CONCURSUL DE TITULARIZARE
+
EXAMENUL DE DEFINITIVAT

MATEMATICĂ

Editura Paralela 45

Lucrarea este elaborată în conformitate cu programele în vigoare pentru concursul de titularizare și pentru examenul de definitivare în învățământ, disciplina Matematică.

Redactare: Iuliana Ene, Roxana Pietreanu, Andreea Roșca
Tehnoredactare: Adriana Vlădescu
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
Concursul de titularizare și examenul de definitivat - Matematică : aspecte științifice și metodologice : 35 de modele de teste cu rezolvări, precizări metodice și observații metodologice / prof. univ. dr. emerit Dorin Andrica (coord.), prof. dr. Paul-Mihai Șușoi, prof. grad I Nicolae Stăniloiu, prof. grad I Camelia Pîrvu. - Pitești : Paralela 45, 2022
Conține bibliografie
ISBN 978-973-47-3792-5

I. Andrica, Dorin
II. Șușoi, Paul Mihai
III. Stăniloiu, Nicolae
IV. Pîrvu, Camelia

51

COMENZI – CARTEA PRIN POȘTĂ

EDITURA PARALELA 45
Bulevardul Republicii, Nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești,
jud. Argeș, cod 110177
Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918
Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492
E-mail: comenzi@edituraparalela45.ro

www.edituraparalela45.ro

Tiparul executat la tipografia *Editurii Paralela 45*
E-mail: tipografie@edituraparalela45.ro

Prof. univ. dr. emerit **Dorin Andrica** (coordonator)
Prof. dr. **Paul-Mihai Șușoi**
Prof. grad I **Nicolae Stăniloiu**
Prof. grad I **Camelia Pîrvu**

CONCURSUL DE TITULARIZARE + EXAMENUL DE DEFINITIVAT

MATEMATICĂ

Aspecte științifice și metodologice
35 de modele de teste cu rezolvări, precizări metodice și observații metodologice

Editura Paralela 45

CUVÂNT-ÎNAINTE

Lucrarea de față se adresează profesorilor care doresc să participe la concursul național de titularizare sau la examenul național de definitivare în învățământ, la disciplina Matematică.

Materialul este organizat în două părți. Prima parte este dedicată concursului național de titularizare în învățământ, care cuprinde:

- **Programa** în vigoare pentru *concursul național de ocupare a posturilor didactice/catedrelor vacante/rezervate în învățământul preuniversitar la disciplina Matematică* și reprezintă fundamentul pe care se construiește programul de pregătire;
- **Considerații privind elaborarea itemilor de evaluare (clasificare, caracteristici, cerințe)** – capitol care trece în revistă acest subiect important atât prin prezentarea aspectelor teoretice, cât și prin ilustrarea acestora prin exemple și aplicații concrete;
- **25 de variante/modele de teste** pentru concursul de titularizare, însoțite de **rezolvări complete**, **comentarii** și **observații metodice și metodologice**. Problemele selectate acoperă subiectele importante de Algebră, Geometrie și Analiză matematică din programa prezentată în primul capitol. Variantele propuse pot constitui un antrenament extrem de util în procesul de pregătire pentru acest concurs;
- ultimul capitol, **Corelația dintre itemii de evaluare și competențele specifice (exemple)**, reflectă în mare măsură experiența autorilor în abordarea subiectului de metodică.

Partea a doua este dedicată examenului național de definitivare în învățământ și cuprinde:

- **Programa** pentru examenul național de definitivare în învățământ;
- **10 modele de teste**, însoțite de **rezolvări**, completate cu **precizări și observații metodice și metodologice privind rolul exemplelor și contraexemplelor în studiul temei abordate**.

Bibliografia utilizată și atașată completează referințele conținute în bibliografiile orientative din programele celor două examene.

Considerăm că lucrarea de față constituie un instrument util în pregătirea acestor examene deosebit de importante pentru cariera unui profesor de matematică. Ea acoperă în mare măsură matematica de bază din programele în vigoare, atât prin modelele de subiecte, cât și prin aspectele metodice aferente acestora.

