Ion Pătraşcu Nicolae Ivăşchescu

GEOMETRIE

Clasa a 8-a

după noua programă de gimnaziu

- **TIPURI DE PROBLEME**
  - repere teoretice
  - probleme rezolvate
  - probleme propuse – rezolvări complete
- **PERFORMANȚĂ**
  - olimpiade și concursuri școlare

EDITURA CARMINIS
educațional

Cuvânt-înainte

Lucrarea „Geometrie. Clasa a VIII-a. După noua programă de gimnaziu“ se doreşte a fi: • manual alternativ, deoarece cuprinde toate temele prevăzute de programă, cunoştinţele sunt explicate, exemplificate şi consolidate prin oferirea de probleme rezolvate, teoreme şi propoziţii demonstrate şi aplicate în problemele din lucrare; • culegere de probleme pentru acei elevi care doresc să-şi consolideze temeinic cunoştinţele dobândite la clasă şi care au ca obiectiv promovarea Evaluării Naţionale cu rezultate foarte bune; • culegere de probleme pentru activitatea de performanţă – concursuri, olimpiade, activitatea în cercuri sau centre de excelenţă.

Deşi în titlul cărţii apare exprimarea „după noua programă de gimnaziu“, noi sperăm că această culegere va fi folosită cu succes mulţi ani de acum înainte, indiferent de schimbările intervenite în programa şcolară, deoarece ea a fost gândită ca o structură solidă, menită să ofere explicaţii, demonstraţii, rezolvări, sprijin şi răspunsuri la întrebările elevilor.

Cele 10 teme abordate au aceeaşi structură ca în cărţile noastre de geometrie pentru clasele a VI-a şi a VII-a, adică: noţiuni teoretice, probleme rezolvate, probleme propuse (1) de nivel mediu şi probleme propuse (2) pentru performanţă.

În partea a doua a lucrării sunt oferite rezolvări complete la toate problemele din carte. Relativ la aceste probleme menţionăm că o parte dintre ele au fost publicate de autori în reviste de matematică din Dolj „Alpha“, „Cardinal“, „Sfera“ şi din ţară „Gamma“, „Revista de matematică din Timişoara“, „Gazeta Matematică“. O bună parte din probleme au fost realizate de autori special pentru această culegere.

Mulţumim colaboratorilor noştri: Ion Tiotioi, Gheorghe Burduşel, Sebastian Ilinca, Dan Mitricoiu, Paulina Burtea şi, de asemenea, mulţumim echipei Editurii Carminis care, prin sugestiile făcute, a contribuit la creşterea valorii acestei cărţi.

Autorii

TEMA 1

NOȚIUNILE PRIMARE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAȚIU ȘI RELAȚII ÎNTRE ELE

A. Noțiuni teoretice

1. Elementele fundamentale ale geometriei în spațiu

Ca și geometria plană, geometria în spațiu operează cu noțiuni primare. Acestea sunt: puncte, drepte, plane și, evident, spațiul.

Spre deosebire de geometria plană în care „acțiunea“ se petrece în plan – înțelegând prin acesta planul foii de hârtie pe care lucrăm sau planul tablei sau desktopul laptopului, în geometria în spațiu „acțiunea“ se desfășoară în spațiu, înțelegând prin acesta mulțimea tuturor punctelor care ne înconjoară (mai bine zis existente, evident și punctele ocupate de corpul nostru).

Vom nota spațiul cu S, înțelegând prin spațiu mulțimea tuturor punctelor. Planele vor fi notate cu litere mici grecești α, β, γ, δ, ... și vor fi reprezentate ca în figura 1.

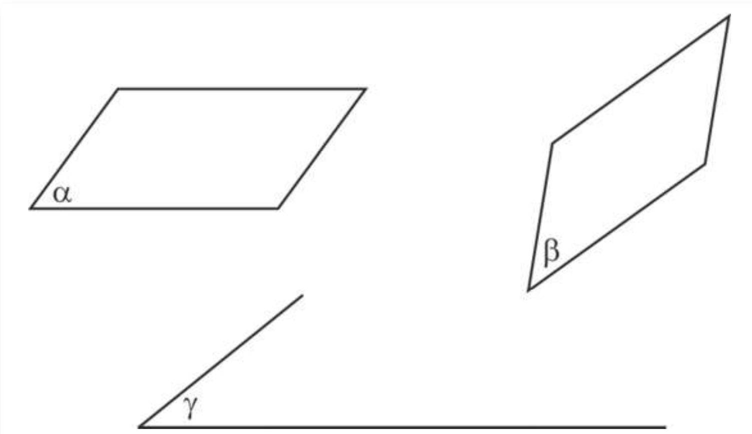


Figura 1

Dreptele se notează cu litere mici ale alfabetului a, b, c, ... Punctele se notează cu litere mari ale alfabetului A, B, C, ...

2. Câteva dintre axiomele geometriei în spațiu

Axiomele sunt propoziții adevărate care nu se demonstrează, adevărul lor fiind acceptat pe baza intuiției, evidenței și a modelelor din practică. Axiomele geometriei plane sunt evident adevărate și în spațiu. Amintim câteva dintre acestea.

A_1. Două puncte distincte determină o dreaptă și numai una.

A_2. Dacă o dreaptă are două puncte conținute într-un plan, atunci toate punctele dreptei sunt în acel plan.

A_3. (**Axioma lui Euclid**). Într-un plan, printr-un punct exterior unei drepte, se poate construi o singură paralelă la acea dreaptă.

A_4. Trei puncte necoliniare determină un plan și numai unul.

A_5. Există patru puncte necoplanare (nesituate în același plan).

În figura 2 sunt reprezentate 4 puncte necoplanare.

Punctele B, C, D determină un plan, îl notăm (BCD), iar punctul A nu aparține planului (BCD), deci este exterior planului.

Așa cum un punct ce aparține unei drepte determină pe dreaptă două semidrepte și așa cum o dreaptă aflată într-un plan determină în acesta două semiplane opuse, și un plan determină în spațiu două semispații. Planul este în acest caz frontiera semispațiilor.

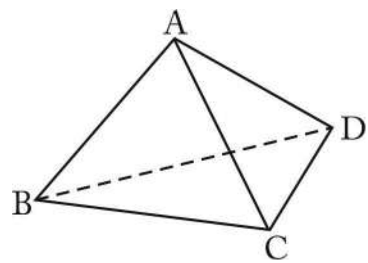


Figura 2

A_6. Orice punct din spațiu care nu aparține planului α aparține unuia dintre semispațiile de frontieră α.

Figura 3

Dacă α este un plan și A este un punct, $A \notin \alpha$, notăm semispațiul de frontieră α care conține punctul A astfel $[\alpha A$ (vezi fig. 3).

Celălalt semispațiu de frontieră α se numește semispațiul opus lui $[\alpha A$.

3. Relații între noțiunile primare ale geometriei în spațiu

Relațiile între puncte, drepte, plane și spațiu sunt în general relații de apartenență, non-apartenență, incluziune, non-incluziune, incidență, identitate, paralelism.

În strânsă legătură cu relațiile dintre două noțiuni fundamentale este și poziția pe care o ocupă unul (una) față de altul (alta).

Astfel avem:

● **Relații între două puncte**

Două puncte pot fi **distincte** (diferite) şi notăm $A \neq B$ sau **confundate** (identice) şi notăm $A = B$.

● **Relații între punct și dreaptă**

Un punct poate să aparțină dreptei şi notăm $A \in a$ (vezi fig. 4) sau să nu aparțină dreptei (să fie exterior dreptei) şi notăm $B \notin a$.

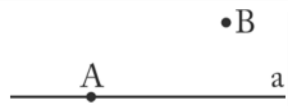


Figura 4

Evidențiem că un punct exterior unei drepte și dreapta respectivă determină un plan unic. Notăm $\alpha = (a, A)$ planul determinat de dreapta a și punctul A, exterior ei.

● **Relații între două drepte**

Ca și în plan, în spațiu două drepte care au în comun două puncte distincte **coincid**. (Aceasta este o consecință a axiomei $\mathbf{A_1}$.)

În figura 5, dreapta a și dreapta AB coincid pentru că $A \in a$, $B \in a$ și $A \neq B$.

Figura 5

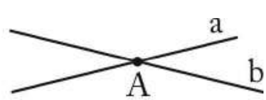


Figura 6

De asemenea, două drepte care au un singur punct comun se numesc **concurente**.

