biblioteca de **matematică**

Redactare: Mugur Butuza
Culegere computerizată: Andreea Popescu
Tehnoredactare: Luminiţa Badea
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
IONESCU, SORANA
Construcţiile auxiliare în rezolvarea problemelor de geometrie plană /
Sorana Ionescu. - Ed. a 2-a. - Piteşti : Paralela 45, 2019
Conţine bibliografie
ISBN 978-973-47-2980-7
51

Sorana **IONESCU**

construcțiile auxiliare în rezolvarea problemelor de **geometrie plană**

Ediţia a II-a

Editura Paralela 45

Argument

Aproape toate problemele de geometrie competitivă necesită, într-un fel sau altul, utilizarea unor construcții auxiliare. Totuși, elevilor nu le este ușor să identifice construcția optimă deoarece, la clasă, nu sunt antrenați să rezolve probleme folosind această metodă.

În unele probleme sunt mai multe posibilități de a realiza o construcție auxiliară și, poate, nu ne este clar imediat care este cea mai bună. Adesea nu contează: multe probleme pot fi rezolvate în diferite moduri, utilizând diverse construcții auxiliare. Unele abordări pot fi mai eficiente ca altele. Existența mai multor soluții care conduc la aceeași concluzie este una dintre satisfacțiile rezolvării problemelor de geometrie. Elevii pot învăța la fel de multe din oricare dintre soluțiile diferite propuse pentru aceeași problemă.

Când o problemă cere construcție auxiliară, dificultatea ei crește, provocarea constând în a decide în ce mod să completăm figura dată, astfel încât acest lucru să ne ajute, simplificând demonstrația și nu complicând-o. Cele mai frumoase probleme de geometrie nu necesită acumularea unui bagaj exagerat de cunoștințe teoretice, ci utilizarea rezultatelor fundamentale din matematică, dublate însă de capacitatea rezolvitorului de a completa desenul problemei cu puncte, drepte, segmente, poligoane, cercuri. Acest lucru cere multă creativitate, dar rezultatele sunt pe măsură.

Cartea are un caracter metodic, propunându-și să inițieze cititorul în utilizarea construcțiilor auxiliare. Parcurgând rândurile acestei lucrări, elevii vor descoperi plăcerea de a găsi construcția auxiliară cea mai potrivită pentru rezolvarea problemelor de acest fel. Anumite probleme de geometrie nu se pot rezolva decât prin metoda construcțiilor auxiliare. Noutatea lucrării constă în abordarea temei alese pornind de la o clasificare a problemelor de acest tip în funcție de construcția auxiliară folosită în demonstrație. Cartea de față conține probleme variate atât ca grad de dificultate, cât și din punct de vedere al tipului de construcție auxiliară folosit.

Prima parte conține o privire de ansamblu asupra metodei. Sunt prezentate rezultate cunoscute a căror demonstrație utilizează construcții auxiliare și câteva probleme frumoase însoțite, fiecare, de mai multe soluții. Partea a doua cuprinde probleme propuse, grupate în opt categorii, în funcție de construcția auxiliară utilizată în rezolvarea acestora. Partea a treia conține indicații privind construcția auxiliară aleasă, iar în partea a patra sunt prezentate soluții detaliate ale problemelor propuse.

Această clasificare a construcțiilor auxiliare este orientativă, având unele mici neajunsuri. În primul rând, există probleme ale căror demonstrații conțin construcții încadrate în capitole diferite și care conduc la același desen. De exemplu, construcția simetricului unui punct față de mijlocul unui segment este, din acest punct de vedere, echivalentă cu construcția unui paralelogram. În al doilea rând, există probleme care necesită două sau mai multe construcții auxiliare. Pe acestea le-am încadrat în categoria care conține tipul de construcție cel mai complex dintre cele folosite.