Prof. univ. dr. emerit Dorin Andrica

Dorin Andrica este profesor universitar doctor emerit la Facultatea de Matematică și Informatică de la Universitatea Babeș-Bolyai din Cluj-Napoca. A publicat numeroase cărți, monografii, volume ale unor conferințe, peste 170 de articole științifice și a participat la numeroase conferințe și simpozioane la nivel național și internațional. Este citat de către autori români sau străini în numeroase lucrări științifice, monografii sau teze de doctorat. Este membru în comitetele editoriale ale mai multor reviste naționale și internaționale de specialitate. A publicat 14 cărți la edituri internaționale de prestigiu, în limbile engleză, arabă, portugheză, japoneză, coreeană și este autorul a numeroase probleme originale propuse în diferite reviste din țară și din străinătate. Între preocupările sale, matematica didactică și matematica pentru concursuri și olimpiade sunt pe un loc special. Ocupă locul 85 în topul colaboratorilor *Gazetei Matematice* de la înființare până în prezent (peste 120 de ani de apariție neîntreruptă), luând în considerare numărul problemelor și articolelor publicate în această revistă. Prezența sa permanentă în comisiile centrale ale olimpiadelor naționale de matematică constituie un reper pentru comunitatea profesorilor de matematică din învățământul preuniversitar.

Paul-Mihai Șușoi este profesor gradul I la Colegiul Național „C.D. Loga" din Caransebeș. Este doctor în științe matematice. A publicat numeroase lucrări metodico-științifice și este autor (coautor) de culegeri de probleme pentru pregătirea elevilor la examenele naționale. A participat la conferințe și simpozioane naționale și internaționale, a publicat în reviste de specialitate articole științifice și metodice. A fost inspector de specialitate (disciplina Matematică), inspector școlar general la I.Ș.J. Caraș-Severin. A fost directorul Centrului Județean de Excelență Caraș-Severin pentru pregătirea elevilor capabili de performanță, iar în prezent este profesor metodist I.Ș.J. Caraș-Severin.

Nicolae Stăniloiu este profesor gradul I la Școala Gimnazială Nr. 1 Bocșa. Colaborator la *Gazeta Matematică – seria B* și la alte reviste, a publicat numeroase articole și note matematice cu precădere în *Revista de matematică a elevilor și profesorilor* din Caraș-Severin. Este coautor al unei culegeri de teste de matematică pentru examenul de Evaluare Națională. A participat la conferințe și simpozioane naționale și internaționale. Este inspector de specialitate în cadrul I.Ș.J. Caraș-Severin și activează ca profesor la Centrul Județean de Excelență Caraș-Severin.

Camelia Pîrvu este profesor la Școala Gimnazială „Romul Ladea" din Oravița. Având 25 de ani de experiență la catedră și gradul I, este profesor metodist al I.Ș.J. Caraș-Severin. Este propunător de probleme la *Gazeta Matematică – seria B* și a participat la numeroase concursuri județene și interjudețene. De asemenea, a luat parte la numeroase conferințe și simpozioane naționale și a activat în Centrul Județean de Excelență Caraș-Severin.

Concursul de titularizare

CAPITOLUL III

MODELE DE TESTE PENTRU CONCURSUL DE TITULARIZARE

TESTUL 1

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + x + 1}$.

5p a) Determinați Im f.

5p b) Determinați $x \in \mathbb{R}$ pentru care funcția își atinge minimul.

5p c) Dacă $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$, arătați că $\sum_{k=1}^{n} f(x_k) + 3n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

2. Se consideră triunghiul ABC cu laturile de lungimi a, b, c. Notăm cu O centrul cercului circumscris, cu G centrul de greutate, cu H ortocentrul și cu I centrul cercului înscris în triunghiul ABC.

5p a) Arătați că $\overrightarrow{OG} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$.

