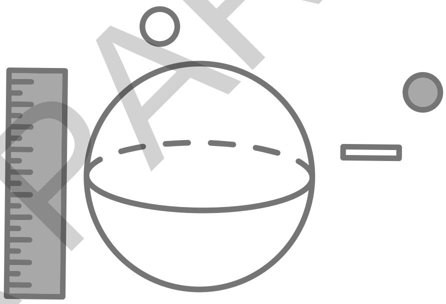

EDITURA PARALELA 45

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unităţile de învăţământ preuniversitar prin O.M.E.C. nr. 3022/08.01.2018.
Lucrarea este elaborată conform programei şcolare în vigoare pentru bacalaureat.

Redactare: Amalia Mărăşescu, Bianca Vişan
Tehnoredactare: Mioara Benza
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Editura Paralela 45

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
Bacalaureat 2021 : matematică - M_şt-nat, M_tehnologic : teme recapitulative - 40 de teste, după modelul M.E.C. - (10 teste fără soluţii) / Mihai Monea, Steluţa Monea, Ioan Şerdean, Adrian Zanoschi. – Piteşti : Paralela 45, 2020
Conţine bibliografie
ISBN 978-973-47-3279-1
I. Monea, Mihai
II. Monea, Steluţa
III. Zanoschi, Adrian
IV. Şerdean, Ioan
51

Copyright © Editura Paralela 45, 2020
Prezenta lucrare foloseşte denumiri ce constituie mărci înregistrate,
iar conţinutul este protejat de legislaţia privind dreptul de proprietate intelectuală.
www.edituraparalela45.ro

EDITURA PARALELA 45

Mihai Monea
Steluța Monea
Ioan Șerdean
Adrian Zanoschi

Bacalaureat 2021

Matematică

M_șt-nat
M_tehnologic

Teme recapitulative
40 de teste, după modelul M.E.C.
(10 teste fără soluții)

Editura Paralela 45

EDITURA PARALELA 45

Cuvânt-înainte

Examenul de Bacalaureat reprezintă pentru fiecare tânăr o placă turnantă în devenirea lui intelectuală şi personală, având menirea de a certifica pregătirea ştiinţifică şi competenţele dobândite în liceu, dar şi de a deschide un orizont profesional sau academic adecvat fiecăruia. În consecinţă, performanţa la acest examen, şi îndeosebi la disciplina matematică, presupune un efort de pregătire constant, atât pentru parcurgerea conţinuturilor, cât şi pentru fixare, sistematizare, recapitulare.

Cartea se adresează celor care pregătesc bacalaureatul la matematică, de tip *M_şt-nat* şi *M_tehnologic*. Lucrarea de faţă îşi propune să fie un ghid eficient, cu o strategie completă, care să răspundă tuturor exigenţelor disciplinei şi ale probelor de examen.

Trebuie menţionat că această carte este adaptată la forma de organizare a probei de matematică din cadrul examenului menţionat. Elevii profilului ştiinţe ale naturii şi cei ai profilului tehnologic au o programă de examen asemănătoare pentru clasele a XI-a – a XII-a, dar cu diferenţe importante de conţinut pentru clasele a IX-a – a X-a. De aceea, am evidenţiat problemele şi testele specifice doar elevilor de la profilul ştiinţe ale naturii. Astfel, acestea sunt marcate cu semnul „∗”.

Cartea are un pronunţat caracter metodic, fiecare paragraf având trei componente: una de iniţiere, una de consolidare şi una de evaluare. Primele patru capitole sunt rezervate antrenamentului specific pentru examen. Problemele sunt grupate pe teme, urmărind acoperirea completă a programei. Acolo unde o anumită temă nu era destul de bine reprezentată în variantele examenelor din anii precedenţi, au fost adăugate probleme clasice, pentru o mai bună aprofundare a subiectului. Aşadar, un elev îşi poate alege singur un capitol pe care vrea să îl repete şi găseşte în carte un număr suficient de exerciţii cu ajutorul cărora să-şi atingă scopul. Problemele din partea de iniţiere sunt însoţite doar de răspunsuri. Problemele din partea de consolidare sunt însoţite de indicaţii şi răspunsuri, dar şi de soluţii detaliate acolo unde acest lucru se impune. Problemele din partea de evaluare nu au răspunsuri.