În figura 6 dreptele a și b au punctul A comun. Subliniem că două drepte concurente determină un plan. Notăm $\alpha = (a, b)$ planul determinat de dreptele concurente a și b.

În privința a două drepte în spațiu care nu au niciun punct comun, avem două situații:

• Două drepte care nu au niciun punct comun și sunt paralele se numesc **drepte coplanare**.

• Două drepte care nu au niciun punct comun dar nu sunt paralele se numesc **drepte necoplanare**.

În figura 7 dreptele a și b sunt paralele și notăm $a \parallel b$. Dacă a și b sunt drepte paralele, atunci ele determină un plan. Notăm cu $\alpha = (a, b)$ planul determinat de dreptele a și b. Tot în figura 7 dreptele c și d sunt necoplanare $c \cap d = \varnothing$ și nu există un plan α astfel încât $a \subset \alpha$ și $b \subset \alpha$.

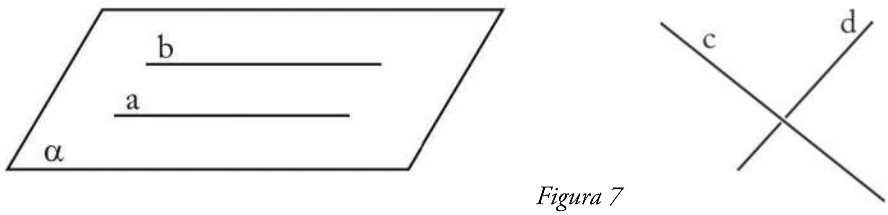


Figura 7

• Relații între o dreaptă și un plan

Axioma A_2 evidențiază faptul că dacă dreapta a și planul α au în comun două puncte distincte, atunci dreapta este inclusă în plan.

În figura 8 dreapta a are în comun cu planul α punctele distincte A și B. Atunci $a \subset \alpha$, deci $\forall P \in a \Rightarrow P \in \alpha$.

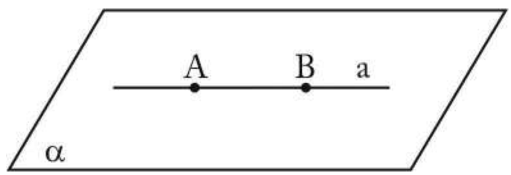


Figura 8

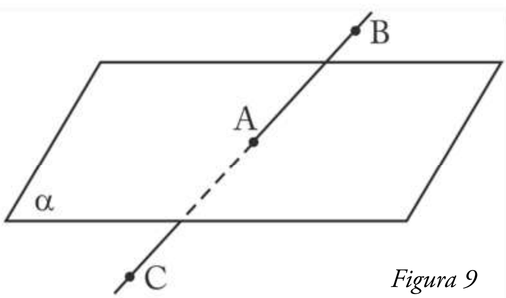


Figura 9

• O dreaptă poate să aibă cu un plan un singur punct comun.

De exemplu: Dacă punctul B este în semispațiul $[\alpha B$ și punctul C este în semispațiul opus, atunci dreapta BC va intersecta planul α într-un singur punct A. Spunem că dreapta BC înțeapă planul α (vezi figura 9). Avem $BC \cap \alpha = \{A\}$.

• O dreaptă a poate să nu aibă cu planul α niciun punct comun. În acest caz spunem că dreapta a este paralelă cu planul α. Notăm $a \parallel \alpha$, avem $a \cap \alpha = \emptyset$ (vezi figura 10).

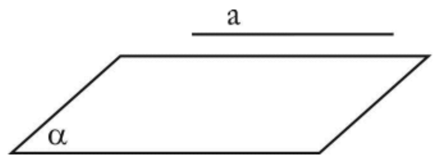


Figura 10

● **Relații între plane**

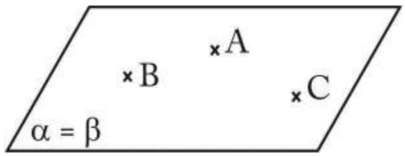


Figura 11

• O consecință a axiomei A_4 arată că dacă două plane au în comun trei puncte necoliniare, atunci ele **coincid**.

Deci, dacă A, B, C sunt puncte necoliniare, $A, B, C \in \alpha$ și $A, B, C \in \beta$, atunci $\alpha = \beta$ (vezi figura 11).

• Două plane care nu au niciun punct comun se numesc **plane paralele**.

În figura 12 planele α și β sunt paralele și notăm $\alpha \parallel \beta$ cu $\alpha \cap \beta = \emptyset$.

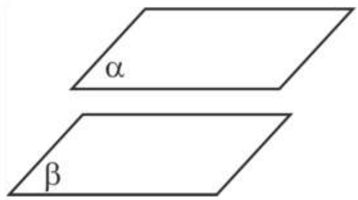


Figura 12

✪ **Teorema 1.** Dacă două plane distincte au în comun un punct, atunci ele au o dreaptă comună.

Ipoteză: $\begin{cases} \alpha, \beta, \alpha \neq \beta \\ A \in \alpha, A \in \beta \end{cases}$ *Concluzie:* Există $B \in \alpha$ și $B \in \beta$.

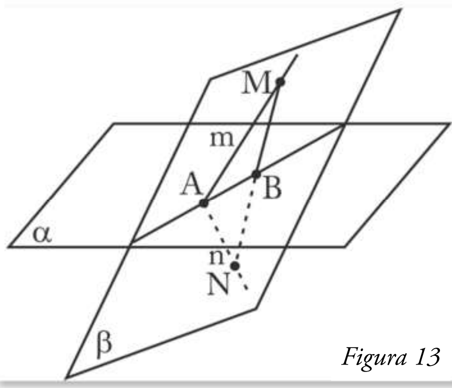


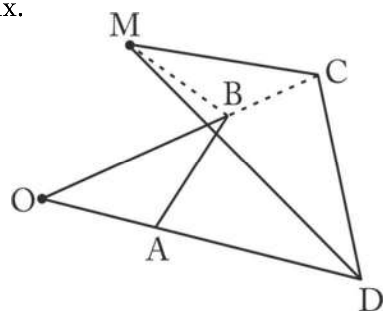
Figura 13

Demonstrație: Fie A punctul comun celor două plane, $A \in \alpha \cap \beta$. Considerăm în planul β semidreptele m și n de origine A situate în semispațiile opuse de frontieră α (vezi figura 13). Pe semidreapta m considerăm punctul M, iar pe semidreapta n considerăm punctul N. Conform axiomei A_1 rezultă că $MN \subset \beta$. Pe de altă parte, punctele M și N fiind în semispații opuse, dreapta MN „înțeapă“ planul α într-un punct B. Cum $B \in MN \subset \beta$, rezultă că $B \in \beta$, prin urmare $B \in \alpha \cap \beta$. Dreapta AB se numește intersecția planelor α și β. Despre planele α și β se spune că sunt **secante**.

B. Probleme rezolvate

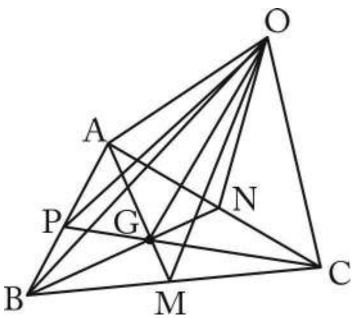
1. Fie ABCD un patrulater convex în care laturile opuse BC și AD nu sunt paralele, iar M un punct variabil nesituat în planul patrulaterului. Arătați că planele (MAD) și (MBC) trec printr-un punct fix.

Rezolvare



Planele (MAD) și (MBC), având un punct comun, M, au o dreaptă comună. Deoarece $AD \cap BC = \{O\}$ (vezi figura), $O \in (MAD) \cap \cap (MBC)$ și cum O este un punct fix în planul (ABC), acesta este punctul căutat.

2. Fie ABC un triunghi, M, N, P mijloacele laturilor BC, CA, respectiv AB și O un punct arbitrar în exteriorul planului (ABC). Arătați că planele (OAM), (OBN) și (OCP) au o dreaptă comună.