Cu toate acestea, considerăm că lucrarea de față este foarte utilă pentru dezvoltarea abilității elevilor de a rezolva probleme de geometrie folosind construcții auxiliare. Ideea unei construcții optime nu poate veni decât ca rezultat al unei experiențe bogate în rezolvarea unor astfel de probleme.

Autoarea

PARTEA ÎNTÂI
SCURTĂ PREZENTARE GENERALĂ

I. Prezentare generală a metodei

Când o problemă de geometrie cere construcție auxiliară, dificultatea ei crește, provocarea constând în a decide în ce mod să completăm figura dată, astfel încât acest lucru să ne ajute, simplificând demonstrația și nu complicând-o. Folosirea construcției auxiliare indică o înțelegere profundă a geometriei. Desenele sunt elemente pentru cercetare, completarea acestora dovedind dobândirea unor abilități creative foarte importante în rezolvarea problemelor de geometrie.

Prezentăm, in continuare, câteva sfaturi utile în rezolvarea problemelor de geometrie în general și în special în rezolvarea problemelor care necesită construcții auxiliare:

- Când nu găsești răspunsul imediat, încearcă să afli ce poți. Se poate să găsești ceva care să te conducă la concluzie. Mai mult, poți afla ceva mai interesant decât cerința problemei.
- Să rezolvi o problemă în două moduri diferite este o cale foarte bună să verifici corectitudinea soluției.
- Câteodată, utilizarea metodei reducerii la absurd este mult mai ușoară și mai eficientă decât demonstrația directă.
- În probleme mai complicate de geometrie marchează laturile congruente și unghiurile congruente pe măsură ce le descoperi, îndeosebi pe cele care nu sunt evidente.
- Când nu ajungi la rezultat întreabă-te ce informație din ipoteză nu ai folosit.
- Încearcă să rezolvi o problemă mai ușoară, înrudită cu problema dată. Selectează o parte a condițiilor din ipoteză, realizează un desen doar cu aceste date și poate obții ceva folositor.
- Adesea este bine să încerci câteva exemple înainte de a demonstra un rezultat general. Aceste exemple pot fi o bună călăuză în a descoperi răspunsul căutat.
- Uneori, parcurgând întâi drumul înapoi de la concluzie spre ipoteză, vei putea descoperi soluția problemei.
- Dacă nu vezi rezolvarea problemei imediat, nu abandona. Este util să faci câteva observații, scrie alături demonstrațiile acestora și, poate, vei reuși să combini aceste rezultate pentru a completa rezolvarea problemei.

- În problemele de geometrie, explorarea acestora cere să realizezi un desen mare și curat, respectând măsura unghiurilor, lungimile laturilor fiind proporționale cu cele din enunț. Când găsești o nouă informație ar trebui să refaci desenul folosind noile date. Acest fapt te ajută foarte mult în rezolvarea problemei.
- Unind puncte care inițial nu au fost unite poate fi extrem de util. Asta nu înseamnă să unim toate punctele din desen. Caută segmente care pot fi de ajutor în demonstrație, cele care unesc puncte importante sau cele care formează unghiuri, triunghiuri, patrulatere despre care poți afla ceva imediat.
- Dacă ai două dintre liniile importante în triunghi (de același tip), ar trebui să folosești proprietatea punctului de intersecție și să construiești a treia linie de tipul respectiv.
- Când te-ai blocat într-o demonstrație, notează măsura unuia dintre unghiuri cu o variabilă și încearcă să afli alte măsuri de unghiuri în funcție de această variabilă. Formează o ecuație pentru a afla variabila.
- În multe probleme de geometrie există informații ascunse vederii. Prelungind segmente care par să se termine brusc (în special în interiorul unui triunghi sau patrulater) poți obține rezultate deosebite.
- Dreptele paralele sunt utile în problemele care implică unghiuri, deci, uneori, vei adăuga noi drepte paralele în desen.
- Spărgând un unghi, un segment, o suprafață în mai multe părți, de multe ori poți afla informații folositoare demonstrației.
- O construcție auxiliară foarte utilizată este perpendiculara dintr-un punct pe o dreaptă. Scopul tău este să construiești triunghiuri dreptunghice sau dreptunghiuri ale căror proprietăți să le exploatezi în demonstrația ta. De asemenea, poți evidenția distanțele de la un punct al bisectoarei unui unghi la laturile unghiului, folosind faptul că acestea sunt egale.
- Unghiurile cu măsurile de 30°, 60°, 45°, chiar și suplementele lor, sunt adesea bune pentru a construi triunghiuri dreptunghice cunoscute. Poți face acest lucru ducând perpendiculare sau prelungind segmente.
- Dacă, într-o problemă, se dă mijlocul unui segment, este util să evidențiezi mijlocul unui alt segment care are cu segmentul dat un capăt comun, obținând astfel o linie mijlocie într-un triunghi, linie ale cărei proprietăți le vei folosi în rezolvarea problemei.
- Tot în cazul de mai sus, poți construi un segment al cărui mijloc coincide cu mijlocul segmentului dat, obținând astfel un paralelogram de proprietățile căruia vei beneficia în demersul tău pentru obținerea rezultatului.
- Dacă ai utilizat cu succes o anume tactică pentru a obține noi informații, dar nu ai rezolvat încă problema, încearcă să utilizezi aceeași tactică într-o altă situație. Poți obține noi informații utile.

