHGF$ și $BB'C'CMSVN$.



a) Din $AD \parallel B'C'$ și $AD \equiv B'C' \Rightarrow AB'C'D$ este paralelogram $\Rightarrow$ $\Rightarrow AB' \parallel DC'$ (1).

Din $AB \parallel B'S$ și $AB \equiv B'S \Rightarrow ABSB'$ este paralelogram $\Rightarrow$ $\Rightarrow AB' \parallel BS$ (2).

Din (1) și (2) $\Rightarrow DC' \parallel BS \Rightarrow B, D, C', S$ – coplanare $\Rightarrow (BC'D) =$ $= (BSC')$.

Din $NV \perp (B'SVC')$ și $C'S \subset (B'SVC') \Rightarrow NV \perp C'S \Rightarrow C'S \perp NV$.

Din $B'SVC'$ pătrat $\Rightarrow C'S \perp B'V$.

Din $C'S \perp NV$ și $C'S \perp B'P \Rightarrow C'S \perp (NVB')$.

Din $C'S \perp (NVB')$ și $B'N \subset (NVB') \Rightarrow C'S \perp B'N \Rightarrow B'N \perp C'S$.

Din $NM \perp (BMSB')$ și $BS \subset (BMSB') \Rightarrow NM \perp BS \Rightarrow BS \perp NM$.

Din $BMSB'$ – pătrat $\Rightarrow BS \perp B'M$.

Din $BS \perp NM$ și $BS \perp B'M \Rightarrow BS \perp (B'MN)$.

Din $BS \perp (B'MN)$ și $B'N \subset (B'MN) \Rightarrow BS \perp B'N \Rightarrow B'N \perp BS$.

Din $B'N \perp C'S$ și $B'N \perp BS \Rightarrow B'N \perp (BSC')$.

Notăm $B'V \cap C'S = \{T\}$.

Din $BB' \parallel VN$, $BB' \equiv VN \Rightarrow BB'VN$ este paralelogram.

Din $BB'VN$ – paralelogram $\Rightarrow B'N \cap BT = \{P\}$, $P \in (BSC')$.

Din $B'N \perp (BSC') \Rightarrow B'P \perp (BSC')$.

Din $B'N \perp (BSC')$ și $(BSC') = (BC'D) \Rightarrow B'P \perp (BC'D)$, $P \in (BC'D)$.

Din $B'P \perp (BC'D)$, $P \in (BC'D) \Rightarrow P = \text{pr}_{(BC'D)}\, B'$.

Din $EH \parallel D'C'$, $EH \equiv D'C' \Rightarrow EHC'D'$ este paralelogram.

Din $EHC'D'$ – paralelogram $\Rightarrow HC' \parallel D'E$ (3).

Din $A'E \parallel DD'$ și $A'E \equiv DD' \Rightarrow DD'EA'$ este paralelogram $\Rightarrow$ $\Rightarrow DE' \parallel A'D$ (4).

Din (3) și (4) $\Rightarrow HC' \parallel A'D \Rightarrow A', D, C', H$ – coplanare $\Rightarrow$ $\Rightarrow (A'DC') = (HA'C')$.

Din $FD' \perp (A'B'C'D')$ și $A'C' \subset A'B'C'D' \Rightarrow FD' \perp A'C' \Rightarrow A'C' \perp$ $\perp FD'$.

Din $A'B'C'D'$ – pătrat $\Rightarrow A'C' \perp B'D'$.

Din $A'C' \perp FD'$ și $A'C' \perp B'D' \Rightarrow A'C' \perp (FD'B')$.

Din $A'C' \perp (FD'B')$ și $B'F \subset (FD'B') \Rightarrow A'C' \perp B'F \Rightarrow B'F \perp A'C'$.

Din $FE \perp (A'B'HE)$ și $A'H \subset (A'B'HE) \Rightarrow FE \perp A'H \Rightarrow A'H \perp FE$.

Din $A'B'HE$ – pătrat $\Rightarrow A'H \perp B'E$.

Din $A'H \perp FE$ și $A'H \perp B'E \Rightarrow A'H \perp (B'EF)$.

Din $A'H \perp (B'EF)$ și $B'F \subset (B'EF) \Rightarrow A'H \perp B'F \Rightarrow B'F \perp A'H$.

Din $B'F \perp A'C'$ și $B'F \perp A'H \Rightarrow B'F \perp (A'HC')$.

Din $B'H \parallel D'F$, $B'H \equiv D'F \Rightarrow B'D'FH$ este paralelogram.

Din $B'D'FH$ – paralelogram $\Rightarrow BF' \cap HU = \{Q\}$.

Din $B'F \perp (A'HC') \Rightarrow B'Q \perp (A'HC')$, $Q \in (A'HC')$.

Din $B'Q \perp (A'HC')$, $Q \in (A'HC')$ și $(A'HC') = (A'DC') \Rightarrow B'Q \perp$ $\perp (A'DC')$, $Q \in (A'DC')$.

Din $B'Q \perp (A'DC')$, $Q \in (A'DC') \Rightarrow Q = \text{pr}_{(A'DC')}\, B'$.

Avem F, D', D – coliniare, D, C, N – coliniare și $C' \in (FDN)$; $\sphericalangle FC'N = \sphericalangle FC'D' + \sphericalangle D'C'C + \sphericalangle CC'N = 45° + 90° + 45° = 180°$.

Deci $\sphericalangle FC'N = 180° \Rightarrow C' \in FN$.

Din $Q \in B'F$, $P \in B'N$, $C' \in FN \Rightarrow B', P, C', Q$ aparțin planului $(B'NF) \Rightarrow B', P, C', Q$ sunt coplanare.

b) Din $B'H \parallel D'F$, $B'H \equiv D'F \Rightarrow B'D'FH$ este paralelogram $\Rightarrow$ $\Rightarrow B'D' \parallel HF \Rightarrow B'U \parallel HF$.

Din $B'U \parallel HF \Rightarrow \Delta B'QU \sim \Delta FQH \Rightarrow \dfrac{B'Q}{QF} = \dfrac{B'U}{HF} = \dfrac{1}{2}$ (5).

Din $BB'VN$ – paralelogram $\Rightarrow B'V \parallel BN \Rightarrow B'T \parallel BN$.

Din $B'T \parallel BN \Rightarrow \Delta B'PT \sim \Delta NPB \Rightarrow \dfrac{B'P}{PN} = \dfrac{B'T}{BN} = \dfrac{1}{2}$ (6).

Din (5) și (6) $\Rightarrow \dfrac{B'Q}{QF} = \dfrac{B'P}{PN} \Rightarrow PQ \parallel NF$.

În $\Delta NB'F$ avem $B'N = B'F = a\sqrt{3}$ și $C'F = C'N = a\sqrt{2} \Rightarrow B'C' \perp$ $\perp FN \Rightarrow FN \perp B'C'$.

Din $FN \perp B'C'$ și $PQ \parallel NF \Rightarrow PQ \perp B'C'$.

În ΔDFN avem $DF = DN = 2a$ și $C'F = C'N = a\sqrt{2} \Rightarrow DC' \perp$ $\perp FN \Rightarrow FN \perp DC'$.

Din $FN \perp DC'$ și $PQ \parallel NF \Rightarrow PQ \perp DC'$.

Din $PQ \perp B'C'$ și $PQ \perp DC' \Rightarrow PQ \perp (B'C'D)$.

Cum $AD \parallel B'C' \Rightarrow A, D, C', B'$ sunt coplanare $\Rightarrow (B'C'D) =$ $= (AB'C')$.

Cum $PQ \perp (B'C'D)$ și $(B'C'D) = (AB'C') \Rightarrow PQ \perp (AB'C')$.

Notăm $PQ \cap B'C' = \{R\}$.

Cum $B'C' \perp (ABB'A')$ și $AB' \subset (ABB'A') \Rightarrow B'C' \perp AB' \Rightarrow RB' \perp$ $\perp AB'$. Dar $PQ \perp B'C' \Rightarrow RB' \perp PQ$.

Cum $RB' \perp PQ$ și $RB' \perp AB' \Rightarrow \mathrm{d}(PQ, AB') = RB'$ (7).

Din $PQ \parallel NF \Rightarrow RQ \parallel C'F$.

Din $RQ \parallel C'F \Rightarrow \dfrac{B'R}{RC'} = \dfrac{B'Q}{QF} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{B'R}{B'R + RC'} = \dfrac{1}{1+2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{B'R}{B'C'} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow B'R = \dfrac{B'C'}{3} = \dfrac{a}{3}$ (8).

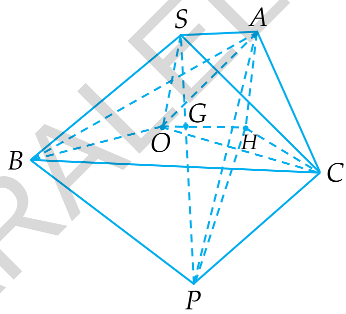
Din (7) și (8) $\Rightarrow \mathrm{d}(PQ, AB') = \dfrac{a}{3}$.

4. De o parte și de alta a planului triunghiului ABC se consideră punctele S și P, astfel încât $SA = SB = SC$ și $PA \perp PB \perp$ $\perp PC \perp PA$. Știind că volumul piramidei $PABC$ este egal cu dublul volumului $SABC$, să se arate că dreapta SP trece prin centrul de greutate al triunghiului ABC.