Capitolul al cincilea este rezervat testelor. Acestea au o structură specifică examenului de Bacalaureat. Testele sunt dispuse pe două categorii. Prima categorie este formată dintr-un set de 30 de teste propuse, după modelul subiectelor date la examenul de bacalaureat din ultimii ani şi însoţite de rezolvări complete. Testele din a doua categorie sunt pentru autotestare şi nu sunt însoţite de rezolvări.

Lucrarea poate fi folosită şi pentru învăţarea curentă, deoarece permite elevilor să se antreneze în condiţii reale, de bacalaureat. Ea se poate dovedi un instrument util profesorilor şi elevilor în vederea recapitulării materiei la finalul unui capitol sau la sfârşitul anului şcolar.

Autorii

EDITURA PARALELA 45

Teme recapitulative

Clasa a IX-a

1. Mulțimi și elemente de logică matematică

1.1. Noțiuni teoretice

1.1.1. Elemente de logică matematică

Definiție: Se numeşte **propoziţie** un enunţ despre care ştim care este valoarea sa de adevăr.

Variabile	Operație	Notație	Citire	Valoare de adevăr
p	Negaţia	$\neg p$	non p	Opusă propoziţiei p.
p, q	Conjuncţia	$p \wedge q$	p şi q	Este adevărată când propoziţiile p şi q sunt adevărate.
p, q	Disjuncţia	$p \vee q$	p sau q	Este adevărată când cel puţin una dintre propoziţii este adevărată.
p, q	Implicaţia	$p \to q$	p implică q	Este falsă când p este adevărată şi q falsă.
p, q	Echivalenţa	$p \leftrightarrow q$	p echivalent cu q	Este adevărată când ambele au aceeaşi valoare de adevăr.

Definiție: Se numeşte **predicat** un enunţ care depinde de una sau mai multe variabile şi care se transformă în propoziţie prin valori date variabilelor.

Variabile	Operație	Notație	Citire	Observații
$p(x)$	Propoziţia universală	$\forall x,\ p(x)$	Pentru orice x are loc $p(x)$.	Demonstrarea valorii de adevăr se face prin calcule cu caracter general şi nu prin exemplu. Un exemplu poate fi suficient pentru a demonstra că această propoziţie este falsă.

EDITURA PARALELA 45

$p(x)$	Propoziţia existenţială	$\exists x,\ p(x)$	Există x astfel încât are loc $p(x)$.	Demonstrarea valorii de adevăr se realizează prin determinarea unui exemplu. Acesta poate fi chiar ghicit, dar trebuie verificat că este convenabil.

1.1.2. Tipuri speciale de raționament

Metoda reducerii la absurd: Pentru a demonstra o implicaţie de tipul $p \to q$, putem presupune concluzia p ca fiind falsă şi apoi împreună cu ipoteza construim un raţionament care conduce la contradicţie.

Metoda inducţiei matematice: Se aplică pentru propoziţii universale de forma $\forall n \geq n_0,\ p(n)$. Se verifică valoarea de adevăr a propoziţiei obţinute în cazul $n = n_0$, se presupune ca fiind adevărată propoziţia obţinută în cazul $n = k$ şi se demonstrează valoarea de adevăr a propoziţiei obţinute pentru $n = k + 1$.

1.1.3. Mulțimi și cardinale

Relație sau operație	**Notație**	**Definiție**
Incluziunea	$A \subset B$	$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$
Egalitatea	$A = B$	$A = B \Leftrightarrow A \subset B$ şi $B \subset A$
Intersecţia	$A \cap B$	$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
Reuniunea	$A \cup B$	$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
Diferenţa	$A \setminus B$	$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
Produsul cartezian	$A \times B$	$A \times B = \{(a,\ b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$

Teoremă: Orice mulţime A cu n elemente, unde $n \in \mathbb{N}$, admite 2^n submulţimi.

Definiţie: Pentru o mulţime finită A numim **cardinalul** său şi notăm Card (A) numărul său de elemente.