PARTEA A DOUA

PROBLEME PROPUSE

CAPITOLUL I
CONSTRUCŢIA UNUI SEGMENT

I.1. În pătratul $ABCD$ de latură 5 cm, se consideră punctele $E\in(BC)$, $F\in(CD)$, astfel încât $m\widehat{EAF} = 45^0$. Dacă aria ΔCEF este 3cm^2, calculaţi aria ΔAEF.

(O.M. Etapa locală Olt 2013 – cls. VII)

I.2. Se consideră ΔABC cu $AB = AC$ și m$\widehat{BAC} = 90^0$. Fie $D\in (BC)$, astfel încât $AD \perp BC$. Bisectoarea $\widehat{ABC}$ intersectează dreapta AD în I. Demonstraţi că $BA + AI = BC$.

(O.M. Etapa naţională 2013 – cls. VI)

I.3. Fie pătratul $ABCD$ și punctele $E \in (BC)$, $F\in (DC)$. Dacă m$\widehat{BAE} = 15^0$ și m$\widehat{DAF} = 30^0$, determinaţi m$\widehat{AEF}$.

(O.M. Etapa locala Hunedoara 2012 – cls. VII)

I.4. În triunghiul ABC considerăm punctele M, $N\in(AB)$, P, $Q\in(BC)$ și S, $R\in(AC)$, astfel încât $AM= CR$, $AN= CS$, $\widehat{MQB} \equiv \widehat{RQC}$ și $\widehat{NPB} \equiv \widehat{SPC}$. Arătaţi că dacă $MQ+ QR= NP+ PS$, atunci triunghiul ABC este isoscel.

(O.M. Etapa naţională 2014 – cls. VI)

I.5. Se consideră rombul $ABCD$. Punctul I este centrul cercului înscris în ΔABC. Dacă $AB + BI = AC$, arătaţi că patrulaterul ABCD este pătrat.

(Concursul „José Marti" 2012 – cls. VII)

I.6. Se consideră ΔABC și ΔADC, astfel încât B și D sunt de o parte și de alta a dreptei AC, $\widehat{ABC} \equiv \widehat{ADC}$ și $AB+ AD= BC+ CD$. Arătaţi că $\Delta ABC \equiv \Delta CDA$.

(O.M. Etapa judeţeană Hunedoara 2011 – cls. VI)

I.7. Se consideră un ΔABC echilateral și punctele D și E, astfel încât $C\in (AD)$, $C \in (BE)$, $BD= DE$. Demonstraţi că $AD= CE$.