(O. N. 2009, Cristian Lazăr)

Soluție:

Din $SO \perp (ABC)$, $O \in (ABC)$ și $PH \perp (ABC)$, $H \in (ABC)$.



Ducem $SO \perp (ABC)$, OA, OB, $OC \subset (ABC) \Rightarrow SO \perp OA$, $SO \perp$ $\perp OB$, $SO \perp OC \Rightarrow \sphericalangle SOA = \sphericalangle SOB =$ $= \sphericalangle SOC = 90°$.

Din $\sphericalangle SOA = \sphericalangle SOB = \sphericalangle SOC =$ $= 90°$, $SA = SB = SC$ și $SO = SO =$ $= SO \Rightarrow \Delta SOA \equiv \Delta SOB \equiv \Delta SOC \Rightarrow$ $\Rightarrow OA \equiv OB \equiv OC \Rightarrow O$ este centrul cercului circumscris ΔABC.

Din $PC \perp PB$ și $PC \perp PA \Rightarrow PC \perp (PAB)$.

Din $PC \perp (PAB)$ și $AB \subset (PAB) \Rightarrow PC \perp AB \Rightarrow AB \perp PC$.

Din $PH \perp (ABC)$ și $AB \subset (ABC) \Rightarrow PH \perp AB \Rightarrow AB \perp PH$.

Din $AB \perp PC$ și $AB \perp PH \Rightarrow AB \perp (PHC)$.

Din $AB \perp (PHC)$ și $HC \subset (PHC) \Rightarrow AB \perp HC \Rightarrow CH \perp AB$.

Din $PA \perp PB$ și $PA \perp PC \Rightarrow PA \perp (PBC)$.

Din $PA \perp (PBC)$ și $BC \subset (PBC) \Rightarrow PA \perp BC \Rightarrow BC \perp PA$.

Din $PH \perp (ABC)$ și $BC \subset (ABC) \Rightarrow PH \perp BC \Rightarrow BC \perp PH$.

Din $BC \perp PA$ și $BC \perp PH \Rightarrow BC \perp (PHA)$.

Din $BC \perp (PHA)$ și $HA \subset (PHA) \Rightarrow BC \perp HA \Rightarrow AH \perp BC$.

Din $AH \perp BC$ și $CH \perp AB \Rightarrow H$ este ortocentrul ΔABC.

Din $SO \perp (ABC) \Rightarrow \mathcal{V}_{SABC} = \dfrac{\mathcal{A}_{ABC} \cdot SO}{3}$.

Din $PH \perp (ABC) \Rightarrow \mathcal{V}_{PABC} = \dfrac{\mathcal{A}_{ABC} \cdot PH}{3}$.

$\mathcal{V}_{PABC} = 2 \cdot \mathcal{V}_{SABC} \Rightarrow \dfrac{\mathcal{V}_{PABC}}{\mathcal{V}_{SABC}} = 2 \Rightarrow \dfrac{\mathcal{A}_{ABC} \cdot PH}{3} : \dfrac{\mathcal{A}_{ABC} \cdot SO}{3} = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\mathcal{A}_{ABC} \cdot PH}{3} \cdot \dfrac{3}{\mathcal{A}_{ABC} \cdot SO} = 2 \Rightarrow \dfrac{PH}{SO} = 2 \Rightarrow \dfrac{SO}{PH} = \dfrac{1}{2}$.

I. Dacă $O = H \Rightarrow \Delta ABC$ este echilateral $\Rightarrow O = H = G$.

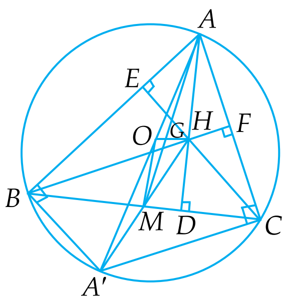
Dacă $O = H \Rightarrow PO \perp (ABC)$.

Din $PO \perp (ABC)$ și $SO \perp (ABC) \Rightarrow O \in PS$ și cum $O = G \Rightarrow$ $\Rightarrow G \in PS$.

II. Dacă $O \neq H$:

Arătăm că într-un triunghi oarecare punctele O, G și H sunt coliniare și $G \in (OH)$, astfel încât $GH = 2 \cdot OG$. Dreapta care conține punctele O, G, H într-un triunghi oarecare se numește dreapta lui Euler.

O – centrul cercului circumscris;
G – centrul de greutate;
H – ortocentrul.



Fie A' punctul diametral opus punctului $A \Rightarrow \sphericalangle ABA' = \dfrac{\overset{\frown}{ACA'}}{2} = \dfrac{180°}{2} = 90° \Rightarrow A'B \perp AB$; $\sphericalangle ACA' = \dfrac{\overset{\frown}{ABA'}}{2} = \dfrac{180°}{2} = 90° \Rightarrow A'C \perp AC$.

Din H – ortocentrul $\Delta ABC \Rightarrow CH \perp AB$ și $BH \perp AC$.

Din $A'B \perp AB$, $CH \perp AB \Rightarrow A'B \parallel CH$.

Din $A'C \perp AC$, $BH \perp AC \Rightarrow A'C \parallel BH$.

Din $A'B \parallel CH$ și $A'C \parallel BH \Rightarrow A'BHC$ este paralelogram $\Rightarrow$ $\Rightarrow A'H \cap BC = \{M\}$, unde $BM \equiv MC$ și $A'M \equiv MH$.

Din $A'M \equiv MH$ și $A'O \equiv OA \Rightarrow OM$ este linie mijlocie în $\Delta AA'H \Rightarrow OM = \dfrac{AH}{2} \Rightarrow OM \parallel AH$.

Din $OM = \dfrac{AH}{2} \Rightarrow \dfrac{OM}{AH} = \dfrac{1}{2}$.

Din $OM \parallel AH \Rightarrow \Delta OGM \sim \Delta HGA$, unde $AM \cap OH = \{G\}$.

Din $\Delta OGM \sim \Delta HGA \Rightarrow \dfrac{MG}{AG} = \dfrac{OG}{GH} = \dfrac{OM}{AH} = \dfrac{1}{2}$.

Din $\dfrac{MG}{AG} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{AG}{MG} = \dfrac{2}{1} \Rightarrow \dfrac{AG}{AG+MG} = \dfrac{2}{2+1} \Rightarrow \dfrac{AG}{AM} = \dfrac{2}{3}$.

Din $\dfrac{OG}{GH} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow GH = 2 \cdot OG$.

Din $BM \equiv MC \Rightarrow AM$ este mediană în ΔABC.

Din AM – mediană în ΔABC, $G \in AM$ și $\dfrac{AG}{AM} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow$ $\Rightarrow G$ este centru de greutate în ΔABC.

Din $AM \cap OH = \{G\} \Rightarrow G \in OH$.

Deci, $G \in OH$ și $GH = 2 \cdot OG \Rightarrow$ centrul de greutate G este punctul situat pe OH, astfel încât $GH = 2 \cdot OG$ (1).

Din $PH \perp (ABC)$ și $SO \perp (ABC) \Rightarrow PH \parallel SO$.

Din $PH \parallel SO \Rightarrow P, H, S, O$ sunt coplanare $\Rightarrow SP \cap OH = \{Q\}$.

Din $PH \parallel SO \Rightarrow \Delta SOQ \sim \Delta PHQ \Rightarrow \dfrac{SO}{PH} = \dfrac{OQ}{HQ}$.

Din $\dfrac{SO}{PH} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{OQ}{HQ} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow QH = 2 \cdot QO$, $Q \in OH$ (2).

Din (1) și (2) $\Rightarrow Q = G$.

Din $SP \cap OH = \{Q\} \Rightarrow Q \in SP \Rightarrow G \in SP$.

5. În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, cu $AB = a$, $BC = b$, $CC' = c$, notăm cu P și Q proiecțiile vârfului A pe $A'B$, respectiv $A'D$ și cu R și S proiecțiile vârfului C pe BC', respectiv $C'D$.

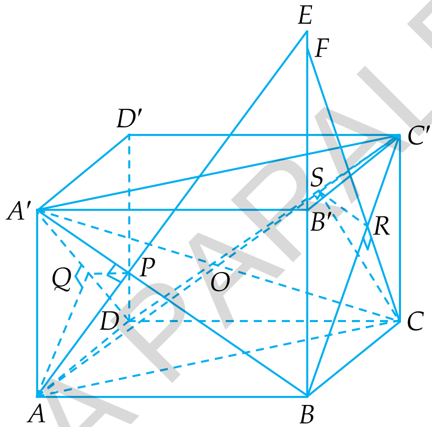
a) Arătați că $A'C \perp (APQ)$.

b) Arătați că dacă $(APQ) \perp (CRS)$, atunci $a^2 + b^2 = c^2$.

c) Cercetați dacă dreptele AP, BB' și CR sunt concurente.

(O. J., 1992, Olt, Sibiu)

Soluție:



a) Din $BC \perp (ABB'A')$ și $AP \subset (ABB'A') \Rightarrow BC \perp AP \Rightarrow AP \perp BC$.