Rezolvare

Dreptele AM, BN, CP sunt medianele triunghiului ABC. Aceste drepte sunt concurente în G, centrul de greutate al triunghiului ABC. Având $G \in AM$ și $AM \subset (OAM)$, rezultă $G \in (OAM)$. În mod analog se demonstrează că $G \in (OBN)$ și $O \in (OCP)$. Dreapta comună planelor (OAM), (OBN), (OCP) (intersecția lor) este dreapta OG.

3. Se dau n puncte în spațiu $A_1, A_2, \ldots, A_n$, oricare trei necoliniare. Aflați $n \in \mathbb{N}^*$, știind că numărul de drepte determinate de cele n puncte este egal cu numărul de plane determinate de cele n puncte. *Ion Pătrașcu*

Rezolvare

Dacă considerăm fixat punctul A_1, el formează cu celelalte $n-1$ puncte, $n-1$ drepte $(A_1A_2, A_1A_3, \ldots, A_1A_{n-1}, A_1A_n)$. Repetând raționamentul pentru $A_2, A_3, \ldots, A_n$, vom obține de asemenea câte $n-1$ drepte. Deoarece în acest proces de numărare a dreptelor, fiecare dreaptă a fost numărată de două ori, numărul total de drepte $n_d = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

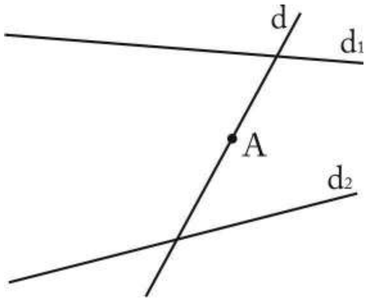
Să considerăm acum o dreaptă fixată, de exemplu A_iA_j, $i \neq j$, $i, j \in \overline{1, n}$ și punctul A_k, $i \neq j \neq k$. Odată fixată dreapta, punctul A_k poate fi ales în $n-2$

moduri. Punctele A_i, A_j, A_k formează un plan $\left(A_iA_jA_k\right)$. Deoarece am stabilit că sunt $\frac{n(n-1)}{2}$ drepte, dreapta A_iA_j poate fi aleasă în $\frac{n(n-1)}{2}$ moduri. Numărul de plane determinate va fi $n_p = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ (numărul 6 de la numitor a fost obținut prin împărțirea cu 3 a numărului $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ plane de tipul $\left(A_iA_jA_k\right)$ pentru că acestea din urmă au fost numărate de 3 ori).

Problema cere să găsim $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 3$ pentru care $n_d = n_p \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$. Obținem $\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{n-2}{3}-1\right)=0 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-5)}{6}=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow n=5$.

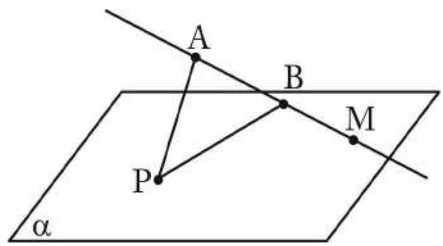
4. Arătați că dacă d_1 și d_2 sunt două drepte necoplanare și A este un punct în spațiu care nu aparține dreptelor, atunci există o dreaptă d care conține punctul A și intersectează dreptele d_1 și d_2.

Rezolvare



Punctul A și dreapta d_1 determină un plan α. În acest plan sunt conținute toate dreptele care trec prin A și întâlnesc dreapta d_1, precum și dreapta care trece prin A și este paralelă cu d_1. Fie $\beta = (A, d_2)$. Planele α și β având A un punct comun, au o dreaptă d comună. Această dreaptă d trece prin A și întâlnește d_1 și d_2.

5. Fie A și B două puncte situate în același semispațiu ce are frontiera planul α, dreapta AB nu este paralelă cu α. Aflați un punct M în planul α astfel încât $|MA - MB|$ să fie maximă.



Rezolvare

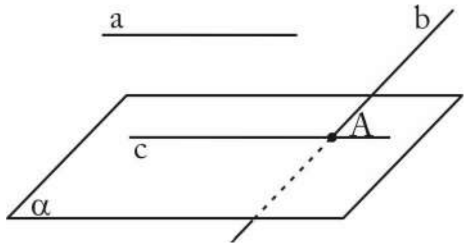
Fie $P \in \alpha$. În triunghiul PAB, $|PA - PB| < AB$. Dacă $AB \cap \alpha = \{M\}$, avem $|MA - MB| = AB$, în consecință punctul M este intersecția dreptei AB cu planul α.

6. Fie A, B, C, D puncte distincte în spațiu, astfel încât $AB = AC = AD = BC = CD = BD$. Demonstrați că punctele A, B, C, D nu pot fi toate în același plan.

Rezolvare

Presupunem prin absurd că A, B, C, D sunt puncte situate în același plan. Atunci triunghiul ABC este echilateral $(AB = BC = AC)$ și, având $AD = DB = DC$, punctul D este centrul cercului circumscris acestui triunghi. Deoarece ΔABC este ascuțitunghic, înseamnă că D este în interiorul lui. Din $DA = DB = AB$ avem că ΔDAB este echilateral, deci $m(\widehat{ADB}) = 60°$. Din $DB = DC = BC$ rezultă că ΔDBC este echilateral, deci $m(\widehat{BDC}) = 60°$. Din $DA = DC = AC$ rezultă că ΔDAC este echilateral, deci $m(\widehat{CDA}) = 60°$. Am obținut că suma măsurilor unghiurilor $\widehat{ADB}$, $\widehat{BDC}$, $\widehat{CDA}$ (unghiuri în jurul unui punct) este de $180°$, contradicție! Presupunerea făcută este falsă, deci A, B, C, D sunt necoplanare.

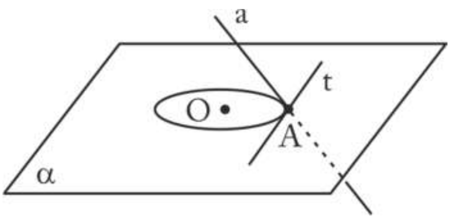
7. Fie α un plan dat, a o dreaptă paralelă cu α și b o dreaptă astfel încât $b \cap \alpha = \{A\}$. Construiți prin a și prin b câte un plan astfel încât dreapta lor de intersecție să fie conținută în α.



Rezolvare

Prin punctul A se construiește paralela c la dreapta a, $c \subset \alpha$. Notăm $\beta = (a, c)$ și $\gamma = (b, c)$. Dreapta cerută este chiar c.

8. Cercul $\mathscr{C}(O)$ este situat în planul α, iar dreapta a înțeapă planul α într-un punct A nesituat în interiorul cercului $\mathscr{C}(O)$. Construiți prin dreapta a un plan care intersectează cercul $\mathscr{C}(O)$ într-un singur punct. *Ion Pătrașcu*

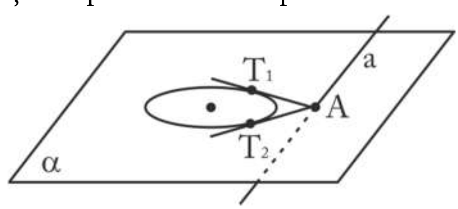


Rezolvare

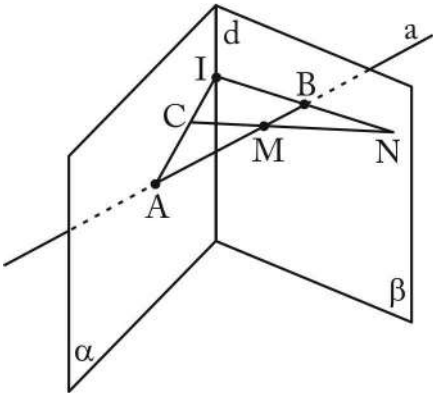
Sunt de analizat două cazuri:

1. Punctul $A \in \mathscr{C}(O)$. În acest caz construim tangenta t în A la cerc. Această dreaptă t și dreapta a determină planul căutat.

2. Punctul A este în exteriorul cercului. Construim tangentele AT_1 și AT_2 la cercul $\mathscr{C}(O)$. Planele $\beta = (T_1, a)$ și $\gamma = (T_2, a)$ sunt soluții ale problemei.



