



EDITURA PARALELA 45

*Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.C. nr. 3022/08.01.2018.  
Lucrarea este elaborată conform programei școlare în vigoare pentru bacalaureat.*

Redactare: Amalia Mărășescu, Olimpia Filip  
Corectură: autorii  
Tehnoredactare: Mioara Benza  
Pregătire de tipar: Marius Badea  
Design copertă: Mirona Pintilie

**Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României**

**Bacalaureat 2021 : matematică - M\_mate-info : teme recapitulative - 60 de teste, după modelul M.E.C - breviar teoretic / Adrian Zanoschi, Gheorghe Iurea, Gabriel Popa, .... - Pitești : Paralela 45, 2020**

Conține bibliografie  
ISBN 978-973-47-3278-4

I. Zanoschi, Adrian  
II. Iurea, Gheorghe  
III. Popa, Gabriel  
51

**COMENZI – CARTEA PRIN POȘTĂ**

EDITURA PARALELA 45  
Bulevardul Republicii, Nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești,  
jud. Argeș, cod 110177  
Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918  
Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492  
E-mail: [comenzi@edituraparelela45.ro](mailto:comenzi@edituraparelela45.ro)  
sau accesați [www.edituraparelela45.ro](http://www.edituraparelela45.ro)

Tiparul executat la tipografia *Editurii Paralela 45*  
E-mail: [tipografie@edituraparelela45.ro](mailto:tipografie@edituraparelela45.ro)

Copyright © Editura Paralela 45, 2020  
Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate,  
iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.  
[www.edituraparelela45.ro](http://www.edituraparelela45.ro)

Adrian Zanoschi  
Gabriel Popa

Gheorghe Iurea  
Petru Răducanu

Ioan Șerdean

Bacalaureat 2021  
Matematică  
*M\_mate-info*

Teme recapitulative  
60 de teste, după modelul M.E.C.  
Breviar teoretic

Editura Paralela 45

## Cuvânt-înainte

Examenul de bacalaureat reprezintă pentru fiecare tânăr o placă turnantă în devenirea lui intelectuală și personală, având menirea de a certifica pregătirea științifică și competențele dobândite în liceu, dar și de a deschide un orizont profesional sau academic adecvat fiecăruia. În consecință, performanța la acest examen, și îndeosebi la disciplina matematică, presupune un efort de pregătire constant, atât pentru parcurgerea conținuturilor, cât și pentru fixare, sistematizare, recapitulare. Lucrarea de față își propune să fie un ghid eficient, cu o strategie completă, care să răspundă tuturor exigențelor disciplinei și probelor de examen.

Prima parte a lucrării conține probleme grupate pe teme, urmărind acoperirea completă a programei. Acolo unde o anumită temă nu era destul de bine reprezentată, în variantele examenelor din anii precedenți, au fost adăugate probleme clasice, pentru o mai bună aprofundare a subiectului. Astfel, un elev își poate alege singur un capitol pe care vrea să îl repete și găsește în carte un număr suficient de exerciții cu ajutorul cărora să-și atingă scopul. Problemele sunt însoțite de soluții detaliate și de comentarii metodice, unele dintre ele având chiar mai multe rezolvări.

Partea a doua cuprinde 60 de teste, însoțite de răspunsuri și de rezolvări, iar la sfârșit există un breviar teoretic, care conține principalele noțiuni prevăzute în programă.

Cartea se adresează celor care se pregătesc pentru bacalaureatul la matematică, indiferent de profilul liceului pe care îl urmează. Din acest motiv, problemele sunt structurate pe două niveluri, cele mai dificile fiind evidențiate printr-o steluță. Elevii care nu urmează profilul matematică-informatică pot parcurge doar problemele fără steluță.

Lucrarea poate fi folosită și pentru învățarea curentă, deoarece permite elevilor să se antreneze în condiții reale, de bacalaureat. Ea se poate dovedi un instrument util profesorilor și elevilor în vederea recapitulării materiei la finalul unui capitol sau la sfârșitul anului școlar.