5p b) Arătați că $\overrightarrow{OH} = 3 \cdot \overrightarrow{OG}$.

5p c) Arătați că $OI = \dfrac{a \cdot \overrightarrow{OA} + b \cdot \overrightarrow{OB} + c \cdot \overrightarrow{OC}}{a + b + c}$ și $9 \cdot OG^2 = 9 \cdot R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, unde $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$.

5p a) Verificați că $A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I_2 = O_2$ (relația Hamilton–Cayley).

5p b) Arătați că dacă ecuația $x^2 - (a + d)x + ad - bc = 0$ are o rădăcină reală egală cu $\sqrt{3}$, atunci $a + d = 0$ și $ad - bc = -3$.

5p c) Arătați că dacă $\det(X^2 - 3I_2) = 0$, unde $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$, atunci $X^2 = 3I_2$.

2. Fie $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

5p a) Reprezentați grafic funcția f (fără a utiliza f'').

5p b) Folosind monotonia lui f, decideți care dintre numerele $a = 3^{\sqrt{5}}$ și $b = 5^{\sqrt{3}}$ este mai mare.

5p c) Calculați integrala lui f pe intervalul $[1, e^2]$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

Următoarea secvență face parte din programa școlară de matematică pentru clasa a IX-a (3 ore).

COMPETENȚE SPECIFICE	CONȚINUTURI
1. **Recunoașterea** funcției de gradul I descrisă în moduri diferite 2. **Utilizarea** unor metode algebrice sau grafice pentru rezolvarea ecuațiilor, inecuațiilor, sistemelor de ecuații 3. **Descrierea** unor proprietăți desprinse din reprezentarea grafică a funcției de gradul I sau din rezolvarea ecuațiilor, inecuațiilor, sistemelor de ecuații 4. **Exprimarea** în limbaj matematic a unor situații concrete ce se pot descrie prin funcții de gradul I, ecuații, inecuații sau sisteme de ecuații 5. **Interpretarea** graficului funcției de gradul I utilizând proprietățile algebrice ale funcției 6. **Rezolvarea** cu ajutorul funcțiilor a unei situații problemă și interpretarea rezultatului	**Funcția de gradul I** • Definiție; reprezentarea grafică a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax+b$, unde $a, b\in\mathbb{R}$, intersecția graficului cu axele de coordonate, ecuația $f(x)=0$ • Interpretarea grafică a proprietăților algebrice ale funcției: monotonie, semnul funcției • Inecuații de forma $ax+b\le 0$ ($\ge, <, >$), $a, b\in\mathbb{R}$, studiate pe $\mathbb{R}$ • Poziția relativă a două drepte; sisteme de tipul $\begin{cases}ax+by=c\\mx+ny=p\end{cases}$, a, b, c, m, n, p numere reale

(Programa școlară pentru disciplina Matematică, OMECI nr. 5099/09.09.2009)

Folosind informațiile din secvența de mai sus, în vederea evaluării formării/dezvoltării competențelor specifice precizate, elaborați o probă de evaluare la finalul unității de învățare „Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax+b$, $a, b\in\mathbb{R}$; monotonie; semn”, care să cuprindă 5 itemi: *un item cu alegere duală*, *un item cu alegere multiplă*, *un item de tip întrebare structurată*, *un item de tip pereche* și *un item cu răspuns scurt/de completare*.

Notă: Pentru fiecare dintre itemii elaborați se punctează menționarea competenței/competențelor specifice evaluate, respectarea formatului itemilor, elaborarea detaliată și corectitudinea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) și corectitudinea științifică a informației de specialitate.

