

*Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.C. nr. 3022/08.01.2018.  
Lucrarea este elaborată conform programei școlare în vigoare pentru bacalaureat.*

Redactare: Iuliana Ene  
Corectură: autorii  
Tehnoredactare: Mioara Benza  
Pregătire de tipar: Marius Badea  
Design copertă: Mirona Pintilie

**Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României**  
**Bacalaureat 2024 : Matematică : M mate-info : teme recapitulative,**  
**65 de teste rezolvate, după modelul M.E., breviar teoretic /**  
Adrian Zanoschi, Gheorghe Iurea, Gabriel Popa, .... –  
Pitești : Paralela 45, 2023  
Conține bibliografie

ISBN 978-973-47-3956-1  
I. Zanoschi, Adrian  
II. Iurea, Gheorghe  
III. Popa, Gabriel

51

#### COMENZI – CARTEA PRIN POȘTĂ

EDITURA PARALELA 45  
Bulevardul Republicii, nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești,  
jud. Argeș, cod 110177

Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918  
Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492  
E-mail: [comenzi@edituraparelela45.ro](mailto:comenzi@edituraparelela45.ro)  
sau accesați [www.edituraparelela45.ro](http://www.edituraparelela45.ro)

Tiparul executat la tipografia *Editurii Paralela 45*  
E-mail: [tipografie@edituraparelela45.ro](mailto:tipografie@edituraparelela45.ro)

Copyright © Editura Paralela 45, 2023  
Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate,  
iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.  
[www.edituraparelela45.ro](http://www.edituraparelela45.ro)



**Adrian Zanoschi  
Gheorghe Iurea  
Gabriel Popa  
Petru Răducanu  
Ioan Șerdean**

# Bacalaureat 2024

## MATEMATICĂ

### M\_mate-info

- \_ Teme recapitulative
- \_ 65 de teste rezolvate, după modelul M.E.
- \_ Breviar teoretic

**Editura Paralela 45**



# Teme recapitulative

## Clasa a IX-a

### 1.1. Mulțimi și elemente de logică matematică

1. Se consideră intervalele  $A = (-4, 4]$  și  $B = (-2, 7)$ . Determinați  $(A \cap B) \cap \mathbb{Z}$ .
2. Ordonați crescător numerele  $a = 2,5(1)$ ,  $b = \frac{5}{2}$ ,  $c = 2,(51)$  și  $d = 2,51$ .
3. Arătați că numărul  $a = \left( \sqrt{168} + 4\sqrt{\frac{21}{2}} - 6\sqrt{\frac{14}{3}} \right) \left( \sqrt{4\frac{2}{3}} \right)^{-1}$  este natural.
4. Arătați că numărul  $b = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{8} + \sqrt{9}}$  este natural.
5. Se consideră numerele  $a = \sqrt{98} - \sqrt{32} - \sqrt{8}$  și  $b = \sqrt{162} + \sqrt{18} + \sqrt{72}$ . Calculați media aritmetică și media geometrică ale numerelor  $a$  și  $b$ .
6. Determinați numerele raționale  $a$  și  $b$ , știind că  $(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2 = a - b\sqrt{3}$ .
7. Demonstrați că, dacă  $x \in [0, 51]$ , atunci numărul  $a = \sqrt{x+49} + \sqrt{x+625}$  se află în intervalul  $[32, 36]$ .
8. Fie  $E(x, y) = \sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{y^2 + 6y + 10}$ , unde  $x, y \in \mathbb{R}$ . Arătați că  $E(x, y) \geq 3$ , pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ .
9. Stabiliți câte numere iraționale conține mulțimea  $\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{199}, \sqrt{200}\}$ .
10. Calculați:
  - a)  $\left[ \frac{5}{3} \right] + \left[ -\frac{5}{2} \right]$ ;
  - b)  $\{1,64\} - \{-2,36\}$ ;
  - c)  $[\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + [\sqrt{2} + \sqrt{3}]$ ;
  - d)  $\{\sqrt{2}\} + \{\sqrt{3}\} - \{\sqrt{2} + \sqrt{3}\}$ .