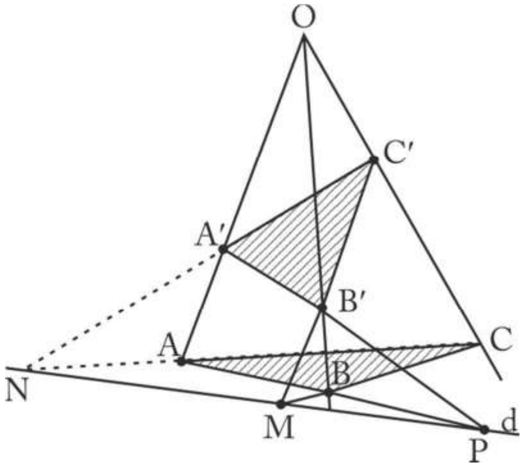
9. Fie α și β două plane secante a căror intersecție este dreapta d. O dreaptă a intersectează planul α în punctul A și planul β în punctul B. În planul α se consideră punctul C astfel încât dreptele AC și d nu sunt paralele. Dacă M este un punct mobil pe (AB) și $CM \cap \beta = \{N\}$, arătați că dreptele AC și BN se intersectează pe dreapta d.



Rezolvare

Notăm $\{I\} = AC \cap d$ și notăm $\gamma = (AIB)$. Avem $C \in AI \subset \gamma$, deci $C \in \gamma$ (1). $M \in (AB) \subset \gamma$, deci $M \in \gamma$ (2). Din (1) și (2) rezultă $CM \subset \gamma$. Deoarece $N \in CM$ rezultă $N \in \gamma$. Dar $N \in \beta$, $I \in \beta$. Rezultă că $\gamma \cap \beta = IN$. Cum $B \in \beta$ și $B \in \gamma$, rezultă că $B \in IN$, prin urmare $AC \cap BN = \{I\} \in d$.

10. Două triunghiuri ABC și $A'B'C'$ sunt astfel situate încât dreptele AA', BB', CC' sunt concurente într-un punct O și $BC \cap B'C' = \{M\}$, $CA \cap C'A' = \{N\}$, $AB \cap A'B' = \{P\}$. Demonstrați că punctele M, N, P sunt coliniare. (Teorema lui G. Desargues – 1636)



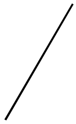
Rezolvare

Planele (ABC) și $(A'B'C')$ având punctul M comun ($M \in BC \subset (ABC)$, $M \in B'C' \subset (A'B'C')$) au o dreaptă comună – dreapta lor de intersecție. Notăm $d = (ABC) \cap (A'B'C')$. Cum $N \in (ABC) \cap (A'B'C')$ și $P \in (ABC) \cap (A'B'C')$ (același raționament ca în cazul lui M) avem că M, N, P aparțin dreptei d, deci sunt coliniare.

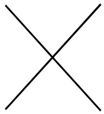
11. Să se afle numărul maxim de regiuni în care se poate împărți planul în care sunt considerate n drepte, $n \in \mathbb{N}^*$.

Rezolvare

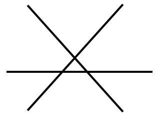
Vom nota cu r_n numărul maxim de regiuni în care împart planul n drepte conținute în plan. Observăm că dacă $n = 1$, $r_1 = 2$. Dacă $n = 2$, $r_2 = 4$ etc.



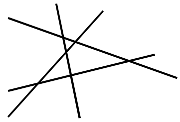
$n = 1;\ r_1 = 2$



$n = 2;\ r_2 = 4$



$n = 3;\ r_3 = 7$



$n = 4;\ r_4 = 11$

De asemenea, **observăm că:**

1. În configurația căutată nu putem avea drepte paralele deoarece acestea reduc numărul de regiuni. Într-adevăr, două drepte paralele formează în plan trei regiuni, pe când două drepte concurente formează în plan patru regiuni.

2. În configurația cu număr maxim de regiuni nu vor exista trei drepte care trec prin același punct, deoarece astfel am „pierde“ o regiune în formă de triunghi format din punctele de intersecție a dreptelor.

Așa cum am afirmat, fie r_n numărul maxim de regiuni formate în plan de n drepte. Presupunând acest număr cunoscut, să observăm cum obținem r_{n+1} dacă mai adăugăm la configurația cu n drepte o altă dreaptă. Această nouă dreaptă va fi intersectată de celelalte n în n puncte distincte. Fiecare segment de dreaptă și semidreaptă în care este împărțită noua dreaptă (a, $(n+1)-a$ dreaptă) determină într-o regiune veche două regiuni noi, prin urmare $r_{n+1} = r_n + n + 1$.

Așadar, vom avea: $r_n = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 3 + 2 + r_1$. Dar $r_1 = 2$ și folosind formula $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$, găsim $r_n = \dfrac{n(n+1)}{2} + 1$.

C. Probleme propuse (1)

1. Câte plane se pot construi:

a) printr-un punct;

b) prin două puncte;

c) prin trei puncte coliniare;

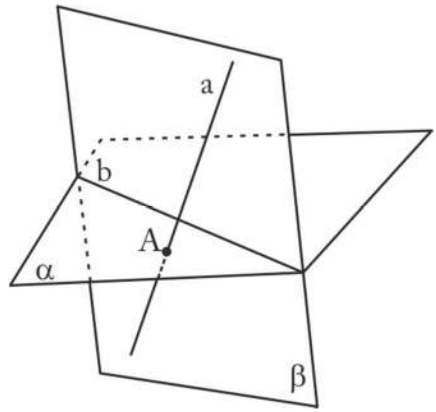
d) prin trei puncte necoliniare;

e) prin patru puncte dintre care trei sunt coliniare?

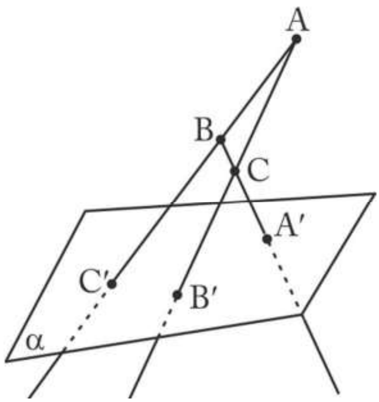
2. Dreapta d „înțeapă“ planul α în punctul A. Construiți în planul α punctele B și C care determină cu d un plan β. Ce puteți afirma despre intersecția planelor α și β?

3. Un cerc și un plan au în comun două puncte. Putem afirma că cercul este inclus în plan? Dar dacă cercul și planul au în comun trei puncte?

4. Fie ABCD un patrulater convex și M un punct exterior planului (ABC). Arătați că intersecția planelor (MAC) și (MBD) conține un punct fix din planul (ABC).



5. În figura alăturată α și β sunt două plane secante, dreapta lor de intersecție fiind b. Dreapta a este situată în planul β și taie planul α în punctul A. Punctul A este corect plasat? Justificați răspunsul dat.



6. În figura alăturată punctele A, B, C' sunt coliniare, punctele A, C, B' sunt coliniare și, de asemenea, punctele B, C, A' sunt coliniare. Punctele A', B', C' sunt situate în planul α. Desenul respectiv este corect? Justificați răspunsul dat.

7. Fie a și b două drepte concurente conținute în planul α și M un punct exterior planului α. Notăm β planul determinat de M și dreapta a și γ planul determinat de M și dreapta b. Evidențiați intersecția planelor α, β și γ.

8. Fie B și C două puncte în planul α și A un punct exterior planului α. M este un punct al dreptei AB, iar N un punct al dreptei AC. Arătați că dacă MN taie planul α, atunci MN taie dreapta BC.

9. Fie A, A', B, B' patru puncte în spațiu. Arătați că dacă dreptele AB și $A'B'$ nu sunt coplanare, de asemenea AA' și BB' nu sunt coplanare.

10. Dacă α este un plan dat, A și B sunt două puncte exterioare lui astfel încât dreapta AB nu este paralelă cu α și M este un punct oarecare exterior planului α, arătați că planele (MAB) și α au un punct comun.

Probleme propuse (2)

1. Fie ABCD un trapez cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$ și fie M și N mijloacele laturilor AB și CD. Notăm cu S un punct din spațiu, exterior planului (ABC). Arătați că planele (SAD), (SBC) și (SMN) au ca intersecție o dreaptă.

2. Fie α un plan dat și a, b două drepte date necoplanare, neparalele cu α și neconținute în α. Construiți prin a și b câte un plan și aceste plane să se intersecteze în planul α.

3. Fie M o mulțime de n drepte, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ astfel încât oricare două drepte din M au intersecția nevidă, dar oricare 3 drepte din M au intersecția vidă. Arătați că există un plan care conține cele n drepte.