REZOLVĂRI, PRECIZĂRI METODICE ȘI OBSERVAȚII METODOLOGICE

TESTUL 1

SUBIECTUL I

1. a) $f(x)=y \Leftrightarrow \dfrac{x^2+x-2}{x^2+x+1}=y \Rightarrow x^2(1-y)+(1-y)x-2-y=0$. $x\in\mathbb{R}\Rightarrow \Delta\ge 0 \Leftrightarrow -3(y^2+2y-3)\ge 0 \Rightarrow y\in[-3,1]\Rightarrow$
$\Rightarrow \operatorname{Im} f=[-3,1]$.

b) $\min f(x)=-3 \Rightarrow \dfrac{x^2+x-2}{x^2+x+1}=-3 \Leftrightarrow (2x+1)^2=0 \Rightarrow x=-\dfrac{1}{2}$.

c) Din $f(x)\ge -3 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\ge \sum_{k=1}^{n}(-3) \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\ge -3n,\ n\in\mathbb{N}^*$, de unde inegalitatea cerută.

2. a) Se știe că dacă M este un punct oarecare în plan atunci: $\overrightarrow{MG}=\dfrac{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}}{3}$. Luăm $\{M\}=\{O\}$ și rezultă cerința.

b) Cum O, G și H sunt coliniare (teorema lui Euler) și $3\cdot\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OH}$ rezultă că $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

c) Fie AD bisectoare; atunci: $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{c}{b}$ și deci: $\overrightarrow{OD}=\dfrac{\overrightarrow{OB}+\frac{c}{b}\overrightarrow{OC}}{1+\frac{c}{b}}=\dfrac{b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}}{b+c}$. Cum BI este bisectoare în $\Delta ABD \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{AI}{ID}=\dfrac{AB}{BD}=\dfrac{c}{\frac{ac}{b+c}}=\dfrac{b+c}{a}$ și atunci: $\overrightarrow{OI}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\frac{b+c}{a}\overrightarrow{OD}}{1+\frac{b+c}{a}}=\dfrac{a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}}{a+b+c}$. Ridicăm la pătrat relația de la punctul a) și va rezulta: $9OG^2=OA^2+OB^2+OC^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=3R^2+OA^2+OB^2-AB^2+OA^2+$ $+OC^2-AC^2+OB^2+OC^2-BC^2=9R^2-(a^2+b^2+c^2)$.

SUBIECTUL al II-lea

1. a) Se verifică prin calcul direct.

b) Dacă $\sqrt{3}$ este rădăcină $\Rightarrow 3-\sqrt{3}(a+d)+ad-bc=0$ care ne conduce la $(3+ad-bc)+\sqrt{3}(a+d)=0$, $(\forall)$ $a, b, c, d\in\mathbb{Q}\Rightarrow a+d=0$ și $ad-bc=-3$.

c) Din ipoteză: $\det(X^2-3I_2)=0 \Rightarrow \det\left[\left(X-\sqrt{3}I_2\right)\right]\cdot\det\left[\left(X+\sqrt{3}I_2\right)\right]=0$.

- Dacă $\det\left(X-\sqrt{3}I_2\right)=0$ obținem, considerând $X=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ și $a+d=0$, $ad-bc=-3$, că $X^2=3I_2$, iar dacă $\det\left(X+\sqrt{3}I_2\right)=0$ suntem conduși la același rezultat.

2. a) Graficul lui f intersectează axa Ox în $A(1, 0)$ și nu intersectează axa Oy.

- Din $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-\infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$ rezultă că $x=0$ este asimptotă verticală, iar $y=0$ este asimptotă orizontală la ∞.
- Funcția este derivabilă pe $(0,+\infty)$ și $f'(x)=\dfrac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$, $f'(x)=0\Rightarrow x=e^2$.
- Tabelul de variație a funcției f este:

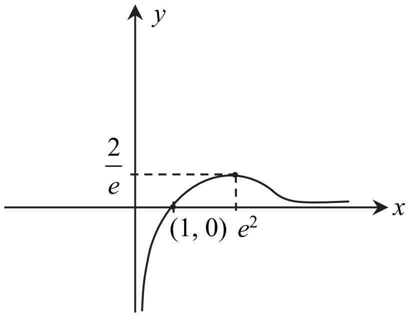
x	0		e		e^2		e^3		∞
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$			$\frac{2}{e}$	$\searrow$			0

Observație: Pentru semnul derivatei am folosit o consecință a Teoremei lui Darboux:

$f'(e) = \dfrac{2-\ln e}{2e\sqrt{e}} = \dfrac{1}{2e\sqrt{e}} > 0$ și conform Teoremei lui Darboux funcția f păstrează semn constant pe $(0, e^2) \Rightarrow f'(x) > 0$ pe $(0, e^2)$.

