Cuprins

Piergiorgio Odifreddi

Dumnezeul logicii

Viaţa genială a lui Kurt Gödel, matematicianul filosofiei

Traducere din limba italiană
şi note de Liviu Ornea

POLIROM
2020

Sfârşitul impunătoarei *Principia*

Cea mai importantă noţiune metamatematică care a rezultat definibilă în aritmetică a fost demonstrabilitatea: nu întâmplător, definiţia ei e ultima dintre cele 46 de formule din lista citată. Motivul intuitiv care permitea această definiţie era simplu, după cum i-a explicat Gödel lui Ernst Zermelo într-o scrisoare din 12 octombrie 1931:

> Proprietatea unei formule de a fi demonstrabilă e pur combinatorică şi formală: *nu* depinde de semnificaţia semnelor. Că o formulă *A* e demonstrabilă *într-un anumit sistem formal* înseamnă pur şi simplu că există un şir de formule care:
> - începe cu anumite axiome ale sistemului;
> - se termină cu formula *A*;
> - are proprietatea că fiecare formulă din şir derivă din formulele precedente prin aplicarea unei reguli de inferenţă.
>
> Ca reguli de inferenţă se consideră în esenţă implicaţia şi substituţia, ambele referindu-se doar la simple proprietăţi combinatorii ale formulelor.
>
> Mulţimea numerelor formulelor demonstrabile poate fi deci redusă la simple concepte aritmetice.

Scrisoarea continuă cu o observaţie simplă, dar dezarmantă. Dacă demonstrabilitatea într-un sistem formal pentru aritmetică e definibilă în interiorul sistemului, iar adevărul nu, atunci demonstrabilitatea şi adevărul nu sunt acelaşi lucru. Aşadar, ori există formule demonstrabile care nu sunt adevărate, ori există formule adevărate care nu sunt demonstrabile. În primul caz, sistemul nu e corect, deoarece conţine falsul; în al doilea caz, nu e complet, pentru că există adevăruri pe care nu le poate demonstra. Altfel spus, *orice sistem formal corect pentru aritmetică e incomplet*, dacă permite definirea în interiorul său a demonstrabilităţii.

Gödel a găsit deci teorema de incompletitudine pentru aritmetică în punctul de întâlnire al celor două drumuri pe care le parcursese până atunci, folosind mijloace diferite. Coborând de-a lungul primului drum, care ducea către imposibilitatea definirii adevărului, exploatase posibilitatea *autoreferinței* unui sistem, aceea care-i permite să definească formule ce spun despre ele înseși că au anumite proprietăți definibile în sistem. Urcând pe al doilea drum, care ducea către posibilitatea definirii demonstrabilității, exploatase în schimb posibilitatea *aritmetizării* sistemului, care-i permite să definească anumite noțiuni metamatematice.

Nicăieri însă, în articolele publicate pe atunci de Gödel, nu găsim vreo referire la acest parcurs originar, chiar dacă era vorba despre „calea regală" care-l dusese drept la țintă. A confirmat acest lucru în 1966 când, în introducerea la cartea postumă a lui John von Neumann *Theory of Self-Reproducing Automata* (*Teoria automatelor autoreproducătoare*), a apărut o scrisoare a sa către Arthur Burks, îngrijitorul ediției, în care explica:

> Imposibilitatea definirii adevărului e adevăratul motiv pentru care există propoziții indecidabile în sistemele formale care conțin aritmetica. Eu, însă, n-am formulat asta explicit în articolul din 1931, ci abia în lecțiile mele de la Princeton din 1934. Același rezultat a fost demonstrat de Tarski în lucrarea sa din 1933 despre conceptul de adevăr.

Cum știm, Gödel avea motivele lui precise pentru care evita să vorbească în public despre adevăr, motive care-i justificau și reținerea inițială de a-și anunța noua teoremă de incompletitudine, dar și îndelungata reticență de a dezvălui „adevăratul motiv" ce-l făcuse s-o descopere.