Proprietăţi: Sunt adevărate următoarele proprietăţi:

P1. Card $(A) = 0$ dacă şi numai dacă $A = \varnothing$;

P2. Dacă $A \subset B$, atunci Card $(B - A)$ = Card (B) – Card (A);

P3. Card $(A \cup B)$ = Card (A) + Card (B) – Card $(A \cap B)$;

P4. Card $(A \times B)$ = Card $(A) \cdot$ Card (B).

1.1.4. Mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$

Definiţie: Numim **modulul** unui număr real x şi notăm $|x|$ distanţa de la originea axelor la poziţia numărului pe axă.

Proprietăţile modulului:

P1. $|x| \geq 0,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$; **P2.** $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; **P3.** $|x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y$;

EDITURA PARALELA 45

P4. $|x| < c,\ c > 0 \Leftrightarrow x \in (-c;\ c)$; **P5.** $|x| > c,\ c > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;\ -c) \cup (c;\ \infty)$;

P6. $|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$ şi $|E(x)| = \begin{cases} E(x), & \text{dacă } E(x) \geq 0 \\ -E(x), & \text{dacă } E(x) < 0 \end{cases}$, pentru orice expresie $E(x),\ x \in \mathbb{R}$;

P7. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|,\ \forall\ x, y \in \mathbb{R}$; **P8.** $|x^n| = |x|^n,\ \forall\ x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z}$;

P9. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|},\ \forall\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}^*$; **P10.** $\big||x| - |y|\big| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|,\ \forall\ x,\ y \in \mathbb{R}$.

Definiție: Numim **parte întreagă** a numărului real x şi notăm $[x]$ cel mai mare număr întreg, mai mic sau egal cu x.

Proprietățile părții întregi: Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, au loc proprietăţile:

P1. $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$; **P2.** $[x] = k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in [k,\ k+1)$;

P3. $[m + x] = m + [x], \forall\ m \in \mathbb{Z}$; **P4.** $x - 1 < [x] \leq x < [x] + 1$.

Definiție: Numim **parte fracționară** a numărului real x şi notăm $\{x\}$ diferenţa dintre număr şi partea sa întreagă.

Proprietățile părții fracționare: Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, au loc proprietăţile:

P1. $\{x\} = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$; **P2.** $\{x\} \in [0,1)$; **P3.** $\{m + x\} = \{x\}, \forall\ m \in \mathbb{Z}$.

1.2. Probleme de inițiere

I1. Determinaţi numărul de submulţimi ale mulţimii $A = \{a, b, c, d\}$.

I2. Determinaţi numărul de submulţimi nevide ale mulţimii $A = \{a, b, c, d, e\}$.

I3. Reuniunea a două mulţimi cu câte 20 de elemente fiecare are 30 de elemente. Determinaţi numărul de elemente comune ale celor două mulţimi.

I4. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiei: $p : \left(\sqrt{3}+1\right)^2 + \left(\sqrt{3}-1\right)^2 \in \mathbb{N}$.

I5. Fie propoziţiile $p : 2 + 2 = 5$ şi $q : 1 + 2 + 3 + \ldots + 100 = 5050$. Precizaţi valoarea de adevăr a propoziţiei $p \vee q$.

I6. Determinaţi numerele reale a, b dacă avem egalitatea de intervale: $[a - b;\ a + b] = [1;\ 7]$.

I7. Fie $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Determinaţi numărul de elemente ale mulţimii: $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x = (n - 1) \cdot (n - 2)(n - 3) + 4,\ n \in A\}$.

I8. Determinaţi intersecţia mulţimilor $A = (1,\ 5)$ şi $B = [3,\ 11]$.

I9. Arătaţi că numărul $a = 2 \cdot [0,(3) + 0,1(6)]$ este natural.

I10. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $|x - 2| = 5$.