4. Într-un plan se desenează 13 puncte distincte. În exteriorul său se mai iau 3 puncte distincte. Găsiți cel mai mic, respectiv cel mai mare număr de drepte care să se determine cu aceste puncte.

Nicolae Ivășchescu

5. Precizați cum pot fi alese 5 puncte în spațiu astfel încât numărul de plane determinate de ele să fie mai mic decât numărul de drepte determinate de ele. *Ion Pătrașcu*

6. Fie punctele A, B, C, D necoplanare și $M \in (AD)$ cu $[AM] \equiv [MD]$ și $N \in (AC)$, astfel încât $3NA - 2NC = 0$.

a) Demonstrați că dreapta MN intersectează planul (BCD) într-un punct P.

b) Calculați PC dacă $CD = 60\,\text{cm}$.

Nicolae Ivășchescu

7. Fie în spațiu dreptele a, b și punctul O astfel încât dreapta a intersectează planul (O, b) în punctul A și dreapta b intersectează planul (O, a) în B. Arătați că punctele A, O, B sunt coliniare.

8. Într-un plan sunt situate mai multe drepte, oricare trei neconcurente și oricare două neparalele. Știind că dreptele determină 947 de regiuni, aflați câte drepte sunt în plan. *Nicolae Ivășchescu*

9. Triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt situate în plane diferite și $BC \cap B'C' = \{M\}$, $AC \cap A'C' = \{N\}$, $AB \cap A'B' = \{P\}$. Se știe că punctele M, N, P sunt coliniare și că dreptele AA' și BB' nu sunt paralele. Arătați că dreptele AA', BB', CC' sunt concurente.

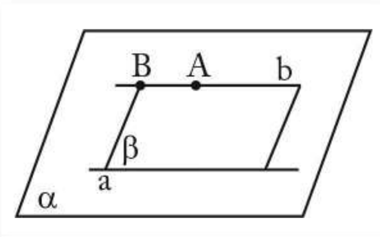
10. Într-un plan se află mai multe puncte, oricare trei necoliniare. Aflați numărul punctelor știind că dreptele determinate de ele sunt oricare două neparalele și oricare trei nu sunt concurente şi care determină în plan 3 082 de regiuni. *Nicolae Ivășchescu*

TEMA 2 PARALELISM ÎN SPAȚIU

A. Noțiuni teoretice

Axioma lui Euclid. Printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o paralelă și numai una la acea dreaptă.

✪ **Teorema 1.** Dacă o dreaptă care trece printr-un punct exterior unui plan este paralelă cu o dreaptă conținută în acel plan, atunci ea este paralelă cu planul.



Ipoteză: $\begin{cases} A \notin \alpha \\ A \in b \\ b \parallel a \\ a \subset \alpha \end{cases}$ *Concluzie:* $b \parallel \alpha$

Demonstrație:

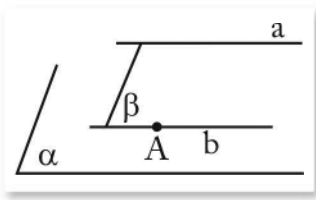
Presupunem prin reducere la absurd că dreapta b nu este paralelă cu planul α, atunci $b \cap \alpha = \{B\}$. (1)

Fie $\beta = (a, b)$. Cum $B \in b$ și $b \subset \beta \Rightarrow B \in \beta$. (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow B \in \alpha \cap \beta$. Dar $\alpha \cap \beta = a \Rightarrow B \in a$. Din $B \in b$ și $B \in a \Rightarrow$ $\Rightarrow B \in a \cap b$, contradicție cu ipoteza $b \parallel a$. Presupunerea făcută este falsă, prin urmare $b \parallel \alpha$.

✪ **Teorema 2.** Intersecția dintre un plan și planul determinat de un punct al său cu o dreaptă paralelă cu planul este o dreaptă paralelă cu dreapta dată.

Ipoteză: $\begin{cases} \alpha,\ A \in \alpha \\ a \parallel \alpha \\ \beta = (A, a) \\ \alpha \cap \beta = b \end{cases}$ *Concluzie:* $b \parallel a$



Demonstrație:

Presupunem prin reducere la absurd că b nu este paralelă cu a, atunci fie $\{B\} = b \cap a$. Din $B \in a$ (1), $B \in b$, $b \subset \alpha \Rightarrow B \in \alpha$ (2). Relațiile (1) și (2) implică $B \in a \cap \alpha$, contradicție cu ipoteza $a \parallel \alpha$. Presupunerea făcută este falsă, deci $b \parallel a$.

Remarcă

Din teorema 2 rezultă că: Dacă printr-un punct al unui plan dat ducem o paralelă a la o dreaptă dată, paralelă cu planul, atunci dreapta a este inclusă în planul dat.

✪ **Teorema 3. (Tranzitivitatea relației de paralelism a dreptelor)**

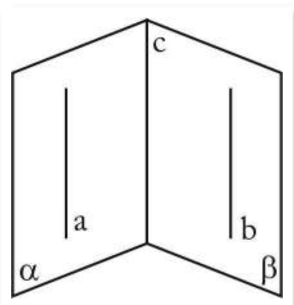
Două drepte paralele cu o a treia dreaptă din spațiu sunt paralele între ele.

Ipoteză: $\begin{cases} a \parallel c \\ b \parallel c \end{cases}$ *Concluzie:* $a \parallel b$

Demonstrație:

Să presupunem prin absurd că $a \cap b = \{A\}$. Cum a și b sunt distincte, rezultă că prin A putem duce două paralele la dreapta c. Prin urmare, contrazicem axioma lui Euclid, în consecință, $a \cap b = \varnothing$. Trebuie demonstrat în continuare că a și b sunt coplanare. Fie $B \in b$ și $\alpha = (B,\ a)$. Deoarece $c \parallel a$, din teorema 1 obținem că $c \parallel \alpha$. Dreapta b fiind dusă prin $B \in \alpha$, paralela cu $c \parallel \alpha$ va fi conținută în α. Așadar a și b sunt conținute în planul α și $a \cap b = \varnothing$, rezultă deci că $a \parallel b$.

✪ **Teorema 4.** Dacă prin două drepte paralele ducem două plane secante, dreapta lor comună este paralelă cu dreptele date.



Ipoteză: $\begin{cases} a \parallel b \\ \alpha \supset a \\ \beta \supset b \\ \alpha \cap \beta = c \end{cases}$ *Concluzie:* $\begin{cases} c \parallel a \\ c \parallel b \end{cases}$

Demonstrație:

Deoarece $a \parallel b$ și $b \subset \beta$, rezultă din teorema 1 că $a \parallel \beta$. Planul α dus prin $a \parallel \beta$ intersectează β după c, atunci conform teoremei 2 rezultă că $c \parallel a$. Din $c \parallel a$, $a \parallel b$ și teorema 3 obținem că $c \parallel b$.

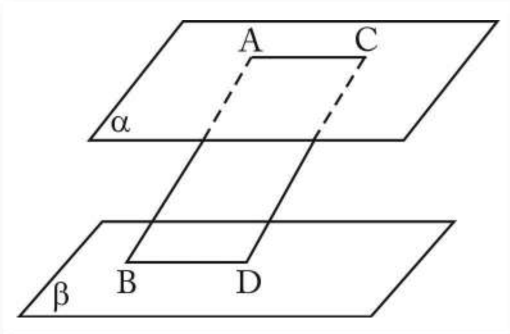
✪ **Teorema 5.** Dacă două plane sunt paralele, atunci orice dreaptă conținută în unul dintre ele este paralelă cu celălalt plan.

Demonstrația se poate face prin metoda reducerii la absurd. Exercițiu!

✪ **Teorema 6.** Dacă două plane sunt paralele și un al treilea plan le intersectează, atunci dreptele de intersecție sunt paralele.

Demonstrație prin reducere la absurd. Exercițiu!

✪ **Teorema 7.** Segmentele de dreaptă paralele cu extremitățile în plane paralele sunt congruente.



Ipoteză: $\begin{cases} A,\ C \in \alpha \\ B,\ D \in \beta \\ \alpha \parallel \beta \\ AB \parallel CD \end{cases}$

Concluzie: $[AB] \equiv [CD]$

Demonstrație:

Deoarece $AB \parallel CD$, notând $\gamma = (AB,\ CD)$ și aplicând teorema 6 rezultă că $AC \parallel BD$. Prin urmare, patrulaterul $ABDC$ este un paralelogram, deci $[AB] \equiv$ $\equiv [CD]$.

