

CUPRINS

<i>Introducere</i>	7
Cursul nr.1 Elemente de logică și teoria mulțimilor.	11
Cursul nr.2 Inducția matematică. Variante ale acesteia. Axiomatica lui Peano.	22
Cursul nr.3 Elemente de numărare. Combinatorică.	36
Cursul nr.4 Relații binare. Relații funcționale. Clase de funcții: injective, surjective, bijective.	50
Cursul nr.5 Mulțimi infinite. Mulțimi numărabile. Mulțimi nenumerabile.	58
Cursul nr.6 Mulțimi de numere: întregi, raționale, reale, algebrice, transcendente.	70
Cursul nr.7 Funcții polinomiale, funcții exponențiale și logaritmice.	81
Cursul nr.8 Ecuații, inecuații și sisteme. Aplicații în rezolvarea problemelor de aritmetică.	90
Cursul nr. 9 Elemente de geometrie plană. Calculul unor arii și volume.	96
Seminarii	
Seminarul nr. 1 Elemente de teoria numerelor. Congruența modulo n	101
Seminarul nr. 2 Numere reale. Calculul unor sume și produse.	110
Seminarul nr. 3 Metode de rezolvare a unor probleme de aritmetică.	118

Seminarul nr. 4	Inducția matematică. Variante ale ei și aplicații...	126
Seminarul nr. 5	Relații binare, Relații funcționale. Clase de funcții: injective, surjective, bijective	129
Seminarul nr. 6	Elemente de teoria mulțimilor. Numere cardinale...	138
Seminarul nr. 7	Probleme de combinatorică.	143
Seminarul nr. 8	Probleme de geometrie.....	155
Seminarul nr. 9	Elemente de probabilități și statistică matematică..	160
	Proba de examen din 25.06.2012; Matematică	167
	Subiecte de examen din 04.02.2013; Didactica activităților matematice	168
	Sugestii bibliografice	169
	Anexa	170

Introducere

Dezvoltarea tehnologiilor și tehnicii, a cunoașterii în general, conduce la necesitatea adaptării învățământului la cerințele actuale prin aplicarea unor noi metode. Factorii implicați în educație recunosc posibilitățile de informare deosebite pe care copiii din generațiile actuale le posedă prin utilizarea internetului, a mijloacelor de informare. Suntem adepții formării noilor cadre din învățământul preuniversitar în spiritul utilizării unor metode flexibile, bine adaptate acestor necesități.

Matematica este regina științelor, iar aritmetica este regina matematicii. Ca metodă deductivă, matematica a fost prima știință care a reprezentat un model pentru celelalte științe.

Trebuie înțeleasă ideea că matematica nu este doar o unealtă supusă tehnicii, aplicațiilor directe, ci este un act de cultură în formarea fiecărui individ. Modul de raționament dezvoltat prin studiul matematicii invadează aproape toate domeniile actuale ale cunoașterii. Elevul nostru de astăzi, reprezintă adultul de mâine, care se va afla în situații total diferite de ceea ce credem noi astăzi că trebuie să știe. De aici rezultă necesitatea formării continue a fiecăruia dintre noi, cât și a spiritului pe care trebuie să îl formăm elevilor noștri.

Astfel, învățământul este supus unor continue modificări, prin încercarea de a adapta programele, metodele și de a forma tinerilor deprinderi de studiu cât mai eficiente. Școala este adaptată copiilor de nivel mediu, solicitând însușiri intelectuale și de caracter ce vizează mai mult latura exterioară a activității și nu pe cea interioară. Aptitudinile necultivate și nedezvoltate la timp se pierd. Aceasta reprezintă o modalitate prin care se explică micșorarea numărului de copii care excelează în clasele mari. Predispozițiile ereditare sunt deschise influențelor modelatoare ale acțiunilor socio-culturale. Omul dobândește atributul de dotat printr-un proces de prelucrare și valorificare a ceea ce îi furnizează educația și cultura mediului din care provine. Adevărata cultură ne-o câștigăm singuri. Școala, chiar și cea superioară, ne dă doar o orientare generală în probleme. Pentru trebuințele noastre practice, cât și pentru satisfacerea propriilor nevoi intelectuale, avem nevoie de cunoștințe de amănunt, pe care numai prin muncă stăruitoare le putem câștiga.

