Cuprins

Introducere

Lucrarea de faţă îşi propune să pună în evidenţă diverse tipuri de mişcări care sunt dinamic compatibile cu diferite reprezentări constitutive ale fluidelor ne-newtoniene.

În primul capitol, intitulat ,, **Legi constitutive** ", sunt precizate:

- clase de ecuaţii constitutive integrale: ecuaţia constitutivă a lui Lodge (vezi Lodge [12]), clasele de ecuaţii Kaye-BKZ (vezi Kaye [10] şi Bernstein, Kearsley şi Zapas [11]), ecuaţia constitutivă a lui Wagner (vezi Wagner [4]). Toate aceste ecuaţii constitutive sunt neliniare în raport cu câmpul de viteză şi gradienţii acestuia.

-legi constitutive de tip diferenţial, cum ar fi fluidele de gradul II şi III (introduse în lucrările lui Dunn şi Fosdick [43], Fosdick şi Rajagopal [63] şi Ţigoiu [62]) sau fluidul Oldroyd-B (introdus de Oldroyd [64] şi discutat şi în lucrările lui Larson [1]-[2]).

Pentru aceste clase constitutive, în capitolele următoare se analizează comportamentul materialelor pe clase de mişcări date.

În capitolul doi, ,,**Extrudarea fluidelor de tip Lodge**" este studiat procesul de extrudare al unui fluid de tip Lodge (vezi Lodge [12]), în ipoteza unui câmp de viteze Binding (vezi Binding [14]).

Fluidul de tip Lodge admite o reprezentare integrală cu trei constante de material, iar câmpul de viteze de tip Binding depinde de două funcţii scalare.

Scopul este determinarea câmpului de viteze, stării de tensiune, vâscozităţii de forfecare, vâscozităţii elongaţionale, debitului, timpului în care o particulă parcurge o linie de curent, elongaţiei (valoarea medie a vitezei de alungire) şi forţei medii pe suprafaţa transversală de curgere. Sunt realizate reprezentări grafice ale mărimilor determinate pentru diferite valori ale constantelor de material.

În capitolul trei, ,,**Mişcări în reometrul ortogonal pentru unele clase de fluide ne-newtoniene**", ne propunem să rezolvăm problemele de curgere pentru diverse tipuri de fluide, folosind dezvoltări asimptotice în raport cu parametrii mici.

Pornind de la lucrările lui Rajagopal [22] şi Rajagopal şi Wineman [24], în care sunt determinate soluţii exacte ale problemei la limită pentru un fluid incompresibil de gradul doi, respectiv pentru fluidul BKZ-cazul vâscoelasticităţii liniare pe istorii, în acest capitol sunt studiate curgerile în reometrul ortogonal pentru:

-fluidul BKZ-cazul potenţialului Currie (expresie dată de Currie în [3]);

-fluidul Wagner (model introdus de Wagner [4]).

Pentru fluidele BKZ (model introdus de Bernstein, Kearsley şi Zapas în [11]) şi Wagner (vezi Wagner [4]) sunt determinate soluţiile asimptotice ale sistemului ecuaţiilor de mişcare şi sunt comparate cu soluţiile numerice ale "sistemului principal" al ecuaţiilor de mişcare.

Este pusă în evidenţă o teoremă de existenţă şi unicitate a soluţiei problemelor bilocale discutate.

Pe această cale, doresc să mulţumesc: Prof. Dr. Sanda Ţigoiu, Conf. Dr. Victor Ţigoiu, Lect. Dr. Romeo Bercia, pentru îndrumările utile şi sprijinul acordat în vederea finalizării acestei lucrări.

Listă de notaţii

$\mathbf{T}$-tensorul de tensiune al lui Cauchy;

$\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{T_E}$-tensiunea efectivă;

G-modul de rigiditate;

$\mathbf{C}_t(\mathbf{x},\tau) = \mathbf{F}_t^T(\mathbf{x},\tau)\mathbf{F}_t(\mathbf{x},\tau)$-tensorul Cauchy - Green la dreapta în descrierea relativă;

$\mathbf{F}_t(\mathbf{x},\tau) = \nabla_{\mathbf{x}}\chi_t(\mathbf{x},\tau)$-gradientul deformaţiei relative;

$\mathbf{L}(\mathbf{x},t) = \nabla\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$-gradientul vitezei;

$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L}+\mathbf{L}^T)$-tensorul viteză de deformaţie;

$\mathbf{A}_k(\mathbf{x},t) = \dfrac{\partial^k}{\partial\tau^k}\mathbf{C}_t(\tau)\,|\tau = t$-tensorii Rivlin - Ericksen;

$\boldsymbol{\delta}, \mathbf{I}$-tensorul identitate de ordinul doi;