*Autorii*

# Teme recapitulative

## Clasa a IX-a

### 1.1. Mulțimi și elemente de logică matematică

1. Calculați:

a)  $2 \cdot (-3) - (-4) : 2 + (-25) : (-5)$ ;      b)  $2^{20} : 2^{18} - 3^{20} : 3^{19} + 5^0$ ;

c)  $30 \cdot \left(\frac{1}{3} - 0,3 + \frac{1}{15}\right)$ ;      d)  $8 \cdot [0,(3) + 0,1(6)]$ .

2. Fie  $0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$  scrierea zecimală a numărului  $\frac{1}{7}$ . Calculați:

$$a_{2018} + a_{2019} + a_{2020}.$$

3. Se consideră intervalele  $A = (-4, 4]$  și  $B = (-2, 7)$ . Determinați mulțimea:  $(A \cap B) \cap \mathbb{Z}$ .

4. Ordonăți crescător numerele  $a = 2,5(1)$ ,  $b = \frac{5}{2}$ ,  $c = 2,(51)$ ,  $d = 2,51$ .

5. Calculați:

a)  $\sqrt{45} + \sqrt{80} - \sqrt{125}$ ;

b)  $(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ ;

c)  $(\sqrt{2} - 1)^2 + (\sqrt{2} + 1)^2$ ;

d)  $\frac{3}{\sqrt{7} + 2} + \frac{2}{\sqrt{7} + 3}$ .

6. Arătați că numărul  $a = \left(\sqrt{168} + 4\sqrt{\frac{21}{2}} - 6\sqrt{\frac{14}{3}}\right)\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^{-1}$  este natural.

7. Arătați că numărul  $b = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{8} + \sqrt{9}}$  este natural.

8. Se consideră numerele  $a = \sqrt{98} - \sqrt{32} - \sqrt{8}$  și  $b = \sqrt{162} + \sqrt{18} + \sqrt{72}$ . Calculați media aritmetică și media geometrică a numerelor  $a$  și  $b$ .

9. Determinați numerele raționale  $a$  și  $b$ , știind că  $(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2 = a - b\sqrt{3}$ .



# Clasa a X-a

## 2.1. Radicali și logaritmi

1. Arătați că:

a)  $2\sqrt{14} - \sqrt{\frac{7}{2}} - 5\sqrt{\frac{8}{7}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$ ;

b)  $\sqrt{3} + \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} - \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = 3$ ;

c)  $\sqrt{6 + \sqrt{8}} + \sqrt{12 + \sqrt{24}} = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ .

2. Se consideră numerele  $a = \sqrt{3 - \sqrt{3}}$  și  $b = \sqrt{3 + \sqrt{3}}$ . Arătați că  $\frac{1}{\sqrt{6}} \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \in \mathbb{Q}$ .

3. Arătați că numărul  $a = \sqrt{17 + 12\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - \sqrt{6 + 4\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$ .

4. a) Arătați că, dacă  $a, b, c, d$  sunt numere raționale, astfel încât  $a\sqrt{2} + b = c\sqrt{2} + d$ , atunci  $a = c$  și  $b = d$ .

b) Determinați numerele raționale  $a$  și  $b$ , știind că  $(1 + \sqrt{2})^2 = a + b(1 + \sqrt{2})$ .

5. Calculați  $[\sqrt{2} - 3\sqrt{3}]$  ( $[x]$  reprezintă partea întreagă a lui  $x$ ).

6. Aduceți la o formă mai simplă:

a)  $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} - \sqrt{2}$ ;

b)  $\sqrt{6} \cdot \sqrt[3]{18} : \sqrt[6]{\frac{3}{2}}$ ;

c)  $\sqrt{\sqrt{2} - 1} \cdot \sqrt[4]{3 + 2\sqrt{2}}$ ;

d)  $\sqrt{27} \cdot \sqrt{3\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{9\sqrt{3}}$ .

7. a) Aduceți la forma cea mai simplă:  $E(x, y) = \sqrt[4]{\frac{x^3 y}{y^2 \sqrt{x}}} : \left( \frac{\sqrt[12]{y}}{\sqrt[8]{x}} \right)^7$ , unde  $x, y \in (0, +\infty)$ .

b) Arătați că numărul  $a = \sqrt[3]{\frac{4\sqrt[4]{27}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2}}} \cdot \frac{\sqrt[2]{16}}{3\sqrt[12]{3}}$  este rațional.