## 1.6. Trigonometrie

1. Calculați: a)  $\sin \frac{5\pi}{6}$ ; b)  $\cos \frac{7\pi}{4}$ ; c)  $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{3}$ ; d)  $\cos \frac{7\pi}{6}$ .
2. Calculați: a)  $\sin \left(-\frac{7\pi}{6}\right)$ ; b)  $\cos \frac{117\pi}{4}$ ; c)  $\operatorname{tg} \frac{53\pi}{3}$ ; d)  $\operatorname{ctg} \left(\frac{1007\pi}{6}\right)$ .
3. Aflați  $\cos a$ ,  $\sin b$ ,  $\sin(a+b)$  și  $\cos(a-b)$ , știind că  $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ,  $b \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ ,  
 $\sin a = \frac{3}{5}$  și  $\cos b = \frac{12}{13}$ .
4. Dacă  $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$  și  $\cos a = -\frac{5}{13}$ , calculați  $\sin a$ ,  $\sin 2a$  și  $\cos 2a$ .
5. Fie  $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$  și  $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ . Se cere  $\cos x$  și  $\sin x$ .
6. Dacă  $x \in \mathbb{R}$  pentru care  $\sin x = \frac{1}{4}$ , se cere  $\sin 3x$ .
7. Fie  $x \in \mathbb{R}$ , astfel încât  $\operatorname{ctg} x = 6$ . Calculați  $\sin^2 x$ .
8. Dacă  $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , astfel încât  $\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t = 2$ , calculați  $\sin 2t$ .
9. Fie  $t$  și  $\alpha \in \mathbb{R}$ , astfel încât  $\sin \alpha + t \cos \alpha = 1$ .  
 a) Dacă  $t = 1$ , calculați  $\operatorname{tg} 2\alpha$ .  
 b) Dacă  $t = -1$ , calculați  $\sin 2\alpha$ .
10. Calculați  $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$ , știind că  $\sin a = \frac{4}{5}$  și  $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .
11. Calculați: a)  $\sin \frac{\pi}{12}$ ; b)  $\cos 75^\circ$ ; c)  $\operatorname{tg} 15^\circ$ ; d)  $\cos \frac{11\pi}{12}$ .
12. Calculați  $\frac{\sin 75^\circ}{\sin 15^\circ} - \frac{\cos 75^\circ}{\cos 15^\circ}$ .
13. Fie  $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ , astfel încât  $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ . Calculați  $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \sin(\pi - \alpha)$ .
14. Fie  $a, b \in \mathbb{R}$ , astfel încât  $a - b = \pi$ . Arătați că are loc relația  $\cos a \cdot \cos b \leq 0$ .
15. Se consideră  $a, b \in \mathbb{R}$ , astfel încât  $\sin a + \sin b = 1$  și  $\cos a + \cos b = \frac{1}{2}$ . Calculați  $\cos(a-b)$ .

# Clasa a X-a

## 2.1. Radicali și logaritmi

1. Arătați că:

a)  $2\sqrt{14} - \sqrt{\frac{7}{2}} - 5\sqrt{\frac{8}{7}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$ ;      b)  $\sqrt{3} + \sqrt{11-6\sqrt{2}} - \sqrt{5-2\sqrt{6}} = 3$ ;

c)  $\sqrt{6+\sqrt{8}} + \sqrt{12+\sqrt{24}} = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ .

2. Se consideră numerele  $a = \sqrt{3-\sqrt{3}}$  și  $b = \sqrt{3+\sqrt{3}}$ . Arătați că  $\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \in \mathbb{Q}$ .

3. Arătați că numărul  $a = \sqrt{17+12\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt{6+4\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$ .

4. Calculați  $[\sqrt{2} - 3\sqrt{3}]$  ( $[x]$  reprezintă partea întreagă a lui  $x$ ).

5. Aduceți la o formă mai simplă:

a)  $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} - \sqrt{2}$ ;      b)  $\sqrt{6} \cdot \sqrt[3]{18} : \sqrt[6]{\frac{3}{2}}$ ;

c)  $\sqrt{\sqrt{2}-1} \cdot \sqrt[4]{3+2\sqrt{2}}$ ;      d)  $\sqrt{27} \cdot \sqrt{3\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{9\sqrt{3}}$ .

6. a) Aduceți la forma cea mai simplă:  $E(x, y) = \sqrt[4]{\frac{x\sqrt[3]{y}}{y^2\sqrt{x}}} : \left(\frac{\sqrt[12]{y}}{\sqrt[8]{x}}\right)^7$ , unde  $x, y \in (0, +\infty)$ .

b) Arătați că numărul  $a = \sqrt[3]{\frac{4\sqrt[4]{27}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2}}} \cdot \frac{\sqrt[3]{16}}{3\sqrt[12]{3}}$  este rațional.