Observație. Din demonstrație rezultă că și $[AC] \equiv [BD]$, deci am putea formula această teorema și astfel:

Două drepte paralele determină pe două plane paralele pe care le intersectează segmente congruente. De asemenea, dreptele determină și între plane segmente congruente.

✪ **Teorema 8. (Tranzitivitatea relației de paralelism a planelor)**

Două plane paralele cu un al treilea plan sunt paralele între ele.

Ipoteză: $\begin{cases} \alpha,\ \beta,\ \gamma \\ \alpha \parallel \gamma \\ \beta \parallel \gamma \end{cases}$ *Concluzie:* $\alpha \parallel \beta$

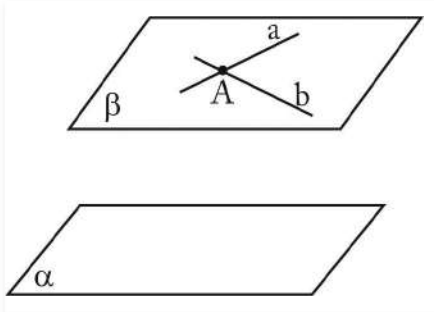
Demonstrație:

Presupunem prin absurd că $\alpha \nparallel \beta$ și notăm $a = \alpha \cap \beta$. Din teorema 6 rezultă că intersecția planului α cu γ, adică dreapta pe care o notăm b, este paralelă cu a. Însă, $\alpha \cap \gamma = b$ este o contradicție cu ipoteza $\alpha \parallel \gamma$. În consecință, presupunerea făcută este falsă, prin urmare $\alpha \parallel \beta$.

✪ **Teorema 9.** Printr-un punct exterior unui plan dat trece un singur plan paralel cu planul dat.

Demonstrație:

Fie α planul dat și $A \notin \alpha$. Construim prin A două drepte a și b paralele cu planul α. Notând $\beta = (a, b)$, demonstrăm prin reducere la absurd că $\beta \parallel \alpha$. Dacă presupunem că $\beta \nparallel \alpha$, fie $c = \beta \cap \alpha$, atunci conform teoremei 2 dreapta c va fi paralelă cu una dintre dreptele a și b. (Nu este posibil să fie paralelă cu amândouă dreptele deoarece s-ar contrazice axioma lui Euclid.) Atunci cealaltă dreaptă va intersecta c, deci planul α, contrazicându-se astfel ipoteza $a \parallel \alpha$ sau $b \parallel \alpha$. Așadar, am obținut un plan β care trece prin A și este paralel cu α. Unicitatea acestui plan rezultă din teorema 8. Într-adevăr, dacă am presupune că prin A trec două plane β și γ paralele cu α, atunci teorema 8 implică $\beta \parallel \gamma$, ceea ce contrazice $A \in \beta \cap \gamma$.



Remarcă

Din această teoremă rezultă că dacă un plan conține două drepte concurente paralele cu un alt plan, atunci planele sunt paralele.

Următoarea teoremă, adevărată în plan, este adevărată și în spațiu.

✪ **Teorema 10.** (**Teorema unghiurilor cu laturile paralele**)

Două unghiuri care au laturile respectiv paralele sunt congruente sau suplementare.

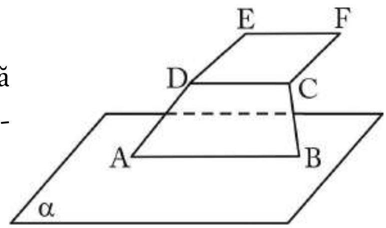
Teorema lui Thales din plan are următoarea formă în spațiu:

✪ **Teorema 11.** (**Teorema lui Thales în spațiu**)

Dacă două drepte intersectează mai multe plane paralele, atunci pe drepte se formează segmente proporționale.

B. Probleme rezolvate

1. Trapezul ABCD are baza mare AB inclusă în planul α. Patrulaterul CDEF este un paralelogram cu $E \notin \alpha$. Arătați că $EF \parallel \alpha$.

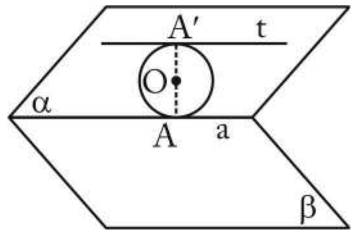


Rezolvare

CDEF paralelogram $\Rightarrow CD \parallel EF$; (1)

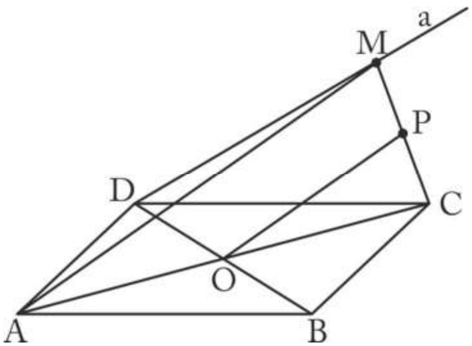
ABCD trapez și AB bază $\Rightarrow CD \parallel AB$. (2) Din (1) și (2) se obține că $EF \parallel AB$ și cum $AB \subset \alpha$, rezultă că $EF \parallel \alpha$.

2. Fie α și β două plane secante, $\alpha \cap \beta = a$. Un cerc $\mathscr{C}(O,\ r)$ este inclus în planul α și este tangent într-un punct A dreptei a. Arătați că există o tangentă t la cercul $\mathscr{C}(O,\ r)$, $t \subset \alpha$ pentru care $t \parallel \beta$.



Rezolvare

În planul α construim punctul A și simetricul lui față de O, A', evident $A' \in \mathscr{C}(O,\ r)$. Construim tangenta t la $\mathscr{C}(O,\ r)$ în A'. Deoarece A, O, A' sunt coliniare, $t \perp OA'$ și $a \perp OA$, rezultă că $t \parallel a$. Cum $a \subset \beta$, se obține $t \parallel \beta$.



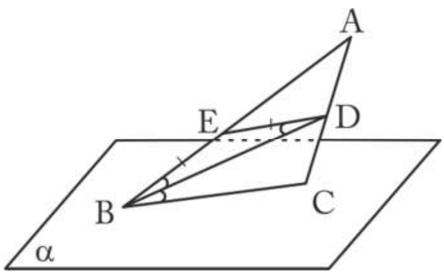
3. Fie ABCD un paralelogram de centru O şi o dreaptă a care trece prin A şi nu este inclusă în planul (ABC). Dacă M este un punct pe dreapta a și P este mijlocul lui $[MC]$, arătați că dreapta PO este paralelă cu planul (MAD).

Rezolvare

În ΔCMA, PO este linie mijlocie, deci $PO \parallel MA$. Deoarece $MA \subset (MAD)$ și $PO \parallel MA$, rezultă cerința $PO \parallel (MAD)$.

4. Punctele B și C aparțin unui plan α, iar punctul A este exterior planului α. Notăm cu D piciorul bisectoarei unghiului $\widehat{ABC}$ și fie $E \in (AB)$, astfel încât $(BE) \equiv (DE)$. Demonstrați că $DE \parallel \alpha$.

Ion Pătrașcu



Rezolvare

În ΔABC, (BD bisectoare $\Rightarrow \widehat{ABD} \equiv$
$\equiv \widehat{DBC}$. (1)

Din $(BE) \equiv (DE)$ rezultă că triunghiul EBD este isoscel, prin urmare $\widehat{EBD} \equiv \widehat{EDB}$. (2)

Din (1) și (2) obținem că $\widehat{EDB} \equiv \widehat{DBC}$. (3)

Relația (3) arată că $DE \parallel BC$, și cum $BC \subset \alpha$, rezultă că $DE \parallel \alpha$.

5. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare. Notăm cu G_1 centrul de greutate al triunghiului ABC, cu G_2 centrul de greutate al triunghiului ACD și cu G_3 centrul de greutate al triunghiului ABD. Arătați că:

a) $G_1G_2 \parallel (BCD)$; **b)** $(G_1G_2G_3) \parallel (BCD)$.