$f'(e^3) = \dfrac{2-\ln e^3}{2e^3\sqrt{e^3}} = -\dfrac{1}{2e^3\sqrt{e^3}} < 0 \Rightarrow f'(x) < 0\ (\forall)\ x \in (e^2, \infty)$.

Trasarea graficului:



b) Această inegalitate rezultă din faptul că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $(0, e^2)$; deci, dacă $x_1 = 3 < 5 = x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow \dfrac{\ln 3}{\sqrt{3}} < \dfrac{\ln 5}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow 3^{\sqrt{5}} < 5^{\sqrt{3}}$;

c) Integrând prin părți, obținem: $I = \displaystyle\int_1^{e^2} f(x)dx = 2\left(\sqrt{x}\ln x\Big|_1^{e^2} - 2\int_1^{e^2}\frac{dx}{2\sqrt{x}}\right) = 2\left(2e - 2\sqrt{x}\Big|_1^{e^2}\right) = 4.$

SUBIECTUL al III-lea

Exemplele propuse sunt orientative și se consideră răspuns corect orice item din tema cerută, care corespunde definiției itemului cerut.

TEMA: Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}$; monotonie; semn.

1. Item cu alegere duală

Dacă afirmația următoare este adevărată încercuiți litera A, în caz contrar încercuiți litera F.

„Punctele de intersecție a graficului funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$, cu axele de coordonate sunt:

$G_f \cap Ox = \left\{M\left(-\dfrac{b}{a}, 0\right)\right\}$ și $G_f \cap Oy = \{N(0, a)\}$”. **A** **F**

2. Item cu alegere multiplă

Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (m^2 - 4)x + 1$, este crescătoare dacă:

a) $m \in (-2, 2)$; b) $m \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$; c) $m \in [-2, 2]$; d) $m \in (-\infty, -2] \cup (2, \infty)$.

3. Item de tip întrebare structurată

Se consideră funcția $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 2x - 1$.

a) Calculați suma: $f(1) + f(2) + ... + f(2022)$.
b) Arătați că mulțimea $\mathbb{Z} - \{f(x) \mid x \in \mathbb{Z}\}$ este infinită.
c) Verificați că dacă $x \neq y$, atunci $f(x) \neq f(y)$.
d) Studiați semnul expresiei: $E(x) = \dfrac{f(x)}{x-2}, x \in \mathbb{Z} \setminus \{2\}$.
e) Aflați valoarea lui $a \in \mathbb{Z}$, astfel încât pe submulțimea $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ valoarea minimă a expresiei $f(x) - a$ să fie 4.

4. Item de tip pereche

Stabiliți corespondența corectă între cele două coloane:

1) $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x + 1$;	a) $f(x) > 2$, $(\forall)\ x \in (0, \infty)$;
2) $f: [-2, 1) \to \mathbb{R}, f(x) = -2x + 1$;	b) $-1 < f(x) \le 5$, $(\forall)\ x \in [-2, 1)$;
3) $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x + 2$.	c) $f(x) < 1$, $(\forall)\ x \in (0, \infty)$;
	d) $f(x) > 1$, $(\forall)\ x \in (0, \infty)$.

5. Item cu răspuns scurt/de completare

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$ dacă ....