EDITURA PARALELA 45

Clasa a XII-a

1. Legi de compoziție

1.1. Noțiuni teoretice

1.1.1. Legi de compoziție

Fie G o mulţime nevidă şi o lege „$*$”. Legea „$*$”:

● este **lege de compoziție** pe G dacă $x*y\in G$ pentru orice $x,y\in G$ (se mai spune că mulţimea G este **parte stabilă** în raport cu legea „$*$”);

● este **comutativă** dacă $x*y=y*x$ pentru orice $x,y\in G$;

● este **asociativă** dacă $x*(y*z)=(x*y)*z$ pentru orice $x,\ y,\ z\in G$;

● admite **element neutru** dacă există un element $u\in G$, astfel încât $x*u=u*x=x$ pentru orice $x\in G$;

● este **simetrizabilă** dacă pentru orice $x\in G$ există un element $x'\in G$, astfel încât $x*x'=x'*x=u$.

Observație: Elementul x' se numeşte **simetricul** lui x în raport cu legea de compoziţie „$*$”.

Dacă G este finit, atunci putem scrie $G=\{a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n\}$. Toate rezultatele posibile pot fi trecute sub forma următorului tabel:

$*$	a_1	a_2	$\dots$	a_n
a_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}
a_2	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}
$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
a_n	a_{n1}	a_{n2}	$\dots$	a_{nn}

unde $a_{ij}=a_i*a_j$. Se obţine **tabla operației**. Proprietăţile legii se pot deduce apoi din această tablă.

1.1.2. Mulțimea claselor de resturi

Se consideră mulţimea numerelor întregi $\mathbb{Z}$ şi $n\in\mathbb{N}^*$ fixat. Pentru orice $r\in\{0,\ 1,\ 2,\ ...,\ n-1\}$, definim mulţimea:

$$\hat{r}=\{z\in\mathbb{Z}\mid \text{restul împărţirii lui } z \text{ la } n \text{ este egal cu } r\}.$$

EDITURA PARALELA 45

Mulţimea $\mathbb{Z}_n=\{\hat{0},\ \hat{1}, \hat{2}, ...,\ \widehat{n-1}\}$ se numeşte mulţimea **claselor de resturi modulo *n***.

Definim operaţiile:

- $\hat{x}+\hat{y}=\hat{z}$, unde z este restul împărţirii numărului $x+y$ la n;
- $\hat{x}\cdot\hat{y}=\hat{t}$, unde t este restul împărţirii numărului xy la n.

Proprietăți:

- adunarea din $\mathbb{Z}_n$ este lege de compoziţie asociativă şi comutativă;
- adunarea admite element neutru elementul $\hat{0}$;
- orice element $\hat{x}\in\mathbb{Z}_n$ este **simetrizabil**, simetricul său fiind elementul $\widehat{n-x}$, care se mai notează $-\hat{x}$;
- înmulţirea din $\mathbb{Z}_n$ este lege de compoziţie comutativă, asociativă şi distributivă în raport cu adunarea;
- înmulţirea admite element neutru elementul $\hat{1}$;
- evident, $\hat{0}\cdot\hat{x}=\hat{0}$ pentru orice $\hat{x}\in\mathbb{Z}_n$;
- dacă n este număr prim, atunci din $\hat{x}\hat{y}=\hat{0}$ obţinem $\hat{x}=\hat{0}$ sau $\hat{y}=\hat{0}$; dacă n nu este prim, nu este adevărat întotdeauna (de exemplu, în $\mathbb{Z}_6$ avem $\hat{3}\cdot\hat{4}=\hat{0}$);
- un element $\hat{x}$ este **inversabil** dacă există $\hat{y}$ astfel încât $\hat{x}\hat{y}=\hat{1}$; atunci $\hat{y}$ este inversul lui $\hat{x}$ şi se notează $\hat{x}^{-1}$;
- un element $\hat{x}$ este **inversabil** dacă şi numai dacă numerele x şi n admit divizor comun doar pe 1.

1.2. Probleme de inițiere

I1. Pe $\mathbb{R}$ definim legea „$\circ$” prin $x\circ y=x+y-3$. Calculaţi $4\circ 9$.

I2. Pe $\mathbb{R}$ definim legea „$\circ$” prin $x\circ y=x+y-3$. Demonstraţi că această lege este comutativă.

I3. Pe $\mathbb{R}$ definim legea „$\circ$” prin $x\circ y=x+y-3$. Demonstraţi că această lege este asociativă.

