

**FORMA**  
LUCRURILOR

Marco Andreatta este profesor de geometrie la Universitatea din Trento. Studiile sale se concentrează asupra geometriei algebrice proiective. Este directorul Departamentului de Matematică al Centrului Internațional de Cercetări Matematice din Trento și președintele Muzeului Științelor din Trento.

MARCO ANDREATTA

**FORMA**  
**LUCRURILOR**  
**ALFABETUL GEOMETRIEI**

Traducere din italiană de  
Liviu Ornea

 HUMANITAS  
BUCUREȘTI

*Silviei,*  
care a dat formă viselor mele

# Cuprins

INTRODUCERE .....	9
1. SPAȚIUL, O PROBLEMĂ FILOZOFICĂ .....	13
Geneza, geometria greacă 13 Galilei, Descartes și Fermat, depășirea clasicismului 25 Nașterea analizei matematice 30 Geometria devine modernă 33	
2. CURBE.....	40
La început a fost punctul 40 Din nou în Grecia, originea lucrurilor 42 Teorema lui Pitagora: se intră în lumea ideilor 47 O curbă după alta 49 Cum se construiește o curbă 51 Descartes și geometria 55 O problemă de tangență 60 Galilei, un nou mod de a pune problema 67 Calculul, alte probleme, alte curbe 71 Curbura... și drumul drept se pierde 81 În căutarea punctelor raționale 84 Cum construiesc curbele cei născuți în era digitală 91	
3. SUPRAFEȚE.....	94
Arhimede și geometria sferei 97 Și suprafețele se descriu cu ajutorul ecuațiilor 105 Suprafețele cu singularități. Recorduri 108 Drumul cel mai scurt 111 Teorema „egregium“ a lui Gauss 115 Curbura unei suprafețe 118 Hărți geografice 124 Geometrii neeuclidiene 130	
4. GEOMETRIA DIN ZILELE NOASTRE.....	141
O lecție academică 141 De la Riemann la relativitatea generală 158 Un program pentru a face geometrie 164 Cum să pavezi spațiul 171 Revoluția pictorilor italieni 173 Geometria algebrică proiectivă 179 De la Programul de la Erlangen la particula lui Dumnezeu 188 Topologia, geometrie extremă 190 Problemele mileniului 201	

# Introducere

*Geometrie* e un cuvânt care vine din greacă, *γεωμετρία*, și înseamnă „măsura pământului“. Termenul indică o disciplină veche, unul dintre cele mai studiate și sofisticate sisteme ale gândirii filozofice, capabil să furnizeze interpretări ale lumii în care trăim și tehnicile de care avem nevoie ca să ne putem împlini așteptările și dorințele, sistem care s-a dezvoltat printr-un proces evolutiv caracteristic speciei umane în raporturile sale cu spațiul.

Azi, geometria e o știință organizată în mai multe subdomenii, cu multiple teme de cercetare și probleme deschise, corelată în varii forme cu alte științe și având numeroase aplicații în lumea tehnicii și a producției. Fiecare școală, universitate sau centru de cercetări din lume are un sector, fie el didactic sau de cercetare, dedicat geometriei.

O poveste care a început cu peste trei mii de ani în urmă, în care regăsim caracteristicile dezvoltării evolutive a gândirii științifice, constând în largiri succesive ale domeniului studiat odată cu îmbunătățirea continuă a tehnicilor de cercetare, marcată de momente de adevărată revoluție a gândirii. O poveste corală, construită cu concursul foarte multor savanți adesea necunoscuți, caracterizată de opera câtorva mari maestri ale căror fantezie și inteligență i-au determinat dezvoltarea. Unii dintre cei mai mari oameni de știință contemporani lucrează în acest domeniu, iar descoperirile lor sunt considerate printre cele mai originale și fecunde din panorama științifică actuală.

În această „prezentare minimală“ am vrut să țin seama de dezvoltarea istorică a geometriei: am ales să povestesc anumite

aspecte care mi se par fundamentale prin prisma rezultatelor obținute de mari geometri, într-o perspectivă temporală, plecând de la Thales și terminând cu Grigori Perelman. Atunci când s-a putut, am încercat și să redau întocmai cuvintele protagoniștilor acestei aventuri a cunoașterii. Matematica e și un limbaj, acela al științei; formularea unor teorii noi sau a unor rezultate noi nu poate fi „neutră”, ea reflectă gustul și sensibilitatea științifică a autorului și, aproape întotdeauna, determină dezvoltările ulterioare.

Cititorul să nu se lase totuși înșelat, să nu creadă că va citi doar un text cu valențe istorice. Teoriile descrise sunt deosebit de „robuste” și, aplicate domeniului la care se referă, sunt azi absolut valide, în aceeași formă și în același mod în care au fost create. Geometria euclidiană, de exemplu, care studiază planul obișnuit și obiectele definite în el, e azi perfect egală cu aceea descrisă în *Elementele* lui Euclid.