7. Se consideră  $E(x) = x\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}$ , unde  $x \geq 0$ . Calculați  $E(a)$ , unde  $a = \sqrt[11]{8}$ .

8. a) Fie  $a = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdot \sqrt[16]{2}$  și  $b = \sqrt[9]{2}$ . Arătați că  $a \cdot b$  este număr rațional.

b) Arătați că numărul  $a = \sqrt{3+\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{5}-1} \cdot \sqrt[6]{7-3\sqrt{5}} \in \mathbb{Q}$ .

9. Determinați numărul natural  $k$ , dacă  $(\sqrt[5]{x^3})^{7-k} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^k = x$ , pentru orice  $x > 0$ .

10. Ordonăți crescător numerele:

a)  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt[3]{4}$  și  $\sqrt[4]{5}$ ;      b)  $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ ,  $\sqrt[4]{27\sqrt{3}}$  și  $\sqrt[3]{4}$ .

## 2.5. Combinatorică

1. Care este cel mai mic număr natural  $n$  pentru care  $n! > 1000$ ?
  2. a) Arătați că  $\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{k}{(k+1)!}$ , oricare ar fi  $k \in \mathbb{N}^*$ .  
b) Calculați suma  $S = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{99}{100!}$  și arătați că  $S < 1$ .
  3. Calculați: a)  $\frac{C_{20}^{10}}{C_{20}^9}$ ; b)  $A_5^3 - 6C_5^3$ ; c)  $A_4^3 - A_3^2 - C_4^2$ .
  4. Calculați:  
a)  $\frac{n! + (n+1)!}{(n+1)! - n!}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ; b)  $\frac{A_n^6 + A_n^5}{A_n^4}$ ,  $n \in \mathbb{N}, n \geq 6$ ; c)  $\frac{C_n^3}{C_n^3 + C_n^4}$ ,  $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$ .
  5. Care este cel mai mare element din mulțimea  $A = \{C_7^3, C_7^5, C_7^6\}$ ?
  6. Demonstrați că:  
a)  $C_{2n}^n = 2C_{2n-1}^n$ , unde  $n \in \mathbb{N}^*$ ; b)  $C_{n+1}^4 = C_n^4 + C_n^3$ , unde  $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$ .
  7. Rezolvați ecuațiile: a)  $C_x^2 + A_x^2 = 30$ ; b)  $C_{2x-3}^2 = 3$ ;  
c)  $A_x^5 - 3A_x^4 = 21A_x^3$ ; d)  $6 \cdot C_x^1 + 6 \cdot C_{x+2}^3 = 13C_{x+1}^2$ ; e)  $A_{x-2}^2 + C_x^2 = 41$ .
  8. Rezolvați inecuațiile:  
a)  $C_x^{x-1} + C_{x-1}^{x-3} \leq 9$ ; b)  $(x+1)! - x! \leq 100$ ; c)  $C_n^3 \geq C_n^5$ ;  
d)  $C_7^k \geq C_7^{k-1}$ ; e)  $A_{x-1}^5 \leq 12A_{x-1}^3$ .
- \*\*\*
9. În câte moduri se poate forma un tren, având la dispoziție 6 vagoane?
  10. Câte numere de zece cifre distincte încep cu 20 și se termină cu 14?
  11. În câte moduri putem împărți 5 cărți la trei copii?
  12. Dăm 3 cărți diferite la 5 copii, astfel încât niciun copil să nu primească mai mult de o carte. În câte moduri se poate face împărțirea?
  13. Un antrenor are la dispoziție 10 jucători. În câte moduri poate forma o echipă formată din 6 jucători?
  14. Într-o clasă sunt 22 de elevi, dintre care 12 sunt fete. Determinați în câte moduri se poate alege un comitet reprezentativ al clasei format din 3 fete și 2 băieți.
  15. Într-o clasă sunt 30 de elevi, dintre care 18 fete și 12 băieți. Alcătuim o echipă formată din 6 elevi care să conțină cel puțin 4 fete. În câte moduri putem forma echipa?
  16. Aflați numărul diagonalelor unui poligon convex cu 10 laturi.

**2.8. Probleme recapitulative din materia claselor a IX-a – a X-a****Varianta 1**

1. Arătați că modulul numărului complex  $z = 5 - 12i$  este 13.
2. Determinați coordonatele punctelor de intersecție dintre parabola asociată funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 5x + 6$  și axa  $Ox$ .
3. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația  $3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} = 13$ .
4. Câte numere de două cifre se divid cu 4 sau cu 5?
5. Scrieți ecuația dreptei ce trece prin  $A(1, 2)$  și este paralelă cu dreapta  $d: x + y + 1 = 0$ .
6. Arătați că  $\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$ .