Din $AP \perp BC$ și $AP \perp A'B \Rightarrow AP \perp (A'BC)$.

Din $AP \perp (A'BC)$ și $A'C \subset (A'BC) \Rightarrow AP \perp A'C \Rightarrow A'C \perp AP$.

Din $DC \perp (ADD'A')$ și $AQ \subset (ADD'A') \Rightarrow DC \perp AQ \Rightarrow AQ \perp DC$.

Din $AQ \perp DC$ și $AQ \perp A'D \Rightarrow AQ \perp (A'DC)$.

Din $AQ \perp (A'DC)$ și $A'C \subset (A'DC) \Rightarrow AQ \perp A'C \Rightarrow A'C \perp AQ$.

Din $A'C \perp AP$ și $A'C \perp AQ \Rightarrow A'C \perp (APQ)$;

b) Din $AB \perp (BCC'B')$ și $CR \subset (BCC'B') \Rightarrow AB \perp CR \Rightarrow CR \perp AB$.

Din $CR \perp AB$ și $CR \perp BC' \Rightarrow CR \perp (ABC')$.

Din $CR \perp (ABC')$ și $AC' \subset (ABC') \Rightarrow CR \perp AC' \Rightarrow AC' \perp CR$.

Din $AD \perp (DCC'D')$ și $CS \subset (DCC'D') \Rightarrow AD \perp CS \Rightarrow CS \perp AD$.

Din $CS \perp AD$ și $CS \perp DC' \Rightarrow CS \perp (ADC')$.

Din $CS \perp (ADC')$ și $AC' \subset (ADC') \Rightarrow CS \perp AC' \Rightarrow AC' \perp CS$.

Din $AC' \perp CS$ și $AC' \perp CR \Rightarrow AC' \perp (CRS)$.

Din $A'C \perp (APQ)$ și $AC' \perp (CRS) \Rightarrow \sphericalangle((APQ), (CRS)) = \sphericalangle(A'C, AC')$.

Din $AA' \parallel CC'$ și $AA' \equiv CC' \Rightarrow ACC'A'$ este paralelogram.

Din $AA' \perp (ABCD)$ și $AC \subset (ABCD) \Rightarrow AA' \perp AC \Rightarrow \sphericalangle A'AC = 90°$.

Din $ACC'A'$ – paralelogram și $\sphericalangle A'AC = 90° \Rightarrow ACC'A'$ este dreptunghi.

Din $ACC'A'$ – dreptunghi $\Rightarrow A'C \cap AC' = \{O\}$.

Din $ACC'A'$ – dreptunghi și $A'C \cap AC' = \{O\} \Rightarrow \sphericalangle(A'C, AC') = \sphericalangle A'OA$.

Din $(APQ) \perp (CRS) \Rightarrow \sphericalangle((APQ), (CRS)) = 90° \Rightarrow \sphericalangle(A'C, AC') = 90° \Rightarrow \sphericalangle A'OA = 90° \Rightarrow A'A^2 = OA^2 + OA'^2$.

$ABCDA'B'C'D'$ – paralelipiped dreptunghic $\Rightarrow A'C^2 = AC'^2 = AB^2 + BC^2 + CC'^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow A'C = AC' = \sqrt{a^2+b^2+c^2} \Rightarrow OA = OA' = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$; $A'A^2 = OA^2 + OA'^2 \Rightarrow c^2 = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{4} + \dfrac{a^2+b^2+c^2}{4} \Rightarrow c^2 = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{2} \Rightarrow 2c^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$.

Deci $(APQ) \perp (CRS) \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$;

c) Notăm $AP \cap BB' = \{E\}$ și $CR \cap BB' = \{F\}$.

$A'B = \sqrt{AB^2 + AA'^2} = \sqrt{a^2+c^2}$.

Din $\sphericalangle A'AB = 90°$ și $AP \perp A'B \Rightarrow AP = \dfrac{AB \cdot AA'}{A'B} = \dfrac{a \cdot c}{\sqrt{a^2+c^2}}$.

Din $\sphericalangle ABE = 90°$ și $BP \perp AE \Rightarrow AB^2 = AE \cdot AP \Rightarrow AE = \dfrac{AB^2}{AP} =$

$= a^2 : \dfrac{a \cdot c}{\sqrt{a^2 + c^2}} = \dfrac{a\sqrt{a^2 + c^2}}{c}$;

$BE^2 = AE^2 - AB^2 = \dfrac{a^2(a^2 + c^2)}{c^2} - a^2 = \dfrac{a^4 + a^2c^2 - a^2c^2}{c^2} = \dfrac{a^4}{c^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow BE = \dfrac{a^2}{c}$.

Din $\sphericalangle BCC' = 90° \Rightarrow BC' = \sqrt{b^2 + c^2}$.

Din $\sphericalangle BCC' = 90°$ și $CR \perp BC' \Rightarrow CR = \dfrac{BC \cdot CC'}{BC'} \Rightarrow CR =$

$= \dfrac{b \cdot c}{\sqrt{b^2 + c^2}}$. Din $\sphericalangle CBF = 90°$ și $BR \perp CF \Rightarrow BC^2 = CF \cdot CR$.

Din $BC^2 = CF \cdot CR \Rightarrow CF = \dfrac{BC^2}{CR} = b^2 : \dfrac{b \cdot c}{\sqrt{b^2 + c^2}} \Rightarrow CF =$

$= \dfrac{b\sqrt{b^2 + c^2}}{c}$;

$BF^2 = CF^2 - BC^2 = \dfrac{b^2(b^2 + c^2)}{c^2} - b^2 = \dfrac{b^4 + b^2c^2 - b^2c^2}{c^2} \Rightarrow BF^2 =$

$= \dfrac{b^4}{c^2} \Rightarrow BF = \dfrac{b^2}{c}$.

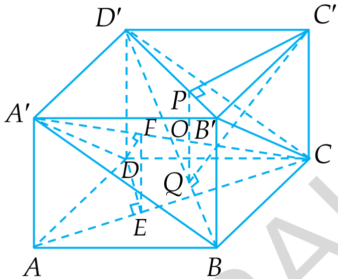
1. Dacă $a \neq b \Rightarrow \dfrac{a^2}{c} \neq \dfrac{b^2}{c} \Rightarrow BE \neq BF \Rightarrow AP$, BB' și CR nu sunt concurente.

2. Dacă $a = b \Rightarrow \dfrac{a^2}{c} = \dfrac{b^2}{c} \Rightarrow BE = BF \Rightarrow AP$, BB' și CR sunt concurente.

6. În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ avem $AB = a$, $BC = b$, $AA' = c$. Notăm cu E și F proiecțiile punctului D pe AC, respectiv pe $A'C$ și cu P și Q proiecțiile punctului C' pe $B'D'$, respectiv pe BD'. Arătați că dacă $(DEF) \perp (C'PQ)$, atunci $b^2 = a^2 + c^2$.

(O. J., 2002, subiect unic)

Soluție:



Din $AA' \perp (ABCD)$ și $DE \subset (ABCD) \Rightarrow AA' \perp DE \Rightarrow DE \perp AA'$.

Din $DE \perp AA'$ și $DE \perp AC \Rightarrow DE \perp (A'AC)$.

Din $DE \perp (A'AC)$ și $A'C \subset (A'AC) \Rightarrow DE \perp A'C \Rightarrow A'C \perp DE$.

Din $DF \perp A'C \Rightarrow A'C \perp DF$.

Din $A'C \perp DF$ și $A'C \perp DE \Rightarrow A'C \perp (DEF)$.

Din $BB' \perp (A'B'C'D')$ și $C'P \subset (A'B'C'D') \Rightarrow BB' \perp C'P \Rightarrow C'P \perp BB'$.

Din $C'P \perp BB'$ și $C'P \perp B'D' \Rightarrow C'P \perp (BB'D')$.

Din $C'P \perp (BB'D')$ și $BD' \subset (BB'D') \Rightarrow C'P \perp BD' \Rightarrow BD' \perp C'P$.

Din $C'Q \perp BD' \Rightarrow BD' \perp C'Q$.

Din $BD' \perp C'Q$ și $BD' \perp C'P \Rightarrow BD' \perp (C'PQ)$.

Din $A'C \perp (DEF)$ și $BD' \perp (C'PQ) \Rightarrow \sphericalangle((DEF), (C'PQ)) = \sphericalangle(A'C, BD')$.

Din $A'D' \parallel BC$, $A'D' \equiv BC \Rightarrow A'BCD'$ este paralelogram.

Din $BC \perp (ABB'A')$ și $A'B \subset (ABB'A') \Rightarrow BC \perp A'B \Rightarrow \sphericalangle A'BC = 90°$.

Din $A'BCD'$ – paralelogram și $\sphericalangle A'BC = 90° \Rightarrow A'BCD'$ este dreptunghi.

Din $A'BCD'$ – dreptunghi $\Rightarrow A'C \cap BD' = \{O\}$.

Din $A'C \cap BD' = \{O\} \Rightarrow \sphericalangle(A'C, BD') = \sphericalangle BOC$.

Deci $\sphericalangle((DEF), (C'PQ)) = 90° \Leftrightarrow \sphericalangle BOC = 90°$.