W-energie de deformare(energie liberă);

U-potenţialul energiei de deformare;

I_1, I_2, I_3-invarianţii lui $\mathbf{C}_t(\tau)$;

$h(I_1, I_2)$-damping function;

$\lambda, \lambda_1, \lambda_r$-timpi de relaxare;

p-presiunea hidrostatică;

$\dfrac{\delta\boldsymbol{\sigma}}{\delta t} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{L} + \mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma}$-derivata obiectivă a lui $\boldsymbol{\sigma}$;

$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dfrac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{\sigma}$-derivata materială a lui $\boldsymbol{\sigma}$;

$m(t-\tau)$-funcţie de memorie;

$\mathbf{v}$-viteza;

$\mathbf{a}$-acceleraţia;

$\mathbf{b}$-forţele masice;

Ω-viteza de rotaţie;

$\mu, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3$-moduli constitutivi;

η-vâscozitatea;

ρ-densitatea;

Re-numărul lui Reynolds;

$Re_m, \alpha_m, \beta_m, \theta$-parametrii adimensionali;

div-operatorul divergenţă;

tr-operatorul urmă;

∇-operatorul gradient;

Capitolul 1

Legi constitutive

Pentru problemele analizate în această lucrare vom folosi diverse legi constitutive de tip integral şi diferenţial.
Pentru fiecare din problemele descrise se determină câmpul de viteze şi starea de tensiune, pornind de la:

- forma locală pricipiului de bilanţ a impulsului: $\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho\mathbf{b} + div\mathbf{T}$,

unde:
-ρ este densitatea,
-$\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ este derivata materială a vitezei,
- $\mathbf{b}$ sunt forţele masice,
-$\mathbf{T}$ este tensorul tensiunii Cauchy,
-"*div*"este operatorul divergenţă;

- ecuaţia de continuitate a masei: $div\mathbf{v} = 0$,

care corespunde mişcărilor izocore, singurele tipuri de mişcări care se realizează pentru fluide incompresibile.

1.1 Legi constitutive de tip integral

- Vom pune în discuţie următoarele **legi constitutive de tip integral**:

-Ecuaţia constitutivă a lui Lodge (vezi Lodge [12]);
-Clasele de ecuaţii Kaye-BKZ (clase introduse de Kaye [10] şi Bernstein, Kearsley şi Zapas [11]) ;
-Ecuaţia constitutivă a lui Wagner (vezi Wagner [4]).

O serie de rezultate obţinute pentru clase de fluide ne-newtoniene sunt prezentate în lucrarea lui Fetecău [40]. În această lucrare sunt studiate două clase de mişcări ale fluidelor simple de tip integral de ordinul întâi: mişcarea Poisseuile generalizată şi mişcarea elicoidală.

1.1.1 Ecuaţia constitutivă a lui Lodge

Presupunem că ne situăm în cadrul general din Larson [1]-[2]. Vâscoelasticitatea liniară este un model adecvat de studiere a curgerilor în care vitezele de deformare sunt mici. Considerăm ca punct de plecare ecuaţia lui Lodge, în care tensorul tensiunii efective are reprezentarea constitutivă de tip integral

$$\boldsymbol{\sigma} = G \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\lambda} \exp(\frac{\tau - t}{\lambda}) \mathbf{C}_t^{-1}(\tau) d\tau, \tag{1.1.1}$$

unde:

- $\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}$ este tensorul de tensiune al lui Cauchy;
- $\boldsymbol{\sigma}$ este tensiunea efectivă;
- p este presiunea hidrostatică;
- G este modulul de rigiditate (constant);
- λ este timpul de relaxare (constant);
- $\mathbf{C}_t^{-1}(\tau) = \mathbf{F}_t^{-1}(\tau)(\mathbf{F}_t(\tau)^{-1})^T$ este tensorul lui Finger pe mişcarea relativă;
- $\mathbf{F}_t^{-1}(\tau) = \nabla_{\mathbf{x}'}\mathbf{x}$ tensorul gradient de deformaţie în mişcarea relativă ($\mathbf{x}'$-poziţia la momentul τ a particulei care la momentul actual t este reprezentată prin $\mathbf{x}$);

Dacă deformaţia totală este mică, tensorul Finger poate fi exprimat prin relaţia

$$\mathbf{C}_t^{-1}(\tau) = \boldsymbol{\delta} + 2\boldsymbol{\gamma}_t(\tau), \tag{1.1.2}$$

unde

- $\boldsymbol{\delta}$ este tensorul unitate;
- $\boldsymbol{\gamma}$ este o măsură a deformabilităţii în particula materială într-un interval de timp

$$\boldsymbol{\gamma}(t, \tau) \equiv \int_{\tau}^{t} \mathbf{D}(t'')dt'', \tag{1.1.3}$$

unde $\mathbf{D}$ este tensorul viteză de deformaţie.