(Concursul RMCS 2011 – cls. VII)

I.8. Se consideră ΔABC cu m$\widehat{BAC} = 80°$ și $AB = 3 \cdot AC$. Demonstraţi că m$\widehat{ACB}>75°$.

(O.M. Etapa judeţeană Giurgiu 2010 – cls.VI)

I.9. Se consideră pătratul $ABCD$ și $E\in(CD)$. Bisectoarele unghiurilor $\widehat{BAE}$ și $\widehat{DAE}$ intersectează laturile (BC) și (CD) în punctele M și respectiv N. Arătaţi că $MN \perp AE$.

(O.M. Etapa locală Mehedinţi 2010 – cls. VII)

I.10. Fie ΔABC isoscel, $AB = AC$ și punctul P situat în exteriorul triunghiului, dar în interiorul $\widehat{BAC}$. Dacă $\widehat{APB} \equiv \widehat{APC}$ și $\widehat{ABP}$, $\widehat{ACP}$ sunt obtuze, demonstraţi că $BP= CP$.

(O.M. Etapa locală Brăila 2009 – cls. VII)

I.11. Pătratul $ABCD$ are latura de 1 cm. Fie $P\in(AB)$, $Q\in(AD)$, astfel încât perimetrul ΔAPQ să fie 2 cm. Demonstrați că $m\widehat{PCQ} = 45°$.

(O.M. Etapa județeană Dâmbovița 2009 – cls. VI)

I.12. Fie ΔABC echilateral și punctul D situat pe latura (AC). Bisectoarea $\widehat{ABD}$ intersectează paralela prin A la dreapta BC în punctul E. Arătați că $AE + DC = BD$.

(Concursul „Alexandru Myller" 2009 – cls. VII)

I.13. Se consideră pătratul $ABCD$ și punctul E pe latura AB. Diagonala AC taie segmentul DE în punctul P. Perpendiculara dusă din punctul P pe DE intersectează latura BC în punctul F. Demonstrați că $EF = AE + FC$.

(O.M. Etapa județeană 2008 – cls. VII)

I.14. Pe laturile pătratului $ABCD$ se iau punctele $E\in(BC)$ și $F\in(DC)$, astfel încât $BE + DF = AE$. Arătați că $\widehat{DAF} \equiv \widehat{FAE}$.

(Concursul „Academician Radu Miron" 2008 – cls. VII)

I.15. În ΔABC, $AB = 6$ cm, $BC = 4$ cm și $m\widehat{ABC} = 60°$. Arătați că $AM = AC$, dacă $[AM]$ este mediana ΔABC.

(O.M. Etapa locală Neamț 2007 – cls. VI)

I.16. Triunghiurile ΔABC și ΔMNP au perimetrele egale. Dacă $\hat{A} \equiv \hat{M}$ și $AB = MN$, demonstrați că $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$.

(O.M. Etapa locală Timiș 2007 – cls. VI)

I.17. Fie ΔABC, astfel încât $BC = AB + AD$, unde D este piciorul bisectoarei $\widehat{ABC}$. Arătați că $m\widehat{BAC} = 2\cdot m\widehat{ACB}$.

(Concursul „Nicolae Coculescu" 2007 – cls. VII)

I.18. Fie patrulaterul $ABCD$ în care $m\hat{A} = m\hat{B} = 60°$, iar $AB = AD + BC$. Dacă O este punctul de intersecție a diagonalelor, aflați $m\widehat{BOC}$.

(Concursul „Ion Ciolac" 2006 – cls. VI)

I.19. Fie ΔABC oarecare și $[CM$ bisectoarea $\widehat{ACD}$, unde D este un punct al semidreptei opuse semidreptei $[CB$. Arătați că $MA + MB > AC + BC$.