Din $ABCDA'B'C'D'$ – paralelipiped dreptunghic $\Rightarrow A'C = = BD' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ și $OB = OC = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2}$.

Deci, $\sphericalangle BOC = 90° \Rightarrow BC^2 = OB^2 + OC^2 \Rightarrow b^2 = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{4} + + \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{4} \Rightarrow b^2 = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \Rightarrow 2b^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = a^2 + c^2$.

Cum $(DEF) \perp (C'PQ) \Rightarrow \sphericalangle((DEF), (C'PQ)) = 90° \Rightarrow (DEF) \perp \perp (C'PQ) \Rightarrow b^2 = a^2 + c^2$.

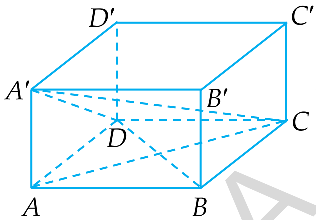
Alte aplicații pentru teorema: „Într-un tetraedru $ABCD$ avem $\mathcal{V}_{ABCD} = \dfrac{1}{6} \cdot AB \cdot CD \cdot d(AB, CD) \cdot \sin(\sphericalangle(AB, CD))$”.

1. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic. Se știe că $BD = 4\sqrt{3}$, $A'C = 6\sqrt{2}$, $d(BD, A'C) = 2$ cm și $\mathcal{V}_{A'BCD} = 8\sqrt{6}$ cm³. Arătați că $ABCDA'B'C'D'$ este cub.

Soluție:

$\mathcal{V}_{A'BCD} = \dfrac{1}{6} \cdot BD \cdot A'C \cdot d(BD, A'C) \cdot \sin(\sphericalangle(BD, A'C)) \Rightarrow 8\sqrt{6} = \dfrac{1}{6} \cdot \cdot 4\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{2} \cdot 2 \cdot \sin(\sphericalangle(BD, A'C)) \Rightarrow 8\sqrt{6} = 8\sqrt{6} \cdot \sin(\sphericalangle(BD, A'C)) \Rightarrow \Rightarrow \sin(\sphericalangle(BD, A'C)) = 1 \Rightarrow \sphericalangle(BD, A'C) = 90° \Rightarrow BD \perp A'C$.

Din $AA' \perp (ABCD)$ și $BD \subset (ABCD) \Rightarrow AA' \perp BD \Rightarrow BD \perp$ $\perp AA'$.



Din $BD \perp AA'$ și $BD \perp A'C \Rightarrow BD \perp$ $\perp (A'AC)$.

Din $BD \perp (A'AC)$ și $AC \subset (A'AC) \Rightarrow$ $\Rightarrow BD \perp AC$.

Din $ABCD$ – dreptunghi și $BD \perp$ $\perp AC \Rightarrow ABCD$ – pătrat.

Din $ABCD$ – pătrat $\Rightarrow BD = AB\sqrt{2} \Rightarrow 4\sqrt{3} = AB\sqrt{2} \Rightarrow AB =$ $= \dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow AB = 2\sqrt{6}$ cm.

Din $ABCD$ pătrat $\Rightarrow AC = BD = 4\sqrt{3}$ cm.

Din $AA' \perp (ABCD)$ și $AC \subset (ABCD) \Rightarrow AA' \perp AC \Rightarrow \sphericalangle A'AC =$ $= 90°$.

Din $\sphericalangle A'AC = 90° \Rightarrow A'A^2 = A'C^2 - AC^2 \Rightarrow A'A^2 = 72 - 48 =$ $= 24 \Rightarrow A'A = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ cm.

Deci, $AB = BC = A'A = 2\sqrt{6}$ cm $\Rightarrow ABCDA'B'C'D'$ este cub.

Observație:

Pentru a demonstra că $BD \perp A'C$ am arătat că $\sphericalangle(BD, A'C) = 90°$. Pentru a arăta că $\sphericalangle(BD, A'C) = 90°$ am folosit teorema:

$$\mathcal{V}_{A'BCD} = \frac{1}{6} \cdot BD \cdot A'C \cdot d(BD, A'C) \cdot \sin(\sphericalangle(BD, A'C))\cdot$$

Această teoremă a fost demonstrată la distanța dintre două drepte necoplanare.

2. Dacă d și g sunt două drepte necoplanare și punctele A_1, A_2, A_3, $A_4 \in d$, B_1, B_2, B_3, $B_4 \in g$, astfel încât $A_1A_2 \equiv A_3A_4$ și $B_1B_2 \equiv$ $\equiv B_3B_4$, atunci $\mathcal{V}_{A_1A_2B_1B_2} = \mathcal{V}_{A_3A_4B_3B_4} = \mathcal{V}_{A_1A_2B_3B_4} = \mathcal{V}_{A_3A_4B_1B_2}$.

Soluție:

Notăm $A_1A_2 \equiv A_3A_4 = a$ și $B_1B_2 \equiv B_3B_4 = b$, $\sphericalangle(d, g) = \alpha$ și $\mathrm{d}(d, g) = c$;

$\mathcal{V}_{A_1A_2B_1B_2} = \frac{1}{6} \cdot A_1A_2 \cdot B_1B_2 \cdot \mathrm{d}(A_1A_2, B_1B_2) \cdot \sin(\sphericalangle(A_1A_2, B_1B_2)) = \frac{1}{6} \cdot a \cdot$ $\cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha$ (1);

$\mathcal{V}_{A_3A_4B_3B_4} = \frac{1}{6} \cdot A_3A_4 \cdot B_3B_4 \cdot \mathrm{d}(A_3A_4, B_3B_4) \cdot \sin(\sphericalangle(A_3A_4, B_3B_4)) = \frac{1}{6} \cdot a \cdot$ $\cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha$ (2);

$\mathcal{V}_{A_1A_2B_3B_4} = \frac{1}{6} \cdot A_1A_2 \cdot B_3B_4 \cdot \mathrm{d}(A_1A_2, B_3B_4) \cdot \sin(\sphericalangle(A_1A_2, B_3B_4)) = \frac{1}{6} \cdot a \cdot$ $\cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha$ (3);

$\mathcal{V}_{A_3A_4B_1B_2} = \frac{1}{6} \cdot A_3A_4 \cdot B_1B_2 \cdot \mathrm{d}(A_3A_4, B_1B_2) \cdot \sin(\sphericalangle(A_3A_4, B_1B_2)) = \frac{1}{6} \cdot a \cdot$ $\cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha$ (4).

Din (1), (2), (3) și (4) $\Rightarrow \mathcal{V}_{A_1A_2B_1B_2} = \mathcal{V}_{A_3A_4B_3B_4} = \mathcal{V}_{A_1A_2B_3B_4} =$ $= \mathcal{V}_{A_3A_4B_1B_2}$.

II.3. TETRAEDRUL TRIDREPTUNGHIC. PROPRIETĂȚI

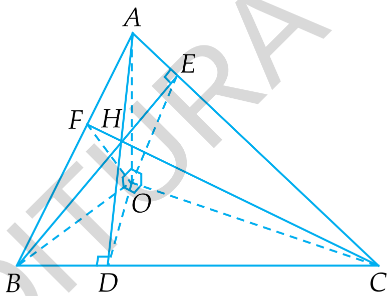
Se numește tetraedru tridreptunghic tetraedrul care are trei muchii care pornesc din același vârf și sunt perpendiculare două câte două.

Dacă în tetraedrul $OABC$, $OA \perp OB$, $OB \perp OC$ și $OC \perp OA$, atunci:

1. ΔABC este ascuțitunghic;
2. $OH \perp (ABC)$, dacă și numai dacă H este ortocentrul ΔABC;
3. Dacă $OH \perp (ABC)$, $H \in (ABC)$, atunci:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2};$$

4. $\mathscr{A}^2_{ABC} = \mathscr{A}^2_{AOB} + \mathscr{A}^2_{AOC} + \mathscr{A}^2_{BOC}$.
5. $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2$, unde $\sphericalangle((BOC), (ABC)) = \alpha$, $\sphericalangle((AOC), (ABC)) = \beta$, $\sphericalangle((AOB), (ABC)) = \gamma$.



Din $OA \perp OB \Rightarrow \sphericalangle AOB = 90°$.
Din $OB \perp OC \Rightarrow \sphericalangle BOC = 90°$.
Din $OC \perp OA \Rightarrow \sphericalangle COA = 90°$.

1. Ducem $OD \perp BC$ și cum $\sphericalangle BOC = 90° \Rightarrow D \in (BC)$.
Din $OA \perp OB$ și $OA \perp OC \Rightarrow OA \perp (BOC)$.

Din $OA \perp (BOC)$, $OD \perp BC$ și $OD, BC \subset (BOC) \Rightarrow AD \perp BC$.

Din $AD \perp BC \Rightarrow \sphericalangle ADB = \sphericalangle ADC = 90°$.

Din $\sphericalangle ADB = 90° \Rightarrow \Delta ADB$ este dreptunghic $\Rightarrow \sphericalangle ABD < 90° \Rightarrow$ $\Rightarrow \sphericalangle ABC < 90°$.

Din $\sphericalangle ADC = 90° \Rightarrow \Delta ADC$ este dreptunghic $\Rightarrow \sphericalangle ACD < 90° \Rightarrow$ $\Rightarrow \sphericalangle ACB < 90°$.