8. Se consideră  $E(x) = x\sqrt[3]{x^2 \sqrt{x}}$ , unde  $x \geq 0$ . Calculați  $E(a)$ , unde  $a = \sqrt[11]{8}$ .

9. a) Fie  $a = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdot \sqrt[16]{2}$  și  $b = \sqrt[16]{2}$ . Arătați că  $a \cdot b$  este număr rațional.

b) Arătați că numărul  $a = \sqrt{3 + \sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{5} - 1} \cdot \sqrt[6]{7 - 3\sqrt{5}} \in \mathbb{Q}$ .

10. Determinați numărul natural  $k$ , dacă  $(\sqrt[5]{x^3})^{7-k} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^k = x$ , pentru orice  $x > 0$ .

11. Arătați că  $\frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1} = \sqrt{2} - \sqrt[3]{2}$ .

12. Se consideră numărul real  $a = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$ .

a) Arătați că  $a^3 = 14 - 3a$ .

b) Arătați că  $a^3 + 3a - 14 = (a - 2)(a^2 + 2a + 7)$ .

c) Demonstrați că  $a \in \mathbb{Q}$ .

13. Arătați că  $\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} = 2$ .

14. Ordonăți crescător numerele:

a)  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt[3]{4}$  și  $\sqrt[4]{5}$ ;

b)  $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ ,  $\sqrt[4]{27\sqrt{3}}$  și  $\sqrt[3]{4}$ .

15. Comparați numerele:

a)  $a = \sqrt{2} + \sqrt{7}$  și  $b = \sqrt{3} + \sqrt{6}$ ;

b)  $a = \sqrt{13} - \sqrt{12}$  și  $b = \sqrt{12} - \sqrt{11}$ ;

c)  $a = \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$  și  $b = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3}$ .

16. Comparați numerele  $a = \sqrt{1+\sqrt{2}}$  și  $b = \sqrt[3]{2+\sqrt{3}}$

17. Calculați:

a)  $\log_2 8\sqrt{2}$ ;    b)  $\log_2 0,125$ ;    c)  $\log_{\sqrt{2}} 4\sqrt[3]{2}$ ;    d)  $\log_2 \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}$ ;

e)  $4^{1-\log_2 \sqrt{8}}$ .

18. Ordonăți crescător numerele  $a = -\sqrt[3]{64}$ ,  $b = \log_3 \frac{1}{27}$  și  $c = \log_2 \frac{1}{32}$ .

19. a) Arătați că numărul  $a = \log_4 8 + \log_9 27 - \sqrt[3]{8}$  este natural.

b) Demonstrați că numărul  $b = \log_{\sqrt{3}} 3\sqrt{3} + \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 4$  este întreg.

20. Calculați:

a)  $\log_2(6+\sqrt{8}) + \log_2(6-\sqrt{8}) - \log_2 7$ ;    b)  $\lg 0,01 + 2^{\log_2 3} - 9^{\log_3 5}$ ;

c)  $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 8$ ;

d)  $\frac{\log_3 5 \cdot \log_7 11}{\log_7 5 \cdot \log_3 11}$ .

21. Calculați:

a)  $\log_2 8 \cdot \log_3 9 \cdot \log_5 \sqrt{5}$ ;

b)  $\log_2 8\sqrt{2} - \log_3 3\sqrt{3}$ .