O carte, o idee, un sfat dat la timp, pot valora mai mult decât o activitate didactică proiectată pe mai mulți ani. Plecând de la nivelul de percepere și operare a noțiunilor de către elev, trebuie să se susțină un demers didactic cât mai discret. Este corect să nu transmitem anumite prejudecăți negative referitoare la unele discipline sau a unor capitole din aceeași disciplină, deoarece copilul le va asimila ușor, iar acestea pot stopa dezvoltarea normală, naturală. Dimpotrivă, este de dorit să urmărim ceea ce îl atrage, ceea ce îi face plăcere să studieze, să urmărim și să susținem ceea ce copilul își proiectează să îmbrățișeze ca meserie. Devotamentul

arătat copilului va avea efecte pozitive în timp. Povața izvorăște din înțelepciune, presupune etică și morală. Se dorește ca fiecare generație viitoare să o depășească pe cea prezentă. Oare care părinte și care educator nu-și doresc acest țel ?

Se crează o concepție corectă despre viață, mentalități, se exprimă un ideal. Să ne imaginăm o scară mai mult sau mai puțin ipotetică a cunoașterii, pe care omul, sinteză între lut și spirit, urcă mereu. El este menit să aibe întotdeauna înainte această scară, ce îi pregătește drumul spre înălțimi ale cunoașterii și afirmării sale. Cultura științifică este parte integrantă a culturii. De-a lungul veacurilor, marile valori ale omenirii au fost inițiate în știință. De exemplu, pe Rudolf Steiner, o modestie înțeleaptă l-a făcut să aștepte până când și-a însușit pe deplin cuceririle științei moderne, pentru a se apleca asupra unei științe spirituale.

Pentru a preda noțiuni de matematică copiilor de vârstă preadolescentină, sunt indicate jocurile. Jocul are un rol deosebit în dezvoltarea aptitudinilor copiilor. Printre calitățile esențiale în activitățile pe care le numim jocuri, vom enumera: 1) caracterul agreabil; 2) natura imprevizibilă; 3) aspectul problematic; 4) aspectul strategic.

Punctul 1) este descris de către psihologi, iar aspectele 2), 3), 4) fac obiectul disciplinelor științifice: teoria informației, inteligență artificială și teoria matematică a jocurilor. Prin joc se dezvoltă astfel diferite tipuri de gândire: logică, abstractă, combinatorială, inductivă, analogică, algoritmică, lingvistică etc. Fiind prin excelență o activitate de căutare, jocul modelează gândirea de la cunoscut la necunoscut, de la previzibil la imprevizibil. Astfel, îl asociem actului de creație, sensibilității. În acest sens, celebrul matematician francez Évariste Galois spunea: „În zadar vor matematicienii să ascundă. Ei nu demonstrează, ci combină și compară. Și numai izbîndu-se dintr-o parte în cealaltă, ajung la adevăr“.

O înțelegere temeinică a unui capitol, chiar dacă este bine tratat într-un manual, se face prin studiul acestuia utilizând mai multe surse (alte manuale, tratate, culegeri de probleme, reviste de specialitate, cărți în format electronic). Lectura trebuie făcută cu simț critic, în pofida eventualei celebrități a autorului. Înțelegerea câștigată prin învingerea unei greutăți, ne aduce o adevărată bucurie, ne provoacă să facem conexiuni între fapte care până atunci erau separate în mintea noastră. „Metoda istorică“ – spunea matematicianul român Dimitrie Pompeiu – „e atât de utilă și uneori atât de fecundă. A privi îndărăt pe linia timpului, spre ceea ce a fost și a ne da seama exact de mersul lucrurilor este un izvor de înprospătare și întărire a cunoștințelor“ .