Ducem $OE \perp AC$ și cum $\sphericalangle AOC = 90° \Rightarrow E \in (AC)$.

Din $OB \perp OA$ și $OB \perp OC \Rightarrow OB \perp (AOC)$.

Din $OB \perp (AOC)$, $OE \perp AC$ și $OE, AC \subset (AOC) \Rightarrow BE \perp AC$.

Din $BE \perp AC \Rightarrow \sphericalangle BEA = 90°$.

Din $\sphericalangle BEA = 90° \Rightarrow \Delta BEA$ este dreptunghic $\Rightarrow \sphericalangle BAE < 90° \Rightarrow$ $\Rightarrow \sphericalangle BAC < 90°$.

Deoarece $\sphericalangle BAC < 90°$, $\sphericalangle ABC < 90°$ și $\sphericalangle ACB < 90° \Rightarrow \Delta ABC$ este ascuțitunghic.

2. Din $OA \perp (BOC)$ și $BC \subset (BOC) \Rightarrow OA \perp BC \Rightarrow BC \perp OA$.

Din $OB \perp (AOC)$ și $AC \subset (AOC) \Rightarrow OB \perp AC \Rightarrow AC \perp OB$.

I. $OH \perp (ABC) \Rightarrow H$ este ortocentrul ΔABC.

Din $OH \perp (ABC)$ și $BC \subset (ABC) \Rightarrow OH \perp BC \Rightarrow BC \perp OH$.

Din $OH \perp (ABC)$ și $AC \subset (ABC) \Rightarrow OH \perp AC \Rightarrow AC \perp OH$.

Din $BC \perp OA$ și $BC \perp OH \Rightarrow BC \perp (AOH)$.

Din $BC \perp (AOH)$ și $AH \subset (AOH) \Rightarrow BC \perp AH \Rightarrow AH \perp BC$.

Notăm $AH \cap BC = \{D\} \Rightarrow AD \perp BC$, $H \in AD$.

Din $AC \perp OB$ și $AC \perp OH \Rightarrow AC \perp (BOH)$.

Din $AC \perp (BOH)$ și $BH \subset (BOH) \Rightarrow AC \perp BH \Rightarrow BH \perp AC$.

Notăm $BH \cap AC = \{E\} \Rightarrow BE \perp AC$, $H \in BE$.

Deci, dacă $OH \perp (ABC)$, atunci $AD \perp BC$, $H \in AD$ și $BE \perp$ $\perp AC$, $H \in BE$.

Din $AD \perp BC$, $BE \perp AC$ și $AD \cap BE = \{H\} \Rightarrow H$ este ortocentrul ΔABC.

II. Dacă H este ortocentrul $\Delta ABC \Rightarrow OH \perp (ABC)$.

Fie $AD \perp BC$, $D \in BC$ și $BE \perp AC$, $E \in AC$.

Din H – ortocentrul ΔABC, $AD \perp BC \Rightarrow H \in AD$.

Din H – ortocentrul ΔABC, $BE \perp AC \Rightarrow H \in BE$.

Din $BC \perp OA$ și $BC \perp AD \Rightarrow BC \perp (AOD)$.

Din $H \in AD \Rightarrow OH \subset (AOD)$.

Din $BC \perp (AOD)$ și $OH \subset (AOD) \Rightarrow BC \perp OH \Rightarrow OH \perp BC$.

Din $AC \perp OB$ și $AC \perp BE \Rightarrow AC \perp (BOE)$.

Din $H \in BE \Rightarrow OH \subset (BOE)$.

Din $AC \perp (BOE)$ și $OH \subset (BOE) \Rightarrow AC \perp OH \Rightarrow OH \perp AC$.

Din $OH \perp BC$, $BC \subset (ABC)$ și $OH \perp AC$, $AC \subset (ABC) \Rightarrow$
$\Rightarrow OH \perp (ABC)$.

3. Din $\sphericalangle BOC = 90° \Rightarrow BC = \sqrt{OB^2 + OC^2}$.

Din $\sphericalangle BOC = 90°$ și $OD \perp BC \Rightarrow OD = \dfrac{OB \cdot OC}{BC} =$
$= \dfrac{OB \cdot OC}{\sqrt{OB^2 + OC^2}}$.

Din $OA \perp (BOC)$ și $OD \subset (BOC) \Rightarrow OA \perp OD \Rightarrow \sphericalangle AOD = 90°$.

Din $\sphericalangle AOD = 90° \Rightarrow AD^2 = OA^2 + OD^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow AD^2 = OA^2 + \frac{OB^2 \cdot OC^2}{OB^2 + OC^2} = \frac{OA^2 \cdot OB^2 + OA^2 \cdot OC^2 + OB^2 \cdot OC^2}{OB^2 + OC^2}.$$

Din $OH \perp (ABC)$ și $AD \subset (ABC) \Rightarrow OH \perp AD$.

Din $\sphericalangle AOD = 90°$ și $OH \perp AD \Rightarrow OH = \dfrac{OA \cdot OD}{AD} \Rightarrow$

$$\Rightarrow OH^2 = \frac{OA^2 \cdot OD^2}{AD^2} = OA^2 \cdot \frac{OB^2 \cdot OC^2}{OB^2 + OC^2} :$$

$$: \frac{OA^2 \cdot OB^2 + OA^2 \cdot OC^2 + OB^2 \cdot OC^2}{OB^2 + OC^2} = \frac{OA^2 \cdot OB^2 \cdot OC^2}{OB^2 + OC^2} \cdot$$

$$\cdot \frac{OB^2 + OC^2}{OA^2 \cdot OB^2 + OA^2 \cdot OC^2 + OB^2 \cdot OC^2} =$$

$$= \frac{OA^2 \cdot OB^2 \cdot OC^2}{OA^2 \cdot OB^2 + OA^2 \cdot OC^2 + OB^2 \cdot OC^2}.$$

Deci, $\frac{1}{OH^2} = \frac{OA^2 \cdot OB^2 + OA^2 \cdot OC^2 + OB^2 \cdot OC^2}{OA^2 \cdot OB^2 \cdot OC^2} \Rightarrow \frac{1}{OH^2} =$

$$= \frac{OA^2 \cdot OB^2}{OA^2 \cdot OB^2 \cdot OC^2} + \frac{OA^2 \cdot OC^2}{OA^2 \cdot OB^2 \cdot OC^2} + \frac{OB^2 \cdot OC^2}{OA^2 \cdot OB^2 \cdot OC^2}.$$

Deci, $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OA^2} \Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} +$

$$+ \frac{1}{OC^2}.$$

4. Din $AD \perp BC \Rightarrow \mathscr{A}_{ABC} = \frac{BC \cdot AD}{2} \Rightarrow \mathscr{A}^2_{ABC} = \frac{BC^2 \cdot AD^2}{4} =$

$$= (OB^2 + OC^2) \cdot \frac{OA^2 \cdot OB^2 + OA^2 \cdot OC^2 + OB^2 \cdot OC^2}{OB^2 + OC^2} : 4.$$

Deci, $\mathscr{A}^2_{ABC} = \frac{OA^2 \cdot OB^2 + OA^2 \cdot OC^2 + OB^2 \cdot OC^2}{4} \Rightarrow \mathscr{A}^2_{ABC} =$

$$= \frac{OA^2 \cdot OB^2}{4} + \frac{OA^2 \cdot OC^2}{4} + \frac{OB^2 \cdot OC^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathscr{A}^2_{ABC} = \left(\frac{OA \cdot OB}{2}\right)^2 + \left(\frac{OA \cdot OC}{2}\right)^2 + \left(\frac{OB \cdot OC}{2}\right)^2.$$

Din $\sphericalangle AOB = 90° \Rightarrow \mathscr{A}_{AOB} = \frac{OA \cdot OB}{2} \Rightarrow \mathscr{A}^2_{AOB} = \left(\frac{OA \cdot OB}{2}\right)^2$.

Din $\sphericalangle AOC = 90° \Rightarrow \mathscr{A}_{AOC} = \frac{OA \cdot OC}{2} \Rightarrow \mathscr{A}^2_{AOC} = \left(\frac{OA \cdot OC}{2}\right)^2$.

Din $\sphericalangle BOC = 90° \Rightarrow \mathscr{A}_{BOC} = \frac{OB \cdot OC}{2} \Rightarrow \mathscr{A}^2_{BOC} = \left(\frac{OB \cdot OC}{2}\right)^2$.

Înlocuind, rezultă că $\mathscr{A}^2_{ABC} = \mathscr{A}^2_{AOB} + \mathscr{A}^2_{AOC} + \mathscr{A}^2_{BOC}$.

5. Din $(ABC) \cap (BOC) = BC$, $AD \perp BC$, $AD \subset (ABC)$ și $OD \perp$ $\perp BC$, $OD \subset (BOC) \Rightarrow \sphericalangle((ABC), (BOC)) = \sphericalangle ADO$.

Cum $\sphericalangle((ABC), (BOC)) = \alpha \Rightarrow \sphericalangle ADO = \alpha$.