# Clasa a XII-a

## 4.1. Legi de compoziție

1. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x \circ y = 2^{x+y}$ , oricare ar fi  $x, y \in \mathbb{R}$ .
  - a) Calculați  $2017 \circ (-2017)$ .
  - b) Rezolvați ecuația  $x \circ x^2 = 64$ .
  - c) Demonstrați că, dacă  $(x \circ y) \circ z = 2^{z+1}$ , atunci  $x = -y$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție „ $\circ$ ”, definită prin  $x \circ y = x + y + 11$ , oricare ar fi  $x, y \in \mathbb{R}$ .
  - a) Arătați că  $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ , oricare ar fi  $x, y, z \in \mathbb{R}$ .
  - b) Găsiți două elemente  $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$  pentru care  $a \circ b \in \mathbb{Z}$ .
  - c) Determinați cel mai mare număr natural  $n$ , pentru care  $1 \circ 2 \circ \dots \circ n < 2017$ .
3. Pe mulțimea numerelor reale definim operația  $x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$ , oricare ar fi  $x, y \in \mathbb{R}$ .
  - a) Arătați că  $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ , oricare ar fi  $x, y, z \in \mathbb{R}$ .
  - b) Calculați  $(-1000) \circ (-999) \circ \dots \circ 1000$ .
  - c) Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația  $x \circ x \circ x \circ x = 12$ .
4. Pe mulțimea numerelor complexe, se consideră legea de compoziție „ $\circ$ ” definită prin  $x \circ y = xy + ix + iy - 1 - i$ , oricare ar fi  $x, y \in \mathbb{C}$ .
  - a) Demonstrați că  $x \circ y = (x + i)(y + i) - i$ , oricare ar fi  $x, y \in \mathbb{C}$ .
  - b) Demonstrați că, pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$  și  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ , are loc egalitatea  $x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_n = (x_1 + i)(x_2 + i) \dots (x_n + i) - i$ .
  - c) Rezolvați în  $\mathbb{C}$  ecuația  $x \circ x \circ x \circ x = 1 - i$ .

5. Pe mulțimea  $\mathbb{R}$  se definește legea de compoziție  $x \circ y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ , oricare ar fi  $x, y \in \mathbb{R}$ . Mai considerăm  $x_0 \in \mathbb{Q}^*$  și  $x_n = x_0 \circ x_{n-1}$ , oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- Demonstrați că  $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ , oricare ar fi  $x, y, z \in \mathbb{R}$ .
  - Determinați elementul neutru al operației „ $\circ$ ”.
  - Arătați că  $x_3$  este număr irațional.
6. Pe mulțimea  $\mathbb{R}$  se definește legea de compoziție  $x * y = 2xy - 6x - 6y + 21$ , oricare ar fi  $x, y \in \mathbb{R}$ .
- Arătați că legea „ $*$ ” este asociativă și comutativă.
  - Determinați elementul neutru ale legii „ $*$ ”.
  - Demonstrați că, pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , are loc identitatea:  

$$\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } n \text{ ori } x} = 2^{n-1}(x-3)^n + 3, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}^*.$$
7. Pe mulțimea  $\mathbb{R}$  definim operația  $x * y = ax + by$ , oricare ar fi  $x, y \in \mathbb{R}$ . Determinați numerele reale  $a$  și  $b$ , știind că operația introdusă este asociativă și comutativă.
8. Studiați asociativitatea, comutativitatea și existența elementului neutru pentru fiecare dintre următoarele legi de compoziție:
- $x \top y = \frac{x+y}{2}$ , oricare ar fi  $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ ;
  - $x \perp y = \sqrt{xy}$ , oricare ar fi  $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ ;
  - $A * B = AB + BA$ , oricare ar fi  $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
9. Se consideră mulțimea  $G = (-\infty, 0)$  și operația  $x * y = \frac{xy}{x+y}$ , oricare ar fi  $x, y \in G$ .
- Demonstrați că  $G$  este parte stabilă în raport cu operația dată.
  - Arătați că operația considerată este comutativă și asociativă.
  - Stabiliți dacă operația „ $*$ ” admite sau nu element neutru.
10. Pe mulțimea  $G = (0, +\infty) \setminus \{1\}$  considerăm operația  $x \circ y = x^{3 \ln y}$ , oricare ar fi  $x, y \in G$ .
- Demonstrați că  $x \circ y \in G$ , oricare ar fi  $x, y \in G$ .
  - Arătați că  $x \circ y = y \circ x$ , oricare ar fi  $x, y \in G$ .
  - Rezolvați în  $G$  ecuația  $x \circ x = e^3$ .
11. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție  $x * y = 2xy - 6x - 6y + 21$ , oricare ar fi  $x, y \in \mathbb{R}$ .