O metodă de atragere a elevilor spre un domeniu îl reprezintă inserarea în lecții a unor date biografice ale oamenilor de cultură. Merită să li se prezinte tinerilor maniera scripitoare în care aceștia au rezolvat problemele timpului lor, cât și modurile în care a decurs dezvoltarea ulterioară, grație descoperirilor în cauză,

până în zilele noastre. Astfel, școala impulsionează și susține utilizarea pozitivă a informațiilor situate pe site-uri. La nivelul clasei pot fi create portofolii ale elevilor, se dezvoltă munca în echipă, prin gruparea pe același subiect a mai multora ce doresc să performeze în aria implicată. Se dezvoltă munca creatoare și se stabilesc noi raporturi atât între elevi cât și între elevi și profesor. În știință există multe probleme deschise și adesea apar altele noi. Este datoria noastră și a generațiilor ce vin de a le soluționa. Pentru a dezvolta elevilor abilități de cercetare, de creativitate în domeniul matematicii se recomandă utilizarea revistelor de specialitate: Gazeta Matematică seriile A, B, cât și Suplimentul acesteia (G.M.), Revista Arhimede, Cardinal, Revista Matematică din Timișoara (R.M.T.) etc. Ținând seama de vechimea lor, amintim că există formatele electronice ale revistelor G.M. (pentru perioada 1895-2011) și respectiv R.M.T. (1921-2011). Rezolvarea de probleme dezvoltă capacități intelectuale care vor fi utilizate în acțiuni viitoare ale adultului în domeniul său de activitate. Înțelegerea unui text prin decodificarea simbolurilor specifice matematicii, căutarea drumului de la ipoteză la concluzie prin utilizarea unui raționament logic corect, reprezintă acțiuni care creează disponibilități intelectuale pentru viitorul adult. Societatea actuală utilizează mijloace electronice, care sunt aplicații directe ale matematicii discrete. Din acest motiv, în ultimii ani, matematica școlară (și nu numai aceasta) a fost invadată de probleme și metode combinatoriale. Ceea ce noi adulții învățăm în clasa a IX-a, a X-a, actualii elevi cunosc și aplică la clase mult mai mici aceste noțiuni uneori pe cazuri particulare. Acesta reprezintă un motiv în plus ca educatorii (cadre didactice și părinți ai elevilor) să studieze continuu. Majoritatea popoarelor utilizează pentru „savant“ un singur cuvânt. Remarcăm faptul că există popoare care îl traduc în două cuvinte: „elev învățat“, explicând că atunci când încetează calitatea de „elev“, atunci dispare calitatea de „învățat“. Iată o superbă explicație a necesității „învățării permanente“.

Vom exemplifica răspunsul dat de Hannes Alfvén (laureat al premiului Nobel pentru fizică în anul 1970) la întrebarea: există un secret al celebrității? „Aș menționa că este vorba de relația dintre individ și obiectul activității sale științifice, pe care trebuie să-l domine prin profunzimea de cunoștințe, prin competență, prin capacitatea de înțelegere suplă și complexă spre a obține maximum pentru oameni, deoarece celebritatea ca act de creație nu poate exista în afara societății umane!“

Un deosebit aspect îl reprezintă evaluarea în triada predare-învățare-evaluare. Au fost create la nivel mondial diferite modalități de evaluare: de tip pereche, alegere duală, alegere multiplă cu un singur răspuns corect, alegere multiplă cu un număr variabil de răspunsuri corecte, probleme cu răspuns deschis.

Tehnica perechilor solicită stabilirea unor corespondențe între noțiunile învățate și proprietăți ale acestora. Această tehnică poate aborda cu succes rezultate ale învățării prin asociere, a unui important volum de rezultate într-un spațiu redus.