Analog $\sphericalangle((ABC), (AOC)) = \sphericalangle BEO = \beta$; $\sphericalangle((ABC), (AOB)) =$ $= \sphericalangle CFO = \gamma$, unde $CH \cap AB = \{F\}$, deci $CF \perp AB$.

$$AD^2 = \frac{OA^2 \cdot OB^2 + OA^2 \cdot OC^2 + OB^2 \cdot OC^2}{OB^2 + OC^2};$$

$$BE^2 = \frac{OA^2 \cdot OB^2 + OA^2 \cdot OC^2 + OB^2 \cdot OC^2}{OA^2 + OC^2};$$

$$CF^2 = \frac{OA^2 \cdot OB^2 + OA^2 \cdot OC^2 + OB^2 \cdot OC^2}{OA^2 + OB^2};$$

$$\sin \alpha = \sin(\sphericalangle ADO) = \frac{OA}{AD} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{OA^2}{AD^2}.$$

Deci, $\sin^2 \alpha = OA^2 : \dfrac{OA^2 \cdot OB^2 + OA^2 \cdot OC^2 + OB^2 \cdot OC^2}{OB^2 + OC^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{OA^2 \cdot OB^2 + OA^2 \cdot OC^2}{OA^2 \cdot OB^2 + OA^2 \cdot OC^2 + OB^2 \cdot OC^2};$$

$$\sin^2 \beta = \frac{OA^2 \cdot OB^2 + OB^2 \cdot OC^2}{OA^2 \cdot OB^2 + OA^2 \cdot OC^2 + OB^2 \cdot OC^2};$$

$$\sin^2 \gamma = \frac{OA^2 \cdot OC^2 + OB^2 \cdot OC^2}{OA^2 \cdot OB^2 + OA^2 \cdot OC^2 + OB^2 \cdot OC^2}.$$

Deci, $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma =$

$$= \frac{2(OA^2 \cdot OB^2 + OA^2 \cdot OC^2 + OB^2 \cdot OC^2)}{OA^2 \cdot OB^2 + OA^2 \cdot OC^2 + OB^2 \cdot OC^2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2$.

Observație:

Din $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \beta + \cos^2 \beta + \sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma = 1 + 1 + 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma + \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 3$.

Deci, $2 + \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 3 \Rightarrow \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

II.4. TETRAEDRUL ORTOCENTRIC

Se numește tetraedru ortogonal orice tetraedru care are muchiile opuse perpendiculare.

Teoremă:

Înălțimile unui tetraedru ortogonal sunt concurente.

Demonstrația acestei teoreme se face ușor dacă folosim următoarea teoremă de geometrie în spațiu prin care arătăm că mai multe drepte sunt concurente în spațiu.

Teoremă:

Mai multe drepte care, două câte două, au un punct comun și nu sunt coplanare, sunt concurente.

Demonstrația acestei teoreme pentru patru drepte se face în felul următor: mai întâi să ne gândim la trei drepte și să analizăm cele două posibilități care există.

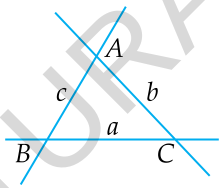


Fig. 1

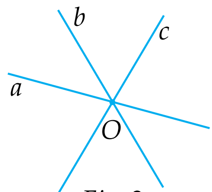


Fig. 2

Evident, dreptele din figura 1 sunt coplanare, incluse în planul (ABC), ceea ce nu convine.

Deci, este adevărată situația din figura 2. Rezultă că dreptele sunt concurente.

Referitor la patru drepte avem mai multe situații pe care le putem rezuma, în final, la două.

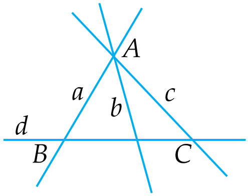


Fig. 1

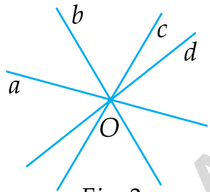


Fig. 2

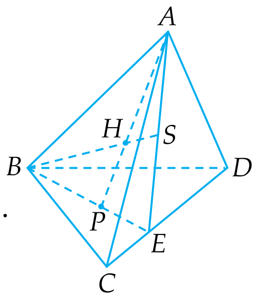
În figura 1 dreptele sunt coplanare, incluse în planul (ABC), ceea ce nu convine.

Deci, este adevărată situația din figura 2. Rezultă că dreptele sunt concurente.

Situațiile pe care le întâlnim cel mai des sunt în tetraedru, unde avem de arătat că patru drepte care trec fiecare printr-un vârf al tetraedrului, sunt concurente, de exemplu, înălțimile tetraedrului; nu sunt coplanare în toate cazurile pentru că dacă ar fi coplanare, ar exista un plan care să le conțină și acel plan ar conține și vârfurile tetraedrului, ceea ce este absurd.

Când demonstrația se face asemănător în toate cazurile, este suficient să arătăm că două din ele sunt concurente.

Demonstrație:



$ABCD$ – tetraedru ortogonal $\Rightarrow AB \perp CD$, $AC \perp BD$ și $AD \perp BC$.

Ducem $BE \perp CD$, $E \in CD \Rightarrow CD \perp BE$.

Din $AB \perp CD \Rightarrow CD \perp AB$.

Din $CD \perp BE$ și $CD \perp AB \Rightarrow CD \perp (ABE)$.

În ΔABE ducem $AP \perp BE$, $P \in BE$ și $BS \perp AE$, $S \in AE$.

Din $AP \perp BE \Rightarrow AP$ este înălțime în ΔABE (1).

Din $BS \perp AE \Rightarrow BS$ este înălțime în ΔABE (2).

Din (1) și (2) $\Rightarrow AP \cap BS = \{H\}$, unde H este ortocentrul ΔABE.

Din $CD \perp (ABE)$ și $AP \subset (ABE) \Rightarrow CD \perp AP \Rightarrow AP \perp CD$.

Din $CD \perp (ABE)$ și $BS \subset (ABE) \Rightarrow CD \perp BS \Rightarrow BS \perp CD$.

Din $AP \perp CD$ și $AP \perp BE \Rightarrow AP \perp (BCD) \Rightarrow AP$ este înălțimea din A în tetraedrul $ABCD$ (3).

Din $BS \perp CD$ și $BS \perp AE \Rightarrow BS \perp (ACD) \Rightarrow BS$ este înălțimea din B în tetraedrul $ABCD$ (4).

Din (3), (4) și $AP \cap BS = \{H\} \Rightarrow$ înălțimile din A și B sunt concurente în tetraedrul $ABCD$.

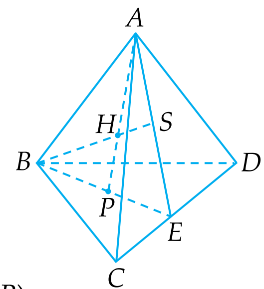
La fel se arată că oricare alte două înălțimi sunt concurente.

Cum înălțimile au două câte două un punct comun și nu sunt coplanare, rezultă că sunt concurente.

Teoremă:

Dacă un tetraedru are înălțimile concurente, atunci este ortogonal.

Demonstrație:



Considerăm $AP \perp (BCD)$, $P \in (BCD)$, $BS \perp (ACD)$, $S \in (ACD)$, $AP \cap BS = \{H\}$ și arătăm că $AB \perp CD$.

Din $AP \perp (BCD)$ și $CD \subset (BCD) \Rightarrow$
$\Rightarrow AP \perp CD \Rightarrow CD \perp AP \Rightarrow CD \perp AH$.

Din $BS \perp (ACD)$ și $CD \subset (ACD) \Rightarrow$
$\Rightarrow BS \perp CD \Rightarrow CD \perp BS \Rightarrow CD \perp BH$.

Din $CD \perp AH$ și $CD \perp BH \Rightarrow CD \perp (AHB)$.

Din $CD \perp (AHB)$ și $AB \subset (AHB) \Rightarrow CD \perp AB \Rightarrow AB \perp CD$.

Analog se arată că $AC \perp BD$ și $AD \perp BC$.

Punctul de concurență a înălțimilor se numește ortocentrul tetraedrului.

Se numește tetraedru ortocentric tetraedrul în care înălțimile sunt concurente.

Consecință:

Tetraedrul ortogonal este ortocentric.

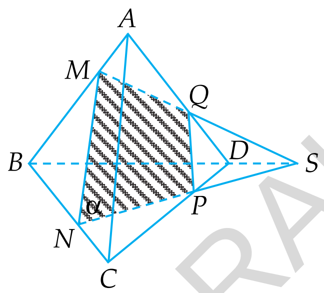
Observație:

Tetraedrul dreptunghic este tetraedru ortogonal, deci este tetraedru ortocentric.

Ortocentrul unui tetraedru tridreptunghic este vârful în care muchiile sunt perpendiculare două câte două.

II.5. TEOREMA LUI MENELAUS ÎN SPAȚIU

Punctele M, N, P, Q situate pe muchiile AB, BC, CD, respectiv DA ale unui tetraedru $ABCD$ sunt coplanare dacă și numai dacă $\frac{MB}{MA} \cdot \frac{NC}{NB} \cdot \frac{PD}{PC} \cdot \frac{QA}{QD} = 1$.



Demonstrație:

I. M, N, P, Q – coplanare $\Rightarrow \frac{MB}{MA} \cdot \frac{NC}{NB} \cdot \frac{PD}{PC} \cdot \frac{QA}{QD} = 1$.

Notăm cu α planul care conține punctele M, N, P, Q.