# Soluții

## Clasa a IX-a

### 1.1. Mulțimi și elemente de logică matematică

1. a) 1; b) 2; c) 3; d) 4. 2.  $a_{2018} + a_{2019} + a_{2020} = 4 + 2 + 8 = 14$ . 3.  $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ . 4.  $b < d < a < c$ . 5. a)  $2\sqrt{5}$ ; b) 1; c) 6; d) 1. 6.  $a = 6 \in \mathbb{N}$ . 7.  $b = 2 \in \mathbb{N}$ . 8.  $a = \sqrt{2}$ ,  $b = 18\sqrt{2}$ ,  $m_a = \frac{19\sqrt{2}}{2}$ ,  $m_g = 6$ . 9.  $a = 8$ ,  $b = -4$ . 10.  $\sqrt{x+49} \in [7, 10]$ ,  $\sqrt{x+625} \in [25, 26] \Rightarrow a \in [32, 36]$ ,  $\forall x \in [0, 51]$ . 11.  $E(x, y) = \sqrt{(x-1)^2 + 4} + \sqrt{(y+3)^2 + 1} \geq \sqrt{4} + \sqrt{1} = 3$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ . 12. 186. 13.  $[a] = 2$ ,  $\{a\} = 0,7$ ;  $[b] = -1$ ,  $\{b\} = 0,4$ ;  $[c] = 13$ ,  $\{c\} = 0$ ;  $[d] = -2$ ,  $\{d\} = 2 - \sqrt{3}$ . 14. a) -2; b) 0; c) 5; d) 1. 15. a)  $x \in [7, 8)$ ; b)  $x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right)$ ; c)  $x = \frac{k}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; d)  $x = k + \frac{1}{3}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . 16. a)  $x \in \{-3, 7\}$ ; b)  $x \in \{-3, 5\}$ ; c)  $x \in \{-1, 5\}$ ; d)  $x = -1$ . 17. a)  $x \in [-1, 2]$ ; b)  $x \in (-\infty, -7] \cup [1, +\infty)$ . 18. 100. 19.  $E(x) = 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . 20.  $|2x-3| + 2|x-1| = |2x-3| + |2x-2| = |2x-3| + |2-2x| \geq |2x-3+2-2x| = 1$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . 21.  $x^2 + 3x + 3 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . 22.  $xy - 2x - 2y + 6 = (x-2)(y-2) + 2 \in [2, +\infty)$ ,  $\forall x, y \in [2, +\infty)$ . 23.  $-1 < \frac{x+y}{1+xy} \Leftrightarrow -1 - xy < x + y \Leftrightarrow (x+1)(y+1) > 0$ ,  $\forall x, y \in (-1, 1)$  etc. 24. b)  $E(x) = (x^2 + 1) \left( \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right) > \frac{3}{4}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . 25. c)  $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) \geq 2 + 2 + 2 = 6$ ,  $\forall a, b, c \in (0, +\infty)$ . 26. b) Fie  $P(n): 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . Evident  $P(1): 1 \cdot 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3}$  este adevărată. Presupunem că  $P(k)$  este adevărată pentru un număr  $k \in \mathbb{N}^*$ . Atunci avem  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$ , deci  $P(k+1)$  este adevărată. Drept urmare,  $P(n)$  este adevărată pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ . 30. 6. 31. 171. 32. 192. 33. 60. 34. 243. 35. 120. 36. 60. 37.  $99 \cdot 26^3 = 1740024$ . 38. 16. 39. 47. 40. a) 8; b) 25; c) 50.

# Breviar teoretic

## 1. ALGEBRĂ

### 1.1. Formule de calcul prescurtat

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2; a^2 - b^2 = (a - b)(a + b); (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac;$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3; a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2);$$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}); n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

### 1.2. Sume remarcabile

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2};$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

### 1.3. Modulul unui număr real

$$\text{Definiție. } |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

Proprietăți: 1)  $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ; 2)  $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ; 3)  $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$ ;

4)  $|x : y| = |x| : |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0$ ; 5)  $|x + y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$ ; egalitatea are loc dacă și numai dacă  $xy \geq 0$ ; 6)  $|x| \leq a \Leftrightarrow x \in [-a, a], a > 0$ ; 7)  $|x| \geq a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty), a > 0$ .