Din punctul său de vedere, de „martor tăcut al adevărului", Gödel știa deja că așezase o piatră de mormânt și pe *Principia Mathematica*, la care s-a referit direct ulterior, începând chiar cu titlul articolului din 1931. Într-adevăr, Russell și Whitehead încercaseră, pe urmele lui Frege, să construiască un sistem formal universal al matematicii. Acum, Gödel descoperise nu doar că ei eșuaseră, dar și că nimeni altul n-ar fi putut reuși pentru că orice sistem formal care conține suficient de multă aritmetică trebuie să fie incomplet.

Chiar dacă, în scrisoarea deja citată către Zermelo, Gödel preciza:

> Că nu se poate cuprinde întreaga matematică într-un singur sistem formal rezulta deja din procedeul diagonal al lui Cantor. S-ar fi putut însă crede că măcar anumite sisteme parțiale ale matematicii ar putea fi formalizate în manieră completă. Teorema mea arată că și asta e imposibil atunci când sistemul conține cel puțin noțiunile de adunare și înmulțire pentru numerele întregi.

Se poate face mai mult

Unul dintre motivele de insatisfacție în privința demonstrației originare a teoremei de incompletitudine era faptul că fusese nevoit să facă uz explicit de adevăr. Dar nu era singurul. Gödel a făcut aluzie la un al doilea motiv de insatisfacție într-o notă adăugată în 1965, atunci când, într-un târziu, și-a publicat lecțiile *Asupra propozițiilor indecidabile în sistemele formale pentru matematică* ținute la Princeton în 1934:

> În acest fel se obține o demonstrație a *existenței* unor propoziții indecidabile în sistem, dar nu un exemplu individual de propoziție indecidabilă.

Pentru a evita eventualele critici ale constructiviștilor, lipsa trebuia remediată producând un exemplu explicit de indecidabilitate, ceea ce nu i-a cerut prea mult efort. Într-adevăr, demonstrația originară deriva incompletitudinea din *diferența* dintre adevăr și demonstrabilitate. Atunci, o demonstrație alternativă ar fi putut presupune prin absurd completitudinea, adică *egalitatea* dintre adevăr și demonstrabilitate, deducând de aici o contradicție.

Acum, dacă adevărul și demonstrabilitatea sunt egale, primul e definibil pentru că a doua e definibilă, deci s-ar putea ajunge la contradicție reproducând paradoxul mincinosului în maniera cunoscută, cu ajutorul unei formule care să afirme despre sine că e falsă. Dar tocmai pentru că s-a presupus că adevărul și demonstrabilitatea sunt egale, acea formulă ar spune despre sine și că e nedemonstrabilă. Înseamnă că s-ar putea lucra direct pe această ultimă formulare, fără a mai face să intervină adevărul.

Odată lămurit asupra unei formule care spune despre sine că nu e demonstrabilă, Gödel și-a dat seama că o poate folosi și într-o demonstrație directă. În primul rând, demonstrabilitatea fiind definibilă, procedeul diagonal ne arată cum să definim formula însăși. Mai mult, cum într-un sistem corect nu se poate demonstra falsul, formula nu e demonstrabilă, altfel ar fi falsă. Dar nefiind demonstrabilă și spunând tocmai că nu e demonstrabilă, rezultă că e adevărată. Așadar, furnizează un exemplu explicit de formulă adevărată și nedemonstrabilă într-un sistem corect.

Rămâne totuși, după cum sublinia Gödel într-o scrisoare din 7 decembrie 1967 către Wang, faptul că, din punct de vedere euristic, exemplul sintactic și finitist de incompletitudine fusese obținut prin considerarea unui concept semantic și „infinitist prin excelență”, anume adevărul.

Variațiuni pe temă dată

Precedenta versiune a teoremei de incompletitudine e redată în secțiunea introductivă a faimosului articol din 1931 cu următoarea avertizare:

> Metoda de demonstrație pe care tocmai am explicat-o poate fi în mod evident aplicată oricărui sistem formal care:
> - are la dispoziție suficiente mijloace de expresie pentru a defini noțiunile ce apar în discuție, în particular noțiunea de „formulă demonstrabilă”;
> - demonstrează doar formule adevărate.

> Scopul dezvoltării în restul articolului a demonstrației în manieră complet precisă e, între altele, de a înlocui a doua cerință cu una pur formală și mult mai slabă.