Fie $MQ \cap NP = \{S\} \Rightarrow S \in MQ$ și $S \in NP$.

Din $S \in MQ \Rightarrow S \in (ABD)$ (1).

Din $S \in NP \Rightarrow S \in (BCD)$ (2).

Din (1) și (2) $\Rightarrow S \in (ABD) \cap (BCD)$, dar $(ABD) \cap (BCD) = BD$, deci $S \in BD$.

Folosim teorema lui Menelaus (din plan) în ΔABD și apoi în ΔBCD.

Din M–Q–S transversală în $\Delta ABD \Rightarrow \frac{SD}{SB} \cdot \frac{QA}{QD} \cdot \frac{MB}{MA} = 1$ (3).

Din N–P–S transversală în $\Delta BCD \Rightarrow \frac{SB}{SD} \cdot \frac{PD}{PC} \cdot \frac{NC}{NB} = 1$ (4).

Din (3) și (4) $\Rightarrow \frac{\cancel{SD}^{1}}{\cancel{SB}_{1}} \cdot \frac{QA}{QD} \cdot \frac{MB}{MA} \cdot \frac{\cancel{SB}^{1}}{\cancel{SD}_{1}} \cdot \frac{PD}{PC} \cdot \frac{NC}{NB} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{QA}{QD} \cdot \frac{MB}{MA} \cdot \frac{PD}{PC} \cdot \frac{NC}{NB} = 1 \Rightarrow \frac{MB}{MA} \cdot \frac{NC}{NB} \cdot \frac{PD}{PC} \cdot \frac{QA}{QD} = 1.$

II. $\frac{MB}{MA} \cdot \frac{NC}{NB} \cdot \frac{PD}{PC} \cdot \frac{QA}{QD} = 1 \Rightarrow M, N, P, Q$ – coplanare.

Presupunem că M, N, P, Q nu sunt coplanare $\Rightarrow (M, N, P) \cap \cap AD = \{Q'\} \Rightarrow Q' \neq Q \Rightarrow M, N, P, Q'$ – coplanare.

Deoarece M, N, P, Q' – coplanare $\Rightarrow \frac{MB}{MA} \cdot \frac{NC}{NB} \cdot \frac{PD}{PC} \cdot \frac{Q'A}{Q'D} = 1.$

Cum $\frac{MB}{MA} \cdot \frac{NC}{NB} \cdot \frac{PD}{PC} \cdot \frac{QA}{QD} = 1 \Rightarrow \frac{Q'A}{Q'D} = \frac{QA}{QD} \Rightarrow Q' = Q$, ceea ce este absurd, deoarece am presupus $Q' \neq Q$. Deci presupunerea este falsă și concluzia adevărată. Rezultă că M, N, P, Q – coplanare.

II.6. TEOREMA LUI CEVA ÎN SPAȚIU

În tetraedrul $ABCD$ considerăm punctele M, N, P, Q pe muchiile AB, BC, CD, respectiv DA. Notăm $AN \cap CM = \{E\}$ și $AP \cap CQ = \{F\}$. Dreptele BF și DE sunt concurente dacă și numai dacă $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{PC}{PD} \cdot \frac{QD}{QA} = 1$.

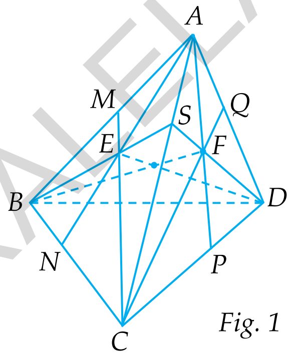


Fig. 1

Demonstrație:

I. BF și DE sunt concurente $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{PC}{PD} \cdot \frac{QD}{QA} = 1.$$

Notăm planul determinat de dreptele concurente BF și DE cu α.

Notăm $AC \cap \alpha = \{S\}$.

Din $AC \cap \alpha = \{S\} \Rightarrow S \in AC$ și $S \in \alpha$.

Din $S \in AC \Rightarrow S \in (ABC)$. Deci $S \in (ABC) \cap \alpha$.

Cum $(ABC) \cap \alpha = BE \Rightarrow S \in BE$.

Din $S \in AC \Rightarrow S \in (ACD)$. Deci $S \in (ADC) \cap \alpha$.

Cum $(ADC) \cap \alpha = DF \Rightarrow S \in DF$.

În ΔABC avem $CM \cap AN \cap BS = \{E\} \Rightarrow \frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{SC}{SA} = 1$ (1).

În ΔACD avem $AP \cap CQ \cap DS = \{F\} \Rightarrow \frac{PC}{PD} \cdot \frac{QD}{QA} \cdot \frac{SA}{SC} = 1$ (2).

Din (1) și (2) $\Rightarrow \frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{{}^{1}\cancel{SC}}{\cancel{SA}_{1}} \cdot \frac{PC}{PD} \cdot \frac{QD}{QA} \cdot \frac{{}^{1}\cancel{SA}}{\cancel{SC}_{1}} = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{PC}{PD} \cdot \frac{QD}{QA} = 1.$$

II. $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{PC}{PD} \cdot \frac{QD}{QA} = 1 \Rightarrow BF$ și DE sunt concurente.

Presupunem că BF și DE nu sunt concurente $\Rightarrow BE \cap AC = \{S\}$, $DF \cap AC = \{S'\}$ și $S \neq S'$.

În ΔABC avem $CM \cap AN \cap BS = \{E\} \Rightarrow \frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{SC}{SA} = 1$ (3).

În ΔACD avem $AP \cap CQ \cap DS' = \{F\} \Rightarrow \frac{PC}{PD} \cdot \frac{QD}{QA} \cdot \frac{S'A}{S'C} = 1$ (4).

Din (3) și (4) $\Rightarrow \frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{PC}{PD} \cdot \frac{QD}{QA} \cdot \frac{SC}{SA} \cdot \frac{S'A}{S'C} = 1$ (5).

Dar $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{PC}{PD} \cdot \frac{QD}{QA} = 1$ (6).

Din (5) și (6) $\Rightarrow \frac{SC}{SA} \cdot \frac{S'A}{S'C} = 1 \Rightarrow \frac{SC}{SA} = \frac{S'A}{S'C} \Rightarrow S = S'$ absurd, deoarece $S \neq S' \Rightarrow$ presupunerea este falsă $\Rightarrow BF$ și DE sunt concurente.

Aplicație:

În tetraedrul $ABCD$ avem punctele M, N, P, Q pe muchiile AB, BC, CD, respectiv DA, astfel încât $3MA = 2MB$, $NC = 3NB$, $PC = 0{,}75PD$ și $QA = 6QD$. Arătați că:

a) punctele M, N, P, Q sunt coplanare;

b) dreptele BF și DE sunt concurente, unde $AN \cap CM = \{E\}$ și $AP \cap CQ = \{F\}$.

Soluție:

Folosim figura 1.

Calculăm rapoartele $\frac{MA}{MB}$, $\frac{NB}{NC}$, $\frac{PC}{PD}$ și $\frac{QA}{QD}$.

Din $3MA = 2MB \Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$.

Din $NC = 3NB \Rightarrow \dfrac{NB}{NC} = \dfrac{1}{3}$.

Din $PC = 0{,}75PD \Rightarrow \dfrac{PC}{PD} = 0{,}75 = \dfrac{3}{4}$.

Din $QA = 6QD \Rightarrow \dfrac{QA}{QD} = \dfrac{6}{1}$.

Deci $\dfrac{MA}{MB} \cdot \dfrac{NB}{NC} \cdot \dfrac{PC}{PD} \cdot \dfrac{QA}{QD} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{6}{1} \Rightarrow \dfrac{MA}{MB} \cdot \dfrac{NB}{NC} \cdot$ $\cdot \dfrac{PC}{PD} \cdot \dfrac{QA}{QD} = 1$.

a) Din $\dfrac{MA}{MB} \cdot \dfrac{NB}{NC} \cdot \dfrac{PC}{PD} \cdot \dfrac{QA}{QD} = 1$ rezultă, în baza teoremei lui Menelaus în spațiu, că punctele M, N, P, Q sunt coplanare;

b) Din $\dfrac{MA}{MB} \cdot \dfrac{NB}{NC} \cdot \dfrac{PC}{PD} \cdot \dfrac{QA}{QD} = 1$ rezultă, în baza teoremei lui Ceva în spațiu, că dreptele BF și DE sunt concurente.

II.7. CONCURENȚA MEDIANELOR ÎNTR-UN TETRAEDRU

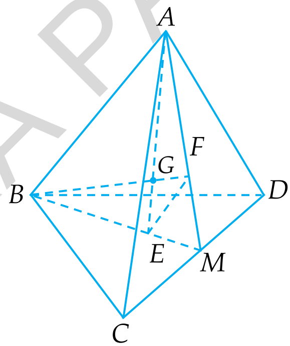
Se numește mediană într-un tetraedru segmentul determinat de un vârf și centrul de greutate al feței opuse.

Teoremă:

Într-un tetraedru medianele sunt concurente. Punctul de concurență a medianelor este situat pe fiecare mediană la $\frac{3}{4}$ față de vârf și $\frac{1}{4}$ față de bază.