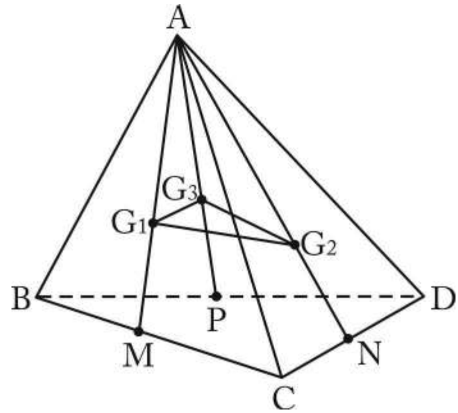
Rezolvare

a) G_1 aparține medianei AM a ΔABC și $AG_1 = 2G_1M$ (1), $M \in (BC)$.

G_2 aparține medianei AN a ΔACD și $AG_2 = 2G_2N$ (2), $N \in (CD)$.

Din (1) și (2) $\Rightarrow \dfrac{AG_1}{G_1M} = \dfrac{AG_2}{G_2N} = \dfrac{2}{1} \Rightarrow$ $\Rightarrow G_1G_2 \parallel MN$.

Deoarece $MN \subset (BCD) \Rightarrow G_1G_2 \parallel$ $\parallel (BCD)$. (3)



b) Analog se arată că $\dfrac{AG_3}{G_3P} = \dfrac{2}{1}$, unde P este mijlocul lui (BD). Din $\dfrac{AG_1}{G_1M} = \dfrac{AG_3}{G_3P} \Rightarrow G_1G_3 \parallel MP$ și cum $MP \subset (BCD)$ obținem că $G_1G_3 \parallel (BCD)$. (4)

Relațiile (3) și (4) conduc la $(G_1G_2G_3) \parallel (BCD)$.

6. Fie ABCDEF un hexagon regulat și P, Q puncte de aceeași parte a planului (ABC), astfel încât triunghiurile PBC și EFQ sunt echilaterale. Știind că PQ este paralelă cu FB, arătați că:

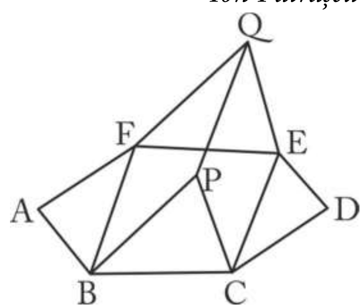
a) patrulaterele CPQE și BPQF sunt în general trapeze isoscele;

b) dacă, în plus, $PQ = CE$, atunci $(PBC) \parallel (QEF)$.

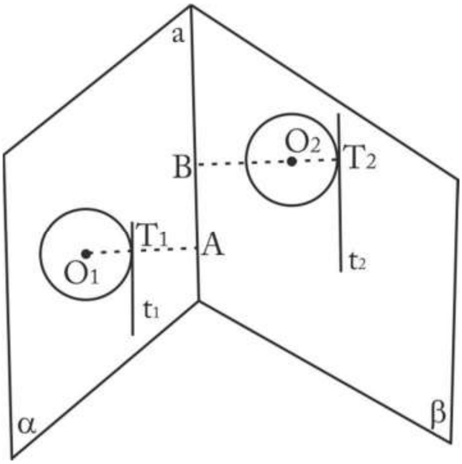
Ion Pătrașcu

Rezolvare

a) ABCDEF fiind hexagon regulat, rezultă că $BC = FE$ și $BF = CE$. Cum $\Delta BPC \equiv \Delta FQE \Rightarrow$ $\Rightarrow PB = FQ$. (1) Din ipoteză $PQ \parallel BF$ (2); relațiile (1) și (2) implică BPQF trapez isoscel. Deoarece $PQ \parallel BF$ și $BF \parallel CE$ (din proprietățile hexagonului regulat), rezultă că $PQ \parallel CE$, relație care împreună cu $CP = QE$ conduce la CPQE trapez isoscel.



b) Din $PQ = CE$ și $PQ \parallel CE$ rezultă că patrulaterul PCEQ este paralelogram, prin urmare $PC \parallel QE$. Din $BC \parallel FE$ (laturi opuse în hexagonul regulat ABCDEF) și $PC \parallel QE$ obținem că $(PBC) \parallel (QFE)$.



7. În două plane secante α și β sunt conținute cercurile $\mathscr{C}(O_1, r_1)$, respectiv $\mathscr{C}(O_2, r_2)$. Construiți două tangente t_1, t_2 la $\mathscr{C}(O_1, r_1)$, respectiv la $\mathscr{C}(O_2, r_2)$, astfel încât t_1 și t_2 să fie paralele.

Rezolvare

Fie $a = \alpha \cap \beta$. Construim $O_1A \perp a$, $A \in a$ și notăm cu T_1 unul dintre punctele de intersecție ale dreptei O_1A cu $\mathscr{C}(O_1, r_1)$. Notăm cu B proiecția pe a a centrului O_2 și notăm cu T_2 unul dintre punctele de intersecție ale dreptei O_2B cu $\mathscr{C}(O_2, r_2)$. Tangentele t_1, t_2 construite în T_1 la $\mathscr{C}(O_1, r_1)$ și în T_2 la $\mathscr{C}(O_2, r_2)$, fiind paralele cu a, sunt paralele între ele.

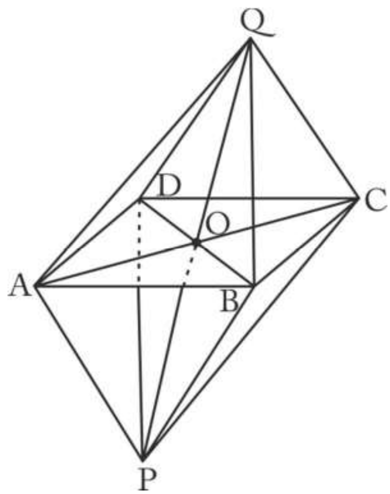
8. Fie ABCD un paralelogram. Punctele P și Q sunt de o parte și de alta a planului (ABC), astfel încât $AP \parallel CQ$ și triunghiurile ABP și CDQ sunt echilaterale. Arătați că:

a) punctele P, O, Q sunt coliniare, unde O este centrul paralelogramului;

b) $PB \parallel QD$;

c) $(QCB) \parallel (PAD)$.

Rezolvare



a) $AP \parallel CQ$ și $AP = CQ$ (fiind laturi de triunghiuri echilaterale congruente). Obținem că patrulaterul APCQ este paralelogram şi cum $AO = OC$, rezultă că O este centrul acestui paralelogram, prin urmare punctele P, O, Q sunt coliniare.

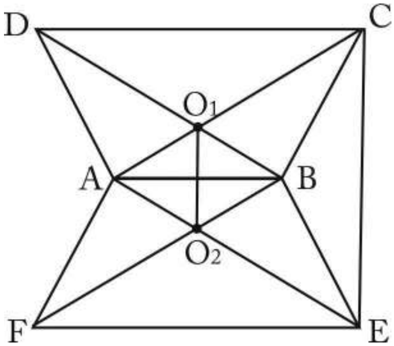
b) Din $PO = OQ$ și $OB = OD$ rezultă că PBQD este paralelogram, deci $PB \parallel QD$.

c) Din $BC \parallel AD$ laturi opuse în paralelogramul ABCD și $CQ \parallel PA$ laturi opuse în paralelogramul APCQ obținem că $(QCB) \parallel (PAD)$.

9. Trapezele ABCD și ABEF au bazele CD și EF congruente. Fie O_1 și O_2 intersecțiile diagonalelor celor două trapeze. Demonstrați că:

a) $O_1O_2 \parallel (CBE)$; **b)** $O_1O_2 \parallel (EFD)$.

Rezolvare



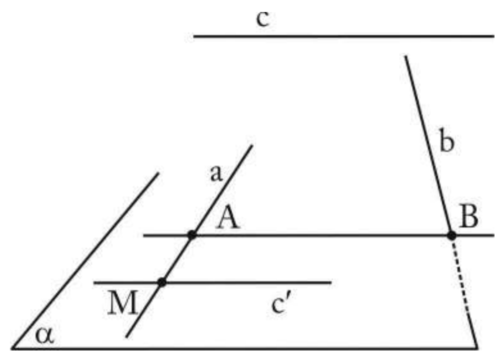
a) În trapezul ABCD, conform teoremei lui Thales, avem $\frac{AO_1}{O_1C}=\frac{AB}{CD}$. (1) În mod analog, din trapezul ABEF obținem: $\frac{AO_2}{O_2E}=\frac{AB}{EF}$. (2) Deoarece $CD=EF$, din relațiile (1) și (2) rezultă $\frac{AO_1}{O_1C}=\frac{AO_2}{O_2E}$. Această relație și reciproca teoremei lui Thales implică $O_1O_2 \parallel CE$. (3)

Relația (3) și $CE \subset (CBE)$ conduc la $O_1O_2 \parallel (CBE)$.

b) Rezolvarea este analogă celei de la a).