Acest tip de abordare e, probabil, inevitabil pentru a prezenta o cunoaștere străveche care, după cum am mai spus, s-a dezvoltat lărgindu-și treptat aria de cercetare și rafinându-și tehnicile.

Paginile primului capitol încearcă să schițeze un cadru general al conținutului cărții, dimpreună cu câteva chei de lectură de tip filozofic și epistemologic.

Urmează alte trei capitole în care plec de la concepte de bază și de la rezultate legate de ele, avansând treptat către idei mai complexe, ajungând până la unele dintre cele mai importante rezultate din geometria zilelor noastre. În capitolul al doilea e vorba despre curbe și despre cum le-au folosit mari matematicieni ca să construiască teorii care stau acum la baza geometriei. În capitolul al treilea, studiem suprafețele și unele teoreme surprinzătoare care le descriu; sunt rezultate care au influențat enorm și au caracterizat istoria progresului uman. În ultimul capitol e vorba despre varietăți, obiecte geometrice cu mai multe dimensiuni, care generalizează curbele și suprafețele – concept extrem de versatil cu care geometria a putut ataca probleme puse de alte discipline științifice. Unele dintre

teoriile și teoremele propuse și-au găsit deja aplicații importante; pentru altele, așa cum se întâmplă adesea în matematică, aplicațiile vor apărea peste câteva decenii în forme și modalități pe care încă nu ni le imaginăm, dar care, atunci, ni se vor părea cu totul naturale.

Calde mulțumiri colegilor Claudio Fontanari, Gianluca Occhetta și Roberto Pignatelli pentru numeroasele discuții științifice și lectura atentă a unor părți din carte.



# 1. Spațiul, o problemă filozofică

## GENEZA, GEOMETRIA GREACĂ

De unde să pornim, așadar, când vorbim despre teorii geometrice? Egiptenii și babilonienii foloseau concepte geometrice nu tocmai rudimentare. Pe tăblița de lut din perioada paleo-babiloniană 1800–1600 î.Cr. (figura 1.1), de exemplu, vedem desenat un pătrat de latură 30 împreună cu diagonalele sale.

În scriere cuneiformă și în sistemul sexagesimal pot fi citite numerele 1,414213 și 42,42639, aproximări excelente pentru  $\sqrt{2}$  și  $30 \cdot \sqrt{2}$ . Reprezintă măsura diagonalelor pătratului de latură 1 și ale pătratului de latură 30, după cum se vede dintr-un calcul care necesită cunoașterea teoremei lui Pitagora – cel puțin în anumite forme particulare ale ei.

Primii care au dezvoltat organic geometria au fost filozofii greci; ei sunt cei care au elaborat o gândire matematică dezvoltând-o din rezultate stabilite anterior, pornind de la doar puține principii de bază, oarecum evidente, pe care le-au numit *axiome* sau *postulate*. Din acest punct de vedere, figura emblematică ar putea fi Thales din Milet (625–547 î.Cr.), mereu în căutarea unui *principiu inițial de la care pleacă totul*. Din



Figura 1.1

manualele de filozofie aflăm că stabilise *apa* drept element primar din care se trage viața. În manualele de geometrie stă scris că ar fi luat drept punct de plecare conceptul de *dreaptă* pe care, de altfel, se bazează faimoasa sa teoremă de conservare a raportului dintre segmentele determinate pe o dreaptă arbitrară de intersecțiile cu două drepte paralele fixate. Hegel afirmă că

Filozofia începe cu această propoziție, fiindcă prin ea conștiința își dă seama că unul este esență, ceea ce e adevărat, că numai el este ceea-ce-ființează-în-sine-și-pentru-sine. Apare aici o despărțire de ceea ce ne este dat în percepția sensibilă, o retragere din ceea-ce-este-nemijlocit.\*

Ca urmare, după cum povestește ironic Platon, își atrage batjocura unei slujnice din Tracia care-l vede căzând într-un puț în timp ce observă astrele, cu capul lăsat pe spate:

se străduiește să cunoască lucrurile din cer, dar îi scapă cele de dinainte și din dreptul picioarelor.\*\*

Thales, Democrit și Platon sunt, cu siguranță, primii gânditori pe care-i putem defini drept *idealiști*, deoarece pun la baza concepțiilor lor lumea ideilor – de la cuvântul grecesc *idea* care înseamnă „schemă sau figură geometrică“. Cu ei se naște dualismul dintre empirism și idealism care a prilejuit dezbateri aprinse despre natura cunoașterii; întrebare care s-a pus și se pune încă și în legătură cu geometria. E sigur că geometria se sprijină pe experiența omului care se deplasează în spațiu: apare deci ca o știință experimentală, iar rezultatele la care ajunge au nenumărate aplicații tehnologice de natură practică. Pe parcurs însă, se poate întâmpla, ca în cazul lui Thales, după cum spune Hegel, să luăm distanță față de datele percepției sensibile, să ne retragem din fața a ceea ce e imediat; dar poziția adoptată depinde mult de formația culturală și de sensibilitatea fiecăruia.