Punctul de concurență a medianelor se numește centrul de greutate al tetraedrului.

Demonstrație:



Fie E, F – centrele de greutate ale triunghiurilor BCD, respectiv ACD și M mijlocul lui CD.

Din E centru de greutate în $\Delta BCD \Rightarrow \frac{EM}{BM} = \frac{1}{3}$.

Din F centru de greutate în $\Delta ACD \Rightarrow \dfrac{FM}{AM} = \dfrac{1}{3}$.

Din $\dfrac{EM}{BM} = \dfrac{FM}{AM} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow EF \parallel AB \Rightarrow \Delta MEF \sim \Delta MBA \Rightarrow \dfrac{EF}{AB} =$
$= \dfrac{ME}{MB} = \dfrac{MF}{MA} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{EF}{AB} = \dfrac{1}{3}$.

Notăm $AE \cap BF = \{G\}$.

Din $EF \parallel AB \Rightarrow \Delta EGE \sim \Delta AGB \Rightarrow \dfrac{EG}{GA} = \dfrac{FG}{GB} = \dfrac{EF}{AB} = \dfrac{1}{3}$.

Deci $\dfrac{EG}{GA} = \dfrac{FG}{GB} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{EG}{EG+GA} = \dfrac{FG}{FG+GB} = \dfrac{1}{1+3} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{EG}{AE} = \dfrac{FG}{BF} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \dfrac{AG}{AE} = \dfrac{BG}{BF} = \dfrac{3}{4}$.

Am arătat că medianele tetraedrului din vârfurile A și B sunt concurente și că punctul lor de concurență se află la $\dfrac{3}{4}$ față de vârf și $\dfrac{1}{4}$ față de bază.

Analog se arată că medianele din A și C, apoi medianele din A și D sunt concurente și că punctul lor de concurență este la $\dfrac{3}{4}$ față de vârf și $\dfrac{1}{4}$ față de bază.

Deci medianele din B, C și D intersectează mediana din A în punctul situat la $\dfrac{3}{4}$ față de vârful A și $\dfrac{1}{4}$ față de bază; rezultă că în tetraedru medianele sunt concurente.

Punctul de concurență a medianelor este centrul de greutate al triunghiului și este situat pe fiecare mediană la $\dfrac{3}{4}$ față de vârf și $\dfrac{1}{4}$ față de bază.

II.8. CONCURENȚA BIMEDIANELOR ÎNTR-UN TETRAEDRU

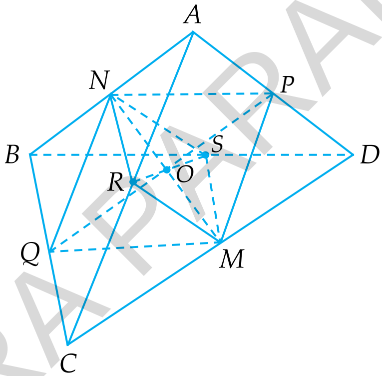
Se numește bimediană într-un tetraedru segmentul determinat de mijloacele a două muchii opuse.

Teoremă:

Într-un tetraedru bimedianele sunt concurente. Punctul de concurență a bimedianelor este mijlocul fiecărei bimediane.

Demonstrație:

Fie M, N, P, Q, R, S mijloacele muchiilor CD, AB, AD, BC, AC, respectiv BD.



Din $BQ \equiv QC$ și $BN \equiv NA \Rightarrow NQ$ este linie mijlocie în $\Delta ABC \Rightarrow$

$\Rightarrow NQ \parallel AC$, $NQ = \dfrac{AC}{2}$.

Din $AP \equiv PD$ și $CM \equiv MD \Rightarrow PM$ este linie mijlocie în $\Delta ADC \Rightarrow$

$\Rightarrow PM \parallel AC$, $PM = \dfrac{AC}{2}$.

Din $NQ \parallel AC$ și $PM \parallel AC \Rightarrow NQ \parallel PM$.

Din $NQ = \dfrac{AC}{2}$ și $PM = \dfrac{AC}{2} \Rightarrow NQ \equiv PM$.

Din $NQ \parallel PM$ și $NQ \equiv PM \Rightarrow MNPQ$ este paralelogram $\Rightarrow$ $\Rightarrow MN \cap PQ = \{O\}$, $OM \equiv ON$ și $OP \equiv OQ$.

Din $AN \equiv NB$ și $AR \equiv RC \Rightarrow NR$ este linie mijlocie în $\Delta ABC \Rightarrow$ $\Rightarrow NR \parallel BC$, $NR = \dfrac{BC}{2}$.

Din $BS \equiv SD$ și $CM \equiv MD \Rightarrow SM$ este linie mijlocie în $\Delta BCD \Rightarrow$ $\Rightarrow SM \parallel BC$, $SM = \dfrac{BC}{2}$.

Din $NR \parallel BC$ și $SM \parallel BC \Rightarrow NR \parallel SM$.

Din $NR = \dfrac{BC}{2}$ și $SM = \dfrac{BC}{2} \Rightarrow NR \equiv SM$.

Din $NR \parallel SM$ și $NR \equiv SM \Rightarrow MSNR$ este paralelogram.

Din $MSNR$ – paralelogram, $O \in MN$ și $OM \equiv ON \Rightarrow O \in SR$ și $OS \equiv OR$.

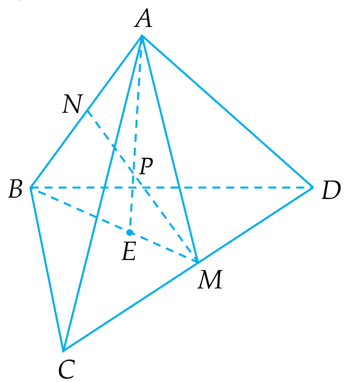
Din $MN \cap PQ = \{O\}$ și $O \in SR \Rightarrow MN \cap SR \cap PQ = \{O\}$.

Deci, bimedianele sunt concurente și punctul de concurență este mijlocul fiecărei bimediane.

Teoremă:

Într-un tetraedru, punctul de concurență a bimedianelor coincide cu punctul de concurență a medianelor.

Demonstrație:



Fie M, N mijloacele muchiilor CD, respectiv AB și E centru de greutate în ΔBCD.

Notăm $AE \cap MN = \{P\}$.

Din M–P–N transversală în $\Delta ABE \Rightarrow \frac{ME}{MB} \cdot \frac{PA}{PE} \cdot \frac{NB}{NA} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{PA}{PE} \cdot 1 = 1 \Rightarrow \frac{PA}{PE} = \frac{3}{1} \Rightarrow \frac{PA}{PA+PE} = \frac{3}{3+1} \Rightarrow \frac{PA}{AE} = \frac{3}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AP}{AE} = \frac{3}{4} \Rightarrow P$ este centrul de greutate al tetraedrului (1).

Din A–P–E transversală în $\Delta MBN \Rightarrow \frac{AN}{AB} \cdot \frac{PM}{PN} \cdot \frac{EB}{EM} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{PM}{PN} \cdot \frac{2}{1} = 1 \Rightarrow \frac{PM}{PN} = 1 \Rightarrow PM \equiv PN$.

Din $PM \equiv PN \Rightarrow P$ este mijlocul bimedianei $MN \Rightarrow P$ este punctul de concurență a bimedianelor (2).

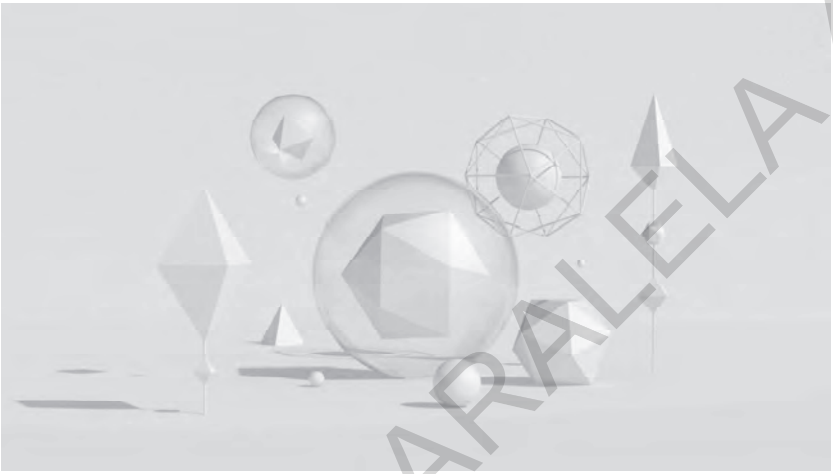
Din (1) și (2) rezultă că punctul de concurență a medianelor coincide cu punctul de concurență a bimedianelor.

Concluzii:

1. Punctul de concurență a bimedianelor este centrul de greutate al tetraedrului.

2. Centrul de greutate al tetraedrului este mijlocul fiecărei bimediane.

CUPRINS



COMENZI – CARTEA PRIN POȘTĂ

EDITURA PARALELA 45
Bulevardul Republicii, Nr. 148, Clădirea C1, etaj 4,
Pitești, jud. Argeș, cod 110177
Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918
Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492
E-mail: comenzi@edituraparalela45.ro

www.edituraparalela45.ro

Tiparul executat la Tipografia ARTPRINT