BAREMUL ITEMILOR DE EVALUARE

Punctaj	Item	Subitem	Detalii	Competențe specifice evaluate
6p	1		F; $G_f \cap Oy = N(0, b)$.	C1, C3
6p	2		b) $m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$.	C1, C3, C4
6p	3	a)	2022^2	C1, C2, C3, C4
		b)	$A = \{f(x) \mid x \in \mathbb{Z}\}$ – mulțimea numerelor întregi impare; $\mathbb{Z} \setminus A$ – mulțimea numerelor întregi pare este infinită.	
		c)	$x \ne y$, $x, y \in \mathbb{Z}$, $2x \ne 2y \Rightarrow 2x - 1 \ne 2y - 1 \Rightarrow f(x) \ne f(y)$.	
		d)	$E(x) = \dfrac{2x-1}{x-2}$; $E(x) > 0$ pentru $x \in \{..., -1, 0\} \cup \{3, 4, ...\}$; $E(x) < 0$ pentru $x \in \{1\}$.	
		e)	$a = -9$.	
6p	4		1) $\to$ d) 2) $\to$ b) 3) $\to$ a)	C3, C4, C5
6p	5		$a < 0$.	C1, C6
• Se acordă 6 puncte pentru fiecare item, iar nota finală este media aritmetică a acestora.				

CÂTEVA PRECIZĂRI METODICE LA TEMA PROPUSĂ

- Pentru funcția de gradul I se recomandă a se face distincție între ea și funcția afină: condiția $a \ne 0$ este esențială din punct de vedere geometric.
- Atunci când stabilim valoarea maximă sau minimă a funcției f de gradul I pe un interval $I \subset \mathbb{R}$ putem trata această problemă folosindu-ne de monotonia funcției, calculând valorile acesteia în capetele intervalului sau utilizând reprezentarea grafică, precum și folosind calculul în inegalități.
- În ceea ce privește rezolvarea sistemelor de două ecuații cu două necunoscute, este important ca după rezolvarea acestora să se dea și o interpretare geometrică a soluției obținute (poziția relativă a două drepte).
- Determinarea imaginii funcției de gradul I se evidențiază prin exemple de reprezentări grafice care implică o înțelegere mai bună a semnului și a monotoniei funcției de gradul I.
- Rezolvarea unor exerciții de forma:
  - ecuații și inecuații cu modul;
  - ecuații și inecuații ce conțin partea întreagă;
  - situații problemă cu interpretarea rezultatului;
  - inecuații rezolvate prin utilizarea tabelelor de semn;
  - consolidează cunoștințele obținute, dezvoltând competențe specifice urmărite în tema propusă.

Examenul de definitivat

CAPITOLUL II

MODELE DE TESTE PENTRU EXAMENUL DE DEFINITIVAT

TESTUL 1

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de patru ore.

SUBIECTUL I **(60 de puncte)**

1. Se consideră inecuația $4^x - m \cdot 2^x - m + 3 \le 0,\ m \in \mathbb{R}$.

7p a) Determinați valorile parametrului real m pentru care mulțimea soluțiilor inecuației este nevidă.

8p b) Când această mulțime este infinită?

2. Printr-un punct variabil D situat pe latura (BC) a triunghiului ABC se duce o paralelă la mediana AM, M fiind mijlocul laturii (BC). Această paralelă intersectează dreptele AB și AC în punctele E, respectiv F. Arătați că:

7p a) $\dfrac{AF}{AC} = \dfrac{AE}{AB}$;

8p b) $DE + DF =$ constant.

3. Fie matricea $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ de forma $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ notăm $B_n = A^n + A^{n+1} + A^{n+2}$.

7p a) Aflați A^n pentru $n \in \mathbb{N}^*$ și determinați valorile lui a pentru care toate matricile B_n, $n \in \mathbb{N}$ sunt inversabile.

8p b) Aflați valorile lui a pentru care $\sum_{k=1}^{n} \det(B_k) = 0$.

4. Fie $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

7p a) Reprezentați graficul lui f (fără a utiliza f'') și decideți care dintre numerele $a = 3^{\sqrt{5}}$ și $b = 5^{\sqrt{3}}$ este mai mare.