Tehnica alegerii duale se caracterizează în mod esențial prin solicitarea elevilor de a asocia unul sau mai multe enunțuri cu una din componentele unor cuplări de alternative duale cum ar fi: adevărat-fals. Avantajul acestei tehnici este acela al abordării într-un interval de timp redus a unui volum de cunoștințe de complexitate medie și redusă.

Tehnica alegerii multiple cu un singur răspuns corect (model dat la evaluările elevilor la sfârșit de ciclu de învățământ sau la admitere la facultăți), cât și tehnica alegerii multiple cu un număr variabil de răspunsuri corecte, solicită distincția dintre răspunsul corect și distractori(alternative incorecte dar plauzibile). Aceste tehnici conferă un înalt nivel de flexibilitate și dispune proiectantului de un bun control asupra rezultatului de învățare abordat de fiecare problemă (item).

Tehnica problemelor cu răspuns deschis prezintă rezolvările clasice, complete.

Se remarcă o participare numeroasă a elevilor din clasele primare și gimnaziale la numeroase concursuri școlare cât și la olimpiadele destinate lor. Pentru a participa cu succes ei trebuie formați prin utilizarea unei bune bibliografii. Remarcăm numeroase apariții editoriale pentru elevi. Mai mult, la nivelul liceal, există cel puțin trei lucrări specializate pentru fiecare capitol din programa școlară. Ne dăm astfel seama de efortul intelectual pe care trebuie să îl facă un elev performant cât și de nivelul de competență al cadrului didactic implicat în pregătirea tinerilor de performanță.

Fiecare student doritor să performeze este invitat să dezvolte aceste note de curs și probleme de seminar prin parcurgerea bibliografiei orientative, prin elaborarea de portofolii în care să pregătească structura lecțiilor viitoare. Să nu uităm că un profesor veritabil trebuie în primul rând să se privească în oglinda propriului spirit, să fie mulțumit de ceea ce se reflectă.

Prezentul curs, aflat la a doua ediție, este alcătuit și pentru a susține pregătirea tinerelor cadre didactice în obținerea titlurilor definitiv, gradul II sau gradul I.

Lector Dr. Costel-Dobre Chiteș, București, 6.12.2015

CURSUL NR.1

Elemente de logică și teoria mulțimilor

Logica matematică [gr.logos-„rațiune“] este o știință care are ca obiect studiul formelor propoziționale și legile de raționare cu expresii propoziționale, precum și modele care permit realizarea acestui studiu. Logica matematică este interesată numai de valoarea logică a propozițiilor adică dacă sunt adevărate sau nu.

Argumentele care validează demonstrațiile convenționale formează logica.

Notă istorică

Primul studiu sistematic al raționamentelor logicii a fost opera filosofului grec Aristotel (384-322 î.Hr.). Deși bazele filosofiei au fost puse de Platon (427-347 î.Hr.), Aristotel este cel care a tras concluziile necesare din filosofia acestuia și a dezvoltat-o.

În tratatul său de logică, Aristotel prezintă o colecție a principalelor raționamente deductive. Cultura aristotelică a fost preluată de arabi, prin traduceri sirieni, de unde a trecut în Evul Mediu Creștin.

Matematicianul german Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) este considerat primul filosof care a intenționat să dezvolte logica simbolistică ca limbaj științific universal. Aceste studii au dat un mare impuls creației în domeniul matematicii. În secolul al XIX-lea, matematicienii englezi George Boole (1815-1864) și Augustus De Morgan (1806-1871) au revoluționat logica aplicând metodele algebrei simbolistice. Contribuții ulterioare au fost date de inginerul și filosoful american Charles Sanders Peirce (1839-1902) care a introdus și conceptul de cuantificator în logica simbolică, Gottlieb Frege (1848-1925), Bertrand Russell (1872-1970), David Hilbert (1862-1943), Paul Bernays (1888-1977).