Cu aceste consideraţii ecuaţia Lodge devine

$$\boldsymbol{\sigma} = 2 \int_{-\infty}^{t} m(t - \tau)\boldsymbol{\gamma}_t(\tau)d\tau, \tag{1.1.4}$$

unde nucleul de relaxare $m(t-\tau)$ este dat prin

$$m(t-\tau) = \frac{G}{\lambda} \exp \frac{\tau - t}{\lambda}.$$

Integrând prin părţi obţinem

$$\sigma = 2\int_{-\infty}^{t} G(t-\tau)\mathbf{D}(\tau)d\tau, \tag{1.1.5}$$

unde

$$G(s) = \int_{s}^{\infty} m(s')ds'. \tag{1.1.6}$$

Prin intermediul nucleului G definim expresiile pentru $G'(\omega)$(modulul de stocare) şi $G''(\omega)$(modulul de pierdere) în deformaţii oscilante de amplitudine mică(”small amplitude oscillatory deformations”):

$$G'(\omega) = \omega \int_{0}^{\infty} G(t) sin\omega t dt, \tag{1.1.7}$$

$$G'(\omega) = \omega \int_{0}^{\infty} G(t) cos\omega t dt. \tag{1.1.8}$$

unde ω reprezintă frecvenţa.

Comportamentul polimerilor topiţi poate fi descris prin ecuaţia constitutivă (1.1.5).

1.1.2 Clasele de ecuaţii Kaye-BKZ

Se introduce energia de deformare W (numită şi energie liberă), ca fiind o funcţie de măsură a deformării elastice, de exemplu o funcţie de $\mathbf{C}^{-1}$

$$W = W(\mathbf{C}^{-1}). \tag{1.1.9}$$

Pentru a respecta principiul obiectivităţii, W depinde de $\mathbf{C}^{-1}$ prin intermediul invarianţilor I_1, I_2, I_3:

$$\begin{aligned} I_1 &= tr(\mathbf{C}^{-1}), \\ I_2 &= \frac{1}{2}((tr\mathbf{C}^{-1})^2 - tr\mathbf{C}^{-2}), \\ I_3 &= det(\mathbf{C}^{-1}). \end{aligned} \tag{1.1.10}$$

De exemplu, în teoria clasică a elasticităţii cauciucului se consideră W dependentă de primul invariant al tensorului de deformare $\mathbf{C}^{-1}$

$$W = \frac{1}{2} G tr \mathbf{C}^{-1}, \tag{1.1.11}$$

unde G este o constantă de material. Pentru materiale incompresibile avem $det(\mathbf{C}^{-1}) = 1$ şi astfel W depinde numai de invarianţii I_1 şi I_2, deci

$$W = W(I_1, I_2).$$

Pentru un corp elastic incompresibil, Larson [1]-[2] consideră următoarea reprezentare pentru $\boldsymbol{\sigma}$

$$\boldsymbol{\sigma} = 2(\frac{\partial W}{\partial I_1}\mathbf{C}^{-1} - \frac{\partial W}{\partial I_2}\mathbf{C}). \tag{1.1.12}$$

Pentru fluide vâscoelastice Larson [1]-[2] presupune că W este o integrală pe istorie dintr-o funcţie care depinde I_1, I_2 şi τ, numită potenţial,

$$W = \int_{-\infty}^{t} u(I_1, I_2, \tau) d\tau. \tag{1.1.13}$$

Tensorul tensiunii admite o reprezentare constitutivă de forma

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\int_{-\infty}^{t} \left[\frac{\partial u}{\partial I_1}\mathbf{C}_t^{-1}(\tau) - \frac{\partial u}{\partial I_2}\mathbf{C}_t(\tau)\right] d\tau. \tag{1.1.14}$$

Un tip de descompunere pentru funcţia potenţial $u(I_1, I_2, s)$ este

$$u(I_1, I_2, s) = m(s) U(I_1, I_2), \tag{1.1.15}$$

unde $m(s)$ se numeşte funcţie de memorie.

Reprezentarea constitutivă de tip integral (1.1.14) împreună cu (1.1.15) capătă forma

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\int_{-\infty}^{t} m(t-\tau)\left[\frac{\partial U}{\partial I_1}\mathbf{C}_t^{-1}(\tau) - \frac{\partial U}{\partial I_2}\mathbf{C}_t(\tau)\right] d\tau, \tag{1.1.16}$$

numită **ecuaţia Kaye-BKZ**.