I4. Pe $\mathbb{R}$ definim legea „$\circ$” prin $x\circ y=x+y-3$. Demonstraţi că 3 este elementul neutru al acestei legi.

I5. Pe $\mathbb{R}$ definim legea „$\circ$” prin $x\circ y=x+y-3$. Ştiind că legea admite pe 3 ca element neutru, determinaţi simetricul elementului $x=7$ în raport cu această lege.

I6. Pe $\mathbb{R}$ definim legea „$\circ$” prin $x\circ y=x+y-3$. Determinaţi valoarea numărului real x, pentru care $x\circ x\circ x=21$.

EDITURA PARALELA 45

I7. În $\mathbb{Z}_6$, calculați $\hat{2}+\hat{5}$.

I8. În $\mathbb{Z}_6$, calculați $\hat{2}\cdot\hat{5}$.

I9. Considerăm mulțimea $C=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| a\in\mathbb{R}\right\}$. Demonstrați că, oricare ar fi $X,\ Y\in C,$ avem $X+Y\in C.$

I10. Considerăm mulțimea $C=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| a\in\mathbb{R}\right\}$. Demonstrați că, oricare ar fi $X,\ Y\in C,$ avem $X\cdot Y\in C.$

1.3. Probleme de consolidare

C1. Se consideră operația „$\perp$” definită prin $x\perp y=x^{y}+y^{x}$, pentru orice $x, y\in$ $\in(0,\infty)$. Calculați $2\perp 3$.

C2. Pe $\mathbb{R}$ definim operația „$*$” prin $x*y=xy-4x-4y+20$, pentru orice $x, y\in\mathbb{R}$. Determinați $t\in\mathbb{R}$, știind că $t*t=4$.

C3. Pe $\mathbb{R}$ definim operația „$*$” prin relația $x*y=xy-2x-2y+6$, pentru orice $x, y\in\mathbb{R}$. Demonstrați că $z*3=3*z=z$ pentru orice $z\in\mathbb{R}$.

C4. Se consideră mulțimea $A=\{2k\mid k\in\mathbb{Z}\}$. Demonstrați că, oricare ar fi $x, y\in A$, avem $x+y\in A$.

C5. Pe mulțimea $G=(-4,\infty)$ definim operația „$\circ$” prin $x\circ y=xy+4x+4y+12$, pentru orice $x, y\in G$. Demonstrați că, oricare ar fi $x, y\in G$, avem $x\circ y\in G$.

C6. Considerăm operația „$\bullet$” definită prin $x\bullet y=x+y-6$, pentru orice $x, y\in\mathbb{R}$. Demonstrați că $x\bullet(y\bullet z)=(x\bullet y)\bullet z$, pentru orice $x, y, z\in\mathbb{R}$.

C7. Demonstrați că operația „$*$”, definită prin $x*y=xy+x+y$, pentru orice $x, y\in$ $\in\mathbb{R}$, este asociativă.

C8. Se consideră mulțimea $M=\{2k+1\mid k\in\mathbb{Z}\}$. Demonstrați că mulțimea M este parte stabilă în raport cu înmulțirea numerelor întregi.

C9. Determinați elementul neutru al legii „$\perp$” definită prin $x\perp y=\sqrt{x^2+y^2}$, pentru orice $x, y\in[0,\infty)$.

C10. Se consideră operația „$\perp$” definită prin $x\perp y=\dfrac{x+y}{2}$, pentru orice $x, y\in\mathbb{R}$. Demonstrați că această operație este comutativă, dar nu este asociativă.

EDITURA PARALELA 45

Teste pentru Bacalaureat, după modelul M.E.N.

1. Modele de teste rezolvate pentru examenul de Bacalaureat

Testul 1

Subiectul I

1. Demonstraţi că numărul $a = \lg 30 + \lg 2 - \lg 6$ este natural.

2. Demonstraţi că ecuaţia $(a^2 + 1)x^2 - 2x + 1 = 0$ nu admite rădăcini reale, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}^*$.

3. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$.

Calculaţi $f\left(-\frac{1}{2}\right) f(-1) f(0) f(1) f\left(\frac{1}{2}\right)$.