---

\* Hegel, *Prelegeri de istoria filozofiei*, trad. D.D. Roșca, Ed. Academiei RPR, București, 1963. (N. tr.)

\*\* Platon, *Theaitetos*, trad. Andrei Cornea, Humanitas, București, 2013. (N. tr.)

Abordarea prea idealistă a geometriei a avut încă de la început mulți critici: sofisții și empiriștii, de exemplu, susținuți și de Aristotel, contestau ca fiind lipsite de semnificație principiile primare de felul liniei drepte fără lățime, tangenta într-un singur punct și nu pe o întreagă porțiune. Ba chiar scepticul Sextus Empiricus (sec. II), în cartea *Adversus geometras*, respingea disciplina *in toto*.

În general, tendința idealistă către o puternică abstractizare a conceptelor și metodelor i-a făcut pe gânditorii din comunitatea largită a filozofilor să nu aprecieze și chiar să nu priceapă importanța descoperirilor din geometrie. Ca urmare, încadrarea sa ca sistem filozofic a avut mereu faze contradictorii – le vom trece succint în revistă.

Un susținător convins al geometriei și al modului său de argumentare a fost cu siguranță Platon care a trăit mai ales la Atena, între 427–347 î.Cr.

Se spune că pusese să se scrie deasupra intrării în Academia sa fraza: *αγεωμετητος μηδεις ειστω*, „să nu intre cine nu cunoaște geometria“. Aici se aplică jocul lingvistic, permis de limba greacă, care punând litera alpha ( $\alpha$ ) în fața unui cuvânt îi conferă semnificația de lipsă ori de negație: fără geometrie nu se ajunge la cunoaștere.

Fraza aceasta a avut o mare influență asupra culturii moderne: o regăsim de la Copernic (ca motto la cartea sa *De revolutionibus coelestium*) până la logoul Societății Americane de Matematică (fig. 1.2). Azi e poate încă și mai importantă și, după mine, e cu atât mai demnă de atenție cu cât poate fi pusă alături de titlul faimosului articol al fizicianului Eugene

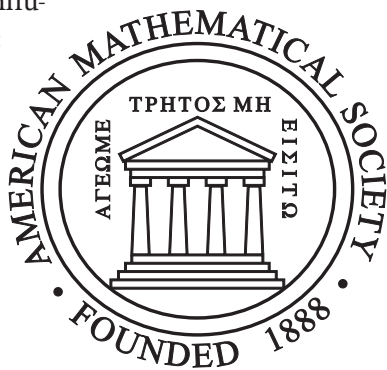


Figura 1.2

P. Wigner „Eficacitatea nerezonabilă a matematicii (și deci a geometriei) în științele naturale“.

Nu există disciplină științifică actuală care să se poată lipsi de geometrie. Rezultatele fizicii universului ca și cele ale fizicii particulelor elementare, de exemplu, sunt formulate în termenii unor modele geometrice complexe. Biologia moleculară și, mai general, știința vieții, interpretează structuri ca ADN-ul și genomul prin formele lor geometrice elicoidale; înțelegerea pozițiilor lor spațiale ne permite să creăm asemenea structuri și să le controlăm variațiile, procese care au numeroase aplicații.

Atunci când afirmă importanța geometriei pentru formarea cuiva, Platon avea, desigur, în vedere și alte activități, nu doar pe cele științifice. În particular, capacitatea inovativă și revoluționară a geometriei în artă, o constantă de-a lungul istoriei. În pictură, perspectiva e una dintre cuceririle Renașterii italiene; azi, alături de alte teorii geometrice, ca topologia, revoluționează arhitectura: să ne gândim numai la arhitecți ca Renzo Piano sau Zaha Hadid care au construit edificii bazându-se pe teoreme de geometrie.

Prin gura lui Socrate, în *Menon*, discutând despre posibilitatea de a-i învăța pe alții virtutea, Platon dă o frumoasă definiție științei și-i explică importanța:

Doar și presupunerile adevărate, câtă vreme rămân pe loc, sunt o treabă bună și aduc numai foloase. De obicei însă, ele nu vor să rămână mult timp pe loc, ci o iau la fugă din sufletul omului, așa încât nu au cine știe ce valoare până nu sunt legate printr-o cântărire a cauzelor. Și tocmai asta este, prietene Menon, reamintirea, în sensul asupra căruia am căzut de acord mai înainte. După ce sunt legate, aceste presupuneri devin cunoștințe raționale și ca atare statornice. Și de aceea este mai de preț știința decât presupunerea corectă: spre deosebire de presupunerea corectă, știința este înlănțuită locului.\*

---

\* *Menon*, trad. Liana Lupaș și Petru Creția, în Platon, *Opere*, vol. II, Ed. Științifică și Enciclopedică, București, 1976. (*N. tr.*)