Conectori logici și table de adevăr

Propozițiile sunt notate prin litere mici: p, q, r, \dots fiind considerate ca fiind fie false fie adevărate.

Valoarea de adevăr a unei propoziții false este 0, iar a unei propoziții adevărate este 1.

Exemple

p : „Matematica este o disciplină științifică“.

q : „ $2 + 5 = 8$ “.

Propozițiile precedente sunt numite primitive, deoarece nu pot fi descompuse în altele mai mici.

Putem crea alte propoziții plecând de la cele existente în două moduri:

1) Transformând o propoziție p în negația sa $\neg p$ (se citește non p).

De exemplu: $\neg p$: „Matematica nu este o disciplină științifică“.

2) Combinând mai multe propoziții prin utilizarea conectorilor logici:

a) conjuncția, notată \wedge , se citește „și“;

b) disjuncția, notată \vee , se citește „sau“;

c) implicația, notată \rightarrow , se citește „implică“. Dacă considerăm implicația $p \rightarrow q$, atunci p este ipoteza, iar q este concluzia. Mai spunem că p este suficient să aibe loc q ;

q este necesar dacă are loc p ; q este o condiție necesară pentru p ; dacă p atunci q ;

d) echivalența, notată \leftrightarrow , se citește „echivalent“. De exemplu $p \leftrightarrow q$ se citește: p dacă și numai dacă q ; p este necesar și suficient pentru q .

Propozițiile compuse sunt definite prin următoarele tabele:

	p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
p	0	0	0	0	1	1
$\neg p$	0	1	0	1	1	0
p	1	0	0	1	0	0
$\neg p$	1	1	1	1	1	1

Reținem că propoziția compusă $p \wedge q$ este adevărată numai când ambele propoziții sunt adevărate. Propoziția compusă $p \vee q$ este falsă numai când ambele propoziții sunt false.

Falsul implică orice.

Vom aminti un raționament al logicianului englez Bertrand Russell (filosof, matematician, critic social și laureat al premiului Nobel pentru literatură, în anul 1950).

Mare i-a fost mirarea unui filosof când a aflat de la logicianul B. Russell că dintr-o afirmație falsă poate fi dedusă oricare alta. El a întrebant:

„– Dumneavoastră considerați că din afirmația falsă $5 = 2 + 2$ rezultă afirmația că sunteți Papa de la Roma?“

– Desigur! a răspuns cu fermitate Russell și a expus demonstrația:

Dacă scădem 2 din fiecare membru, vom obține $3 = 2$ sau prin scădere cu o unitate obținem echivalent $2 = 1$, atunci Papa de la Roma și cu mine suntem una și aceeași persoană.“

Exercițiu rezolvat

Să se determine valorile de adevăr ale propozițiilor:

$$p \rightarrow (p \vee q); \quad p \wedge (\neg p \wedge q).$$

Soluție. Vom completa următorul tabel:

p	q	$p \vee q$	$p \rightarrow (p \vee q)$	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$p \wedge (\neg p \wedge q)$
0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	0
1	0	1	1	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0

Definiție. O propoziție compusă se numește tautologie dacă este adevărată indiferent de valorile de adevăr ale propozițiilor sale componente.

O propoziție compusă se numește contradicție dacă este falsă indiferent de valorile de adevăr ale propozițiilor sale componente.

Din exemplul de mai sus, propoziția $p \rightarrow (p \vee q)$ este o tautologie, iar propoziția $p \wedge (\neg p \wedge q)$ este o contradicție.

În general, o demonstrație este formată dintr-o listă de propoziții date, numite *premise*, și o propoziție care se numește *concluzie*.