### 1.4. Partea întregă și partea fracționară

Definiție. Partea întregă a unui număr real  $x$  este cel mai mare număr întreg, mai mic sau egal cu  $x$  și se notează cu  $[x]$ . Partea fracționară (zecimală) a unui număr real  $x$  se notează cu  $\{x\}$  și este definită astfel:  $\{x\} = x - [x]$ .

Proprietăți: 1)  $[x] \in \mathbb{Z}$  și  $\{x\} \in [0, 1), \forall x \in \mathbb{R}$ ; 2)  $[x] \leq x < [x] + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ ;

3)  $[x + k] = [x] + k, \forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}$ ; 4)  $\{x + k\} = \{x\}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}$ .

## 1.5. Progresii

**Progresii aritmetice. Definiție.** Șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  este o *progresie aritmetică* de rație  $r$  dacă  $a_{n+1} = a_n + r, \forall n \geq 1$  (în acest caz, scriem  $\div (a_n)_{n \geq 1}$ ).

**Proprietăți:** 1)  $\div (a_n)_{n \geq 1} \Leftrightarrow a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \forall n \geq 2$ ; 2)  $\div (a_n)_{n \geq 1} \Leftrightarrow (\exists) r$  astfel încât  $a_n = a_1 +$

$+(n-1)r, \forall n \geq 1$ ; 3)  $\div (a_n)_{n \geq 1} \Rightarrow S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}, \forall n \geq 1$ .

**Progresii geometrice. Definiție.** Șirul  $(b_n)_{n \geq 1}$  (cu  $b_1 \neq 0$ ) este o *progresie geometrică* de rație  $q (q \neq 0)$  dacă  $b_{n+1} = b_n \cdot q, \forall n \geq 1$  (în acest caz, scriem  $\div (b_n)_{n \geq 1}$ ).

**Proprietăți:** 1)  $\div (b_n)_{n \geq 1} \Leftrightarrow b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}, \forall n \geq 2$ ; 2)  $\div (b_n)_{n \geq 1} \Leftrightarrow (\exists) q \neq 0$  astfel încât  $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, \forall n \geq 1$ ; 3) Dacă  $(b_n)_{n \geq 1}$  este o progresie geometrică de rație  $q \neq 1$ , atunci  $S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, \forall n \geq 1$ .

## 1.6. Ecuația de gradul al II-lea cu coeficienți reali

Ecuația  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ ), are *discriminantul*  $\Delta = b^2 - 4ac$ . Dacă  $\Delta \geq 0$ ,

ecuația are două soluții reale (distincte dacă  $\Delta \neq 0$  și egale dacă  $\Delta = 0$ ):  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ . Când

$\Delta < 0$ , ecuația nu are soluții reale. Soluțiile ecuației,  $x_1, x_2$ , verifică *relațiile lui Viète*:  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$  și  $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ . Dacă numerele  $x_1, x_2$  au proprietățile  $x_1 + x_2 = S$  și  $x_1 x_2 = P$ , atunci ele sunt

soluțiile ecuației de gradul al II-lea:  $x^2 - Sx + P = 0$ .

## 1.7. Funcții – definiții, proprietăți

**Graficul și imaginea unei funcții.** Numim *graficul* funcției  $f: A \rightarrow B$  mulțimea  $G_f = \{(a, f(a)) \in A \times B \mid a \in A\}$ . Dacă  $f$  este o funcție numerică (adică  $A, B \subset \mathbb{R}$ ), atunci  $G_f$  are o reprezentare geometrică într-un plan pentru care am ales un reper cartezian. Această reprezentare geometrică se numește, de obicei, tot *graficul* funcției  $f$ . *Imaginea* funcției  $f: A \rightarrow B$  este mulțimea  $\text{Im } f = \{y \in B \mid (\exists) x \in A \text{ pentru care } f(x) = y\} \subset B$ .