10. Fie a, b, c trei drepte, două câte două necoplanare. Construiți o dreaptă care să intersecteze dreptele a și b și să fie paralelă cu dreapta c.

Rezolvare



Printr-un punct M al dreptei a ducem o paralelă c' la dreapta c. Notăm $\alpha=(a, c')$. Fie $\{B\}=b\cap\alpha$ și prin B ducem în α $BA \parallel c'$, $A\in a$. Dreapta AB este cea cerută. Problema nu are soluție dacă dreapta b este paralelă cu planul α.

C. Probleme propuse (1)

1. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare. Notăm cu M și N, respectiv mijloacele segmentelor BC și CD. Arătați că dreapta MN este paralelă cu planul (ABD).

2. Fie ABCDEF un hexagon regulat și P un punct exterior planului (ABC) astfel încât triunghiurile PBC și PEF sunt echilaterale. Construiți dreapta de intersecție a planelor (PBC) și (PEF).

3. Dacă a și b sunt două drepte paralele, câte plane paralele care să conțină dreapta a, respectiv dreapta b, se pot construi?

4. Fie a, b, c trei drepte în spațiu astfel încât a și b sunt necoplanare, a și c sunt necoplanare. Rezultă atunci că b și c sunt necoplanare?

5. Punctele necoliniare A, B, C aparțin unui plan α, iar D este exterior planului. Notăm cu M mijlocul segmentului AB. Construiți prin M un plan β paralel cu dreptele AD și BC.

6. Dacă două unghiuri în spațiu sunt congruente și au două laturi respectiv paralele, rezultă că ele sunt unghiuri cu laturile paralele?

7. Dreapta a intersectează planul α într-un singur punct, notat A. Printr-un alt punct al dreptei a se duce o dreaptă b paralelă cu α. Notăm cu β planul determinat de dreptele a și b. Arătați că planul β intersectează planul α după o dreaptă paralelă cu dreapta b.

8. ABCD este un paralelogram conținut într-un plan α. Se duc prin vârfurile paralelogramului patru drepte paralele a, b, c, d. Un plan β intersectează aceste drepte în punctele M, N, P, Q, $(M \in a,\ N \in b,\ P \in c,\ Q \in d)$. Care este natura patrulaterului MNPQ?

9. Dacă o dreaptă intersectează unul dintre două plane paralele într-un singur punct, arătați că îl intersectează și pe celălalt.

10. O dreaptă a are cu planul α un singur punct A comun. Prin punctul A se duce în planul α o dreaptă b. Se consideră punctele P și Q pe a, respectiv pe b. Notăm cu M mijlocul segmentului PQ și cu N simetricul lui A față de M. Demonstrați că dreapta PN este paralelă cu planul α.

Probleme propuse (2)

1. Se dau două drepte a şi b necoplanare și planul α. Fie $\{A\} = a \cap \alpha$ și $\{B\} = b \cap \alpha$. Construiți dreapta CD paralelă cu α cu $C \in a$ și $D \in b$.

2. Fie ABCD și ABC'D' două trapeze situate în plane diferite cu $AB \parallel CD \parallel C'D'$ și $(CD) \equiv (C'D')$. Notăm $\{O\} = AC \cap BD$ și $\{O'\} = AC' \cap$

$\cap BD'$. Paralelele duse prin O și O' la AB intersectează $[BC]$ și $[BC']$ în P, respectiv P'. Demonstrați că dreapta PP' este paralelă cu planul (MOO'), unde M este mijlocul bazei $[AB]$.

Ion Pătrașcu, Concursul „Sfera"

3. Fie ABCD un tetraedru și G centrul de greutate al feței (BCD). Paralelele prin B, C, D la AG intersectează planele (ACD), (ABD), (ABC) respectiv în B_1, C_1, D_1. Arătați că $(B_1C_1D_1) \parallel (BCD)$.

Ion Albu, Problema O.VIII.85, R.M.T.

4. Fie d, d' două drepte pe care se iau respectiv punctele A, B, C și A', B', C'. Arătați că se pot duce prin dreptele AA', BB', CC' plane paralele între ele dacă și numai dacă $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$.

5. Se dau un plan α și două drepte a, b necoplanare și neconținute în α. Construiți un plan β care să îndeplinească următoarele condiții:

a) $\beta \parallel \alpha$; **b)** $a \cap \beta \neq \varnothing$; **c)** $b \subset \beta$.

Ion Pătrașcu, Problema 415, Revista „Alpha"

6. Fie ABCD un paralelogram și E un punct în exteriorul planului său. Notăm cu M și N mijloacele segmentelor EC și EB.

a) Arătați că AM și DN sunt drepte concurente.

b) Fie O intersecția dreptelor AM și DN și G centrul de greutate al triunghiului ABD. Demonstrați că $OG \parallel (BMD)$.

7. Planul unui triunghi ABC confecționat din carton este paralel cu un plan dat α. Se știe că $AB = 18$ cm, $AC = 22$ cm și $BC = 32$ cm. O sursă de lumină S „aruncă" o umbră $A_1B_1C_1$ a triunghiului ABC pe planul α. Aflați aria triunghiului $A_1B_1C_1$ cunoscând că $\frac{SA}{A_1A} = \frac{2}{3}$.

8. Fie ABCD un tetraedru, M este mijlocul muchiei AB, iar N mijlocul muchiei CD.

a) Construiți prin M și N un plan paralel cu muchiile AD și BC.

b) Dacă P și Q sunt intersecțiile planului de la punctul a) cu (AC) și (BD), ce fel de patrulater este MNPQ?

c) Arătați că pentru orice plan dus prin M și N, care intersectează pe (AC) în R și pe (BD) în S avem $\frac{AR}{RC}=\frac{SD}{SB}$.

Ion Pătrașcu, Concursul „Gherghe Dumitrescu"

9. În tetraedrul ABCD, muchia AC este medie proporțională între AB și AD. Ducem bisectoarea AM în triunghiul BAD, $M\in(BD)$ și simediana AN în triunghiul DAC. Demonstrați că MN este paralelă cu planul (ABC).

Ion Pătrașcu, Problema L 20, Revista „Sfera"

10. Pătratele ABCD și ABEF nu sunt situate în același plan. Se iau pe (AC) și pe (BF) punctele M, respectiv N, astfel ca $[AM]\equiv[BN]$. Demonstrați că dreapta MN este paralelă cu planul (CDF).

11. Fie tetraedrul ABCD în care $AB=BD=BC$ și $m\left(\widehat{ABD}\right)=m\left(\widehat{ABC}\right)=$ $=m\left(\widehat{DBC}\right)=90°$. Dacă $BM\perp AD$, $BN\perp AC$, $M\in AD$, $N\in AC$, P este mijlocul segmentului (BM), Q este mijlocul segmentului (BN), $S\in BN$ astfel încât $\widehat{BAQ}=\widehat{SAN}$ și I este centrul cercului înscris în triunghiul ADC, demonstrați că:

a) $PQ\parallel(BCD)$; **b**) $IS\parallel(BCD)$.

Ion Pătrașcu, Nicolae Ivășchescu,
Concursul „Gheorghe Dumitrescu"

12. Fie a, b, c drepte în spațiu astfel încât $a\cap b=\{O\}$, a și c sunt necoplanare, b și c sunt necoplanare, iar a, b, c nu sunt paralele cu un același plan.

a) Arătați că există o infinitate de drepte d care intersectează simultan dreptele a, b, c.

b) Construiți o dreaptă d care determină pe a, b, c segmente congruente.

c) Construiți dreapta d astfel încât aria triunghiului OAB să fie minimă, unde $\{A\}=a\cap d$ și $\{B\}=b\cap d$.

Ion Pătrașcu, P.P. VIII 1204, Revista „Alpha"

CUPRINS