Să notăm premisele cu p_1, p_2, \dots, p_n și cu q concluzia. Astfel vom avea:

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q,$$

unde în ipoteză avem conjuncția a n premise. Observăm că dacă cel puțin una dintre premise este falsă, atunci indiferent de valoarea de adevăr a lui q implicația este adevărată. Dacă toate premisele sunt adevărate și q este adevărată, atunci implicația este adevărată.

Exercițiu rezolvat

Dacă propozițiile p, q sunt primitive astfel ca implicația $p \rightarrow q$ să fie falsă, să se determine valoarea de adevăr pentru:

a) $p \wedge q$; b) $\neg p \vee q$; c) $q \rightarrow p$; d) $\neg q \rightarrow \neg p$.

Soluție. Avem p adevărată și q este falsă. Rezultă:

a) 0; b) 0; c) 1; d) 0.

Exercițiu rezolvat

Să se determine valoarea de adevăr ale următoarelor implicații:

a) dacă $4 + 8 = 13$ atunci $6 + 9 = 20$;

b) dacă $7 + 9 = 16$ atunci $6 + 8 = 14$;

c) dacă $4 + 9 = 13$ atunci $5 + 9 = 18$;

d) dacă Thomas Jefferson a fost primul președinte al S.U.A. atunci
 $3 + 8 = 11$.

Soluție. c) Este falsă; a), b), d) sunt adevărate. T. Jefferson a fost al treilea președinte în perioada 1801-1809. Primul președinte a fost George Washinton (1789-1797).

Exercițiu rezolvat

Se consideră tabelul de adevăr următor:

p	q	$p \vee q$	$p \rightarrow (p \vee q)$	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$p \wedge (\neg p \wedge q)$
0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	0
1	0	1	1	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0

O propoziție se numește *tautologie* dacă este adevărată indiferent de valorile de adevăr ale propozițiilor sale componente. Astfel propoziția $p \rightarrow (p \vee q)$ ale cărei valori de adevăr sunt în coloana a IV-a a tabelului este o tautologie.

O propoziție se numește *contradictorie* dacă este falsă indiferent de valorile de adevăr ale propozițiilor sale componente. Astfel propoziția $p \wedge (\neg p \wedge q)$ este contradictorie, așa cum rezultă din coloana a VII-a din tabel.

Exercițiu rezolvat

Se consideră tabelul de adevăr următor:

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \rightarrow q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

Două propoziții s_1, s_2 se numesc *echivalente* și scriem $s_1 \Leftrightarrow s_2$ dacă s_1 este simultan falsă sau simultan adevărată cu s_2 .

Din tabelul precedent, deducem că $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$.

Exercițiu rezolvat

Se consideră tabelul de adevăr următor:

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
0	0	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0

Din acest tabel rezultă că au loc relațiile lui De Morgan:

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q, \quad \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q.$$

Vom nota cu T_0 tautologia și cu F_0 propoziția contradictorie. Vom enumera lista proprietăților algebrei propozițiilor care se demonstrează cu ajutorul tabelelor de adevăr:

- 1) $\neg\neg p \Leftrightarrow p$ (legea dublei negații)
- 2) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ (legile lui De Morgan)
 $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
- 3) $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ (legile comutativității)
 $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
- 4) $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$ (legile asociativității)
 $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
- 5) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (legea de distributivitate a lui \vee față de \wedge)
 $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (legea de distributivitate a lui \wedge față de \vee)
- 6) $p \vee p \Leftrightarrow p$ (legile de idempotență)
 $p \wedge p \Leftrightarrow p$
- 7) $p \vee F_0 \Leftrightarrow p$ (legile elementelor neutre)
 $p \wedge T_0 \Leftrightarrow p$
- 8) $p \vee \neg p \Leftrightarrow T_0$ (legile inversării)
 $p \wedge \neg p \Leftrightarrow F_0$
- 9) $p \vee T_0 \Leftrightarrow T_0$ (legile de dominare)
 $p \wedge F_0 \Leftrightarrow F_0$
- 10) $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ (legile de absorbție)
 $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$