**Funcții injective, surjective, bijective.** Funcția  $f: A \rightarrow B$  este *injectivă* dacă  $(\forall x, y \in A, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$ , sau  $(\forall x, y \in A, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$ . Funcția  $f: A \rightarrow B$  este *surjectivă* dacă  $\text{Im } f = B$ , adică  $\forall y \in B, (\exists) x \in A$  pentru care  $f(x) = y$ . O funcție se numește *bijectivă* dacă este atât injectivă, cât și surjectivă.

**Compunerea funcțiilor.** Dacă  $f: A \rightarrow B$  și  $g: B \rightarrow C$  sunt două funcții, compusa lor este funcția  $g \circ f: A \rightarrow C$  definită prin  $(g \circ f)(x) = g(f(x)), \forall x \in A$ . Operația de compunere a funcțiilor este asociativă, dar nu este comutativă. Dacă notăm cu  $1_A: A \rightarrow A, 1_A(x) = x, \forall x \in A$  *funcția identică a mulțimii A*, atunci  $f \circ 1_A = f$ , pentru orice funcție  $f: A \rightarrow B$  și  $1_A \circ g = g$ , pentru orice funcție  $g: C \rightarrow A$ .

## Cuprins

<i>Cuvânt-înainte</i> .....	5
-----------------------------	---

### TEME RECAPITULATIVE

	<i>Enunțuri</i>	<i>Soluții</i>
<b>Clasa a IX-a</b>		
1.1. Mulțimi și elemente de logică matematică .....	7	234
1.2. Șiruri. Progresii .....	10	235
1.3. Funcții. Funcția liniară .....	12	237
1.4. Ecuația de gradul al II-lea. Funcția de gradul al II-lea .....	15	238
1.5. Vectori .....	19	239
1.6. Trigonometrie .....	22	241
1.7. Aplicații ale trigonometriei în geometrie .....	25	243
<b>Clasa a X-a</b>		
2.1. Radicali și logaritmi .....	28	245
2.2. Numere complexe .....	31	246
2.3. Funcții .....	34	248
2.4. Ecuații și inecuații .....	37	251
2.5. Combinatorică .....	41	254
2.6. Matematici aplicate. Probabilități .....	44	256
2.7. Geometrie analitică .....	46	258
2.8. Probleme recapitulative din materia claselor a IX-a – a X-a.....	49	259
<b>Clasa a XI-a</b>		
3.1. Permutări.....	56	261
3.2. Matrice .....	57	261
3.3. Determinanți .....	60	263
3.4. Inversa unei matrice. Ecuații matriceale .....	64	264
3.5. Sisteme de ecuații liniare .....	66	266
3.6. Probleme de sinteză – algebră.....	70	268
3.7. Șiruri .....	75	270
3.8. Șiruri date prin formule de recurență .....	80	274
3.9. Limite de funcții.....	82	276
3.10. Asimptote.....	86	278
3.11. Funcții continue .....	88	279
3.12. Derivata unei funcții.....	90	281
3.13. Teorema lui Fermat. Teorema lui Rolle. Teorema lui Lagrange.....	93	283
3.14. Regulile lui l'Hospital.....	96	286
3.15. Rolul derivatelor de ordinul I și de ordinul al II-lea în studiul funcțiilor .....	98	287
3.16. Reprezentarea grafică a funcțiilor .....	103	294
3.17. Probleme de sinteză – analiză matematică .....	106	300

<b>Clasa a XII-a</b>	
4.1. Legi de compoziție.....	112.....304
4.2. Grupuri.....	115.....306
4.3. Inele și corpuri .....	120.....311
4.4. Polinoame .....	124.....315
4.5. Probleme de sinteză – algebră.....	130.....320
4.6. Primitive.....	133.....321
4.7. Formula Leibniz–Newton .....	139.....324
4.8. Metode de integrare .....	144.....328
4.9. Proprietăți ale integralei Riemann.....	147.....332
4.10. Aplicații ale integralei definite.....	152.....337
4.11. Probleme de sinteză – analiză matematică.....	155.....340
<b>TESTE PENTRU BACALAUREAT, DUPĂ MODELUL M.E.N.....</b>	<b>159.....343</b>
<b>BREVIAR TEORETIC .....</b>	<b>368</b>
<i>Bibliografie</i> .....	397