(O.M. Etapa locală Tulcea 2006 – cls. VII)

I.20. Fie ΔABC echilateral cu $AB = a$. Pe dreapta AC se ia punctul D, astfel încât $CD = b$ și $C\in(AD)$. Pe dreapta AB se ia punctul E, astfel încât $BE = a + b$ și $B\in(AE)$. Arătați că ΔECD este isoscel.

(O.M. Etapa județeană Arad 2005 – cls. VI)

I.21. Fie pătratul $ABCD$. Se consideră $M\in(BC)$, $N\in(CD)$, astfel încât $[MA$ este bisectoarea $\widehat{MNB}$. Arătați că $[NA$ este bisectoarea $\widehat{DNM}$ și că $m\widehat{NAM} = 45°$.

(O.M. Etapa județeană Galați 2005 – cls. VI)

I.22. Fie dreptunghiul $ABCD$ și punctele $E\in(BC)$, $F\in(DC)$, astfel încât $\widehat{DAF} \equiv \widehat{FAE}$. Demonstrați că, dacă $DF + BE = AE$, atunci $ABCD$ pătrat.

(O.M. Etapa locală Satu Mare 2005 – cls. VII)

I.23. Fie $ABCD$ un paralelogram în care $m\widehat{BCD} \geq 90°$ și $BC \geq CD$. Arătați că, dacă pentru orice punct $M\in(DA)$ și $N\in(CB)$, astfel încât $CM \perp DN$ rezultă $CM = DN$, atunci patrulaterul $ABCD$ este pătrat.

(*Problemă avută în atenția comisiei 2004 – cls. VII*)

CUPRINS

ARGUMENT *5*

PARTEA ÎNTÂI – SCURTĂ PREZENTARE GENERALĂ
I. Prezentare generală a metodei 7
II. Rezultate importante din geometrie ale căror demonstrații se bazează pe construcții auxiliare 9
III. Câteva probleme frumoase de geometrie care se rezolvă prin mai multe metode, în funcție de construcția auxiliară aleasă 18

PARTEA A DOUA – PROBLEME PROPUSE
CAPITOLUL I – Construcția unui segment 34
CAPITOLUL II – Construcția unui unghi 38
CAPITOLUL III – Construcția unei paralele la o dreaptă dată 40
CAPITOLUL IV – Construcția unei perpendiculare pe o dreaptă dată 43
CAPITOLUL V – Evidențierea mijlocului unui segment 49
CAPITOLUL VI – Construcția simetricului unui punct față de o dreaptă sau față de un punct 56
CAPITOLUL VII – Evidențierea punctului de intersecție a două drepte 59
CAPITOLUL VIII – Construcția unui poligon sau a unui cerc 64

PARTEA A TREIA – INDICAȚII
CAPITOLUL I – Construcția unui segment 67
CAPITOLUL II – Construcția unui unghi 68
CAPITOLUL III – Construcția unei paralele la o dreaptă dată 69
CAPITOLUL IV – Construcția unei perpendiculare pe o dreaptă dată 70
CAPITOLUL V – Evidențierea mijlocului unui segment 72
CAPITOLUL VI – Construcția simetricului unui punct față de o dreaptă sau față de un punct 74
CAPITOLUL VII – Evidențierea punctului de intersecție a două drepte 75
CAPITOLUL VIII – Construcția unui poligon sau a unui cerc 76

PARTEA A PATRA – SOLUȚII
CAPITOLUL I – Construcția unui segment 78
CAPITOLUL II – Construcția unui unghi 106
CAPITOLUL III – Construcția unei paralele la o dreaptă dată 118
CAPITOLUL IV – Construcția unei perpendiculare pe o dreaptă dată 137
CAPITOLUL V – Evidențierea mijlocului unui segment 171
CAPITOLUL VI – Construcția simetricului unui punct față de o dreaptă sau față de un punct 210
CAPITOLUL VII – Evidențierea punctului de intersecție a două drepte 232
CAPITOLUL VIII – Construcția unui poligon sau a unui cerc 256

BIBLIOGRAFIE 273