8p b) Calculați integrala lui f pe intervalul $[1, e^2]$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

Următoarea secvență face parte din programa școlară de matematică pentru clasa a X-a (4 ore).

COMPETENȚE SPECIFICE	CONȚINUTURI
1. Trasarea prin puncte a graficelor unor funcții. **2. Prelucrarea** informațiilor ilustrate prin graficul unei funcții în scopul deducerii unor proprietăți ale acesteia (monotonie, semn, bijectivitate, inversabilitate, continuitate, convexitate). **3. Utilizarea** de proprietăți ale funcțiilor în trasarea graficelor și rezolvarea de ecuații.	**FUNCȚII ȘI ECUAȚII** • Funcția putere cu exponent natural $f : \mathbb{R} \to D$, $f(x) = x^n$, $n \ge 2$. • Funcția radical $f : \mathbb{R} \to D$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \ge 2$, unde $D = [0, \infty)$ pentru n par și $D = \mathbb{R}$ pentru n impar.

4. Exprimarea în limbaj matematic a unor situații concrete și reprezentarea prin grafice a unor funcții care descriu situații practice. **5. Interpretarea**, pe baza lecturii grafice, a proprietăților algebrice ale funcțiilor. **6. Utilizarea** echivalenței dintre bijectivitate și inversabilitate în trasarea unor grafice și în rezolvarea unor ecuații algebrice și trigonometrice.	• Funcția exponențială $f : \mathbb{R} \to (0; \infty)$, $f(x) = a^x$, $a \in (0; \infty)$, $a \neq 1$ și funcția logaritmică $f : \mathbb{R} \to (0; \infty)$, $f(x) = \log_a x$, $a \in (0; \infty)$, $a \neq 1$, creștere exponențială, creștere logaritmică. • Funcții trigonometrice directe și inverse. • Injectivitate, surjectivitate, bijectivitate; funcții inversabile: definiție, proprietăți grafice, condiția necesară și suficientă ca o funcție să fie inversabilă. • Rezolvări de ecuații folosind proprietățile funcțiilor: 1. Ecuații iraționale ce conțin radicali de ordin 2 sau 3; 2. Ecuații exponențiale, ecuații logaritmice; 3. Ecuații trigonometrice: $\sin(x) = a$, $\cos(x) = a$, $a \in [-1; 1]$, $\mathrm{tg}(x) = a$, $\mathrm{ctg}(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$, $\sin f(x) = \sin g(x)$, $\cos f(x) = \cos g(x)$, $\mathrm{tg}\, f(x) = \mathrm{tg}\, g(x)$, $\mathrm{ctg}\, f(x) = \mathrm{ctg}\, g(x)$, $a\sin(x) + b\cos(x) = c$, unde a, b, c nu sunt simultan nule. ***Notă:*** *Pentru toate tipurile de funcții se vor studia: intersecția cu axele de coordonate, ecuația $f(x) = 0$, reprezentarea grafică prin puncte, simetrie, lectura grafică a proprietăților algebrice ale funcțiilor: monotonie, bijectivitate, inversabilitate, semn, concavitate/convexitate.*

(Programa școlară pentru disciplina Matematică, OMEC nr. 4598/31.08.2004)

Pentru o evaluare la finalul unității de învățare „Funcții și ecuații”, tema „Funcții injective, surjective, bijective; funcții inversabile” (clasa a X-a, 4 ore), a trei dintre competențele specifice precizate în secvența de mai sus, elaborați trei itemi: *un item cu alegere duală*, *un item cu alegere multiplă* și *un item de tip rezolvare de probleme*.

În elaborarea itemilor se vor avea în vedere următoarele aspecte:

– formatul fiecărui item elaborat în vederea evaluării competențelor specifice alese;
– elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) pentru fiecare dintre itemii elaborați;
– corectitudinea științifică a informației de specialitate.

Observație: Pentru fiecare item se acordă **10 puncte**.

CUPRINS