Într-adevăr, fantoma adevărului dispăruse din definiția formulei cruciale a teoremei, dar bântuia încă prin ipoteza semantică a corectitudinii sistemului. Cel mai bine ar fi fost s-o înlocuiască pe aceasta din urmă cu ipoteza sintactică a consistenței, dar Gödel n-a reușit să o facă întru totul: avea s-o facă în 1936 John Barkley Rosser, unul dintre studenții care urmaseră cursul din 1934 de la Princeton, în articolul „Extensions of Some Theorems of Gödel and Church" („Extinderi ale unor teoreme ale lui Gödel și Church"[1]), la care ne vom referi în cele ce urmează.

Azi nu mai e așa de important de specificat noțiunea intermediară dintre consistență și corectitudine pe care a folosit-o Gödel ca să-și demonstreze teorema. E suficient să știm că era una pur sintactică, așa cum e și consistența, și că, evitând orice referire la noțiunea de adevăr, ferea demonstrația teoremei de incompletitudine de orice posibilă critică în această privință, mai ales din partea formaliștilor. În acest punct, Gödel putea revendica soluția negativă a celei de-a treia probleme din lista lui Hilbert de la Bologna, despre completitudinea analizei.

În 26 august 1930, Gödel s-a întâlnit la Café Reichsrat din Viena cu trei membri ai Cercului. Unul dintre ei era Carnap, al cărui jurnal păstrează următoarea însemnare din acea zi: „Descoperire a lui Gödel, incompletitudine a *Principia Mathematica*, dificultăți pentru consistență". O a doua întâlnire a avut loc pe 29 august, în același loc, și de data asta jurnalul spune: „Mai întâi, Gödel mi-a povestit despre descoperirile lui". Aceste două notații diaristice reprezintă primele mărturii istorice despre teorema de incompletitudine și stabilesc o limită superioară pentru data la care a fost obținută.

1. În *Journal of Symbolic Logic*, v. 1, 1936, pp. 87-91.

De la Königsberg în China

Dincolo de marea plăcere a vienezilor de a frecventa cafenelele, motivul celor două întâlniri ale unor membri ai Cercului, la sfârșit de august, era pregătirea călătoriei la Königsberg pentru a participa la al doilea Congres de Epistemologia Științelor Exacte organizat de Cercurile de la Viena și Berlin, care avea să se desfășoare între 5 și 7 septembrie.

Participanții cei mai cunoscuți erau Carnap, Arend Heyting și von Neumann, care, pe 5 septembrie, au ținut câte o conferință de o oră asupra celor trei tendințe principale din metamatematică, respectiv: logicismul de tip Frege și Russell, intuiționismul de tip Brouwer și formalismul hilbertian. În ultimul moment a fost adăugată o a patra conferință, a lui Waismann, despre filosofia matematicii de tip Wittgenstein.

Pe 6 septembrie, Gödel a ținut deja menționata *Conferință despre completitudinea calculului funcțional*, în care și-a anunțat teorema de completitudine a logicii predicatelor. Textul scris publicat ulterior conține o scurtă referire finală la incompletitudinea aritmeticii, dar, în cele douăzeci (!) de minute care-i fuseseră alocate la congres, Gödel a fost nevoit să limiteze discuția la tema principală.

Anunțarea teoremei de incompletitudine a fost făcută aproape întâmplător, pe 7 septembrie, în timpul unei *Discuții asupra fundamentelor matematicii* prezidate de Hahn – discuția a fost consemnată stenografic. În afară de Carnap, Heyting și von Neumann, fuseseră invitați să participe Gödel și alți membri ai celor două cercuri.

În timpul discuției, Carnap a vorbit despre credința formaliștilor că un sistem consistent ar fi automat corect, altfel spus, că simpla lipsă a contradicțiilor într-un sistem ar asigura adevărul tuturor teoremelor sale. La asta se referea „dificultatea" pe care Carnap o notase deja în jurnal pe 26 august, probabil fără s-o înțeleagă bine, iar Gödel s-a grăbit să declare la modul abstract că s-ar putea ca un