4. Calculaţi probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulţimea $\left\{C_4^3, C_5^2, C_4^2\right\}$, acesta să fie divizibil cu 3.

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, 4)$, $B(6, 8)$ şi $C(8, 2)$. Calculaţi distanţa de la C la mijlocul segmentului AB.

6. Calculaţi $(\cos 120° + \cos 60°)(\sin 135° - \sin 45°)$.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x + 2y - az = 3 \\ 2x - y - z = 1 \\ -x + 3y + z = 2 \end{cases}$, unde a este un parametru real.

Notăm cu A matricea sistemului.

EDITURA PARALELA 45

a) Demonstraţi că tripletul (–1, 2, –5) este soluţie a sistemului în cazul $a = 0$.
b) Determinaţi determinantul matricei A.
c) Dacă $a \neq 0$, demonstraţi că soluţiile sistemului nu depind de a.

2. Se consideră mulţimea $H = \{\hat{0}, \hat{2}, \hat{4}, \hat{6}\} \subset \mathbb{Z}_8$.

a) Demonstraţi că mulţimea H este parte stabilă în raport cu adunarea din $\mathbb{Z}_8$.

b) Determinaţi $x \in H$ cu proprietatea că $x^3 = \hat{0}$.

c) Calculaţi $\hat{0}^{2012} + \hat{2}^{2012} + \hat{4}^{2012} + \hat{6}^{2012}$.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x - x$.

a) Calculaţi $f'(x)$.
b) Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.
c) Demonstraţi că $\sqrt{e} \geq \frac{3}{2}$.

2. Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

a) Calculaţi $\int_1^4 \frac{f(x)}{\ln x} dx$.

b) Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g : [1, e] \to \mathbb{R}, g(x) = f(x)$.

c) Demonstraţi că $\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)dx \leq 0$.

Testul 2

Subiectul I

1. Calculaţi $C_6^3 - A_4^2 + 3$.

2. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\log_3 (x^2 - 16) = 2$.

3. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ pentru care $a_1 = 2$ şi $a_5 = 18$. Calculaţi a_{2012}.

4. După două scumpiri succesive cu 10% şi apoi cu 20%, preţul final al unui produs este 1 320 de lei. Determinaţi preţul iniţial.

EDITURA PARALELA 45

5. În sistemul de coordonate carteziene xOy se consideră punctele $A(1, 1)$, $B(3, 2)$ şi $C(m, 3)$. Determinaţi valoarea numărului real m, ştiind că punctele A, B şi C sunt coliniare.

6. Demonstraţi că $\sin^2 20° + \sin^2 70° = 1$.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ şi $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Demonstraţi că $A^2 - 6A - I_2 = O_2$.

b) Demonstraţi că matricea A este inversabilă şi determinaţi inversa sa.

c) Demonstraţi că $A^{2012} - 6A^{2011} - A^{2010} - A^4 + 6A^3 + A^2 = O_2$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 3X^2 + 3X - a \in \mathbb{R}[X]$. Notăm cu x_1, x_2 şi x_3 rădăcinile sale.

a) Determinaţi valoarea numărului real a, ştiind că $x_1 = 1$.

b) Demonstraţi că $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 1)^2 = 0$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.

c) Determinaţi valoarea numărului real a, ştiind că polinomul f are toate rădăcinile reale.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcţia $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(x + 1)$.

a) Demonstraţi că $f'(x) = -\frac{x}{(x+1)^2}$, pentru orice $x \in [0, \infty)$.

b) Demonstraţi că funcţia f este strict descrescătoare.

c) Demonstraţi că $\frac{x}{x+1} \le \ln(x+1)$, pentru orice $x \in [0, \infty)$.

2. Se consideră funcţia $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2}$.

a) Calculaţi $\int \left(f(x) - \frac{x+1}{x^2} \right) dx$.

b) Calculaţi $\int_1^2 f(x)dx$.

c) Folosind, eventual, inegalitatea $x^2 + 1 \ge 2x$, pentru orice $x \in (0, \infty)$, demonstraţi că $\int_1^e f(x)dx \ge 3$.

EDITURA PARALELA 45

Soluții

Clasa a IX-a

1. Mulțimi și elemente de logică matematică

I1.	I2.	I3.	I4.	I5.	I6.	I7.	I8.	I9.	I10.
16	31	10	A	A	(4, 3)	3	[3, 5)	$a = 4$	–3 şi 7

C1. $2^3 = 8$. **C2.** 31 nevide $\Rightarrow$ 32 în total $\Rightarrow$ A are 5 elemente. **C3.** 2008 + 2008 – 1000 = 3016. **C4.** $2^2 = 4$. **C5.** $P \wedge q$ e adevărată deoarece ambele propoziţii sunt adevărate. **C6.** $2x + 1$ divide pe 6, deci $2x + 1 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\} \Rightarrow A = \{-2, -1, 0, 1\}$. **C7.** $4x - 2 < 2 < 2x + 6 \Rightarrow x \in (-2, 1)$. **C8.** 12 + 25 – 7 = 30 $\Rightarrow$ 30 de elevi. **C9.** $A \setminus B = [2, 5) \Rightarrow$ numărul 4. **C10.** $A \cup B = (-2, 5)$, deci sunt 6 numere întregi. **C11.** Se obţine $a < c < b$. **C12.** $x - 3 \mid 2 \Rightarrow x - 3 \in \{\pm 1, \pm 2\} \Rightarrow A = \{1, 2, 4, 5\}$. **C13.** $\frac{11}{9} = 1{,}2222...$, deci $P = 2^{10} = 1024$. **C14.** $\frac{13}{6} = 2{,}16666...$, deci nu apare niciodată. **C15.** $\frac{23}{15} = 1{,}53333...$, deci $S = 5 + 3 \cdot 2008 = 6029$. **C16.** $A - B = (-3, 1] \Rightarrow$ Cardinalul mulţimii $(A \setminus B) \cap \mathbb{Z}$ este 4. **C17.** $a = 7\sqrt{2} - 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$, $b = 9\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 18\sqrt{2}$, deci $\sqrt{ab} = \sqrt{18 \cdot 2} = 6$. **C18.** Avem $x + 4 = 1 - 2x$ şi $x + 4 = 2x - 1$, de unde $x \in \{-1, 5\}$. **C19.** $\left|2 - \sqrt{5}\right| + \left|3 - \sqrt{5}\right| = \sqrt{5} - 2 + 3 - \sqrt{5} = 1 \in \mathbb{N}$. **C20.** $3x - 2 = \pm 11 \Rightarrow x \in \left\{\frac{13}{3}, -3\right\}$. Dar $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = -3$. **C21.** Avem $\left[\frac{17}{5}\right] = 2$ şi $\left\{\frac{11}{6}\right\} = \frac{5}{6}$, deci suma este $\frac{17}{6}$. **C22.** Avem $4 < a < 5$, deci $[a] = 4$. **C23.** $b = 5 + \sqrt{25} \in (10, 11) \Rightarrow [b] = 10$. **C24.** $A = \left|\sqrt{2} - 3\right| + \left|\sqrt{2} - 1\right| = 3 - \sqrt{2} + \sqrt{2} - 1 = 2 \in \mathbb{N}$. **C25.** $a = \frac{\sqrt{1} - \sqrt{2}}{1 - 2} + \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2 - 3} + \ldots + \frac{\sqrt{99} - \sqrt{100}}{99 - 100} = \frac{\sqrt{1} - \sqrt{100}}{-1} = \frac{1 - 10}{-1} = 9 \in \mathbb{N}$. **C26.** Avem $\sqrt{3} + \sqrt{25} = 5 + \sqrt{3} \in (6, 7)$, deci $\left[\sqrt{3} + \sqrt{25}\right] = 6$. Apoi $\sqrt{4} + \sqrt{19} = 2 + \sqrt{19} \in (6, 7)$, deci $\left[\sqrt{4} + \sqrt{19}\right] = 6$. **C27.** Pentru pasul

EDITURA PARALELA 45

Cuprins

EDITURA PARALELA 45

Clasa a XII-a

TESTE PENTRU BACALAUREAT, DUPĂ MODELUL M.E.N.

EDITURA PARALELA 45