**Varianta 2**

1. Arătați că partea imaginară a numărului complex  $z = \frac{1}{1+i}$  este  $-\frac{1}{2}$ .
2. Determinați punctele de pe graficul funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$  ale căror coordonate au același modul.
3. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația  $\sqrt[3]{x+2} + 2 = 0$ .
4. Câte submulțimi ale mulțimii  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  conțin numărul 1?
5. Arătați că vectorii  $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$  și  $\vec{v} = -6\vec{i} - 4\vec{j}$  sunt coliniari.
6. În triunghiul  $ABC$  avem  $AB = 4, AC = 6$  și  $\sphericalangle A = 120^\circ$ . Arătați că  $BC = 2\sqrt{19}$ .

**Varianta 3**

1. Demonstrați că numărul  $a = \sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt{2}$  este întreg.
2. Demonstrați că funcția  $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - \frac{1}{x}$  este impară.
3. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația  $3^{x^2-4x} = \frac{1}{27}$ .
4. Câte submulțimi cu trei elemente are mulțimea  $\{0, 1, 2, \dots, 10\}$ ?
5. Aflați distanța de la punctul  $A(1, 3)$  la dreapta  $d: x - 2y = 0$ .
6. Dacă  $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$  și  $\sin a = \frac{5}{13}$ , calculați  $\operatorname{tg} a$ .

# Clasa a XI-a

## 3.1. Permutări

1. Se consideră permutările  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  și  $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ . Calculați  $\sigma\tau$ ,  $\tau\sigma$ ,  $\sigma^2$ ,  $\tau^{-2}$ .
2. Fie permutările  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$  și  $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ . Calculați  $(\sigma\tau)^{-1}$ ,  $\sigma^{-1}$ ,  $\tau^{-1}$  și arătați că  $(\sigma\tau)^{-1} = \tau^{-1}\sigma^{-1}$ .
3. Se consideră permutarea  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_4$ . Calculați  $\sigma^{2009}$ .
4. Se consideră permutările  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  și  $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ . Determinați  $x \in S_3$ , știind că  $\sigma x \tau = e$ .
5. Se consideră următoarele permutări de gradul patru:  
 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ .
  - a) Arătați că  $\sigma^2 = \tau^2 = e$ ,  $\sigma^{-1} = \sigma$ ,  $\tau^{-1} = \tau$  și  $\sigma\tau \neq \tau\sigma$ .
  - b) Determinați o permutare  $\alpha \in S_4$ , astfel încât  $\alpha^{-1} \neq \alpha$ .
6. Se consideră permutarea  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_3$ .
  - a) Calculați  $\sigma^3$ .
  - b) Rezolvați ecuația  $\sigma^{2009} \cdot x = e$ ,  $x \in S_3$ .
7. Fie  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_3$  și  $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in S_3$ .
  - a) Calculați  $\sigma\tau$  și  $\tau\sigma$ .
  - b) Rezolvați ecuația  $\sigma x = \tau$ .
8. Determinați semnul fiecăreia dintre următoarele permutări:  
 $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ .



**21.** Fie matricele  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  și mulțimea  $C(A) = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid XA = AX\}$ .

a) Arătați că  $B \in C(A)$ .

b) Demonstrați că dacă  $X \in C(A)$ , atunci există  $x, y \in \mathbb{R}$ , astfel încât  $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$ .

c)\* Rezolvați ecuația  $X + X^2 = A$  în  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

### 3.3. Determinanți

**1.** Fie matricea  $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Calculați  $\det(I_2 + A + A^2 + A^3)$ .

**2.** Fie matricea  $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Rezolvați ecuația  $\det(A - xI_2) = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**3.** Fie  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Arătați că  $\det(X \cdot X^t) = (ad - bc)^2$ .

**4.** Se consideră matricea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

a) Arătați că  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{pmatrix}$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .

b) Calculați  $\det(A) + \det(A^2) + \dots + \det(A^{2017})$ .

c) Calculați  $\det(A + A^2 + \dots + A^{2017})$ .

**5.** Se consideră mulțimea  $G = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \mid z, w \in \mathbb{C} \right\}$ .

a) Arătați că, dacă  $A \in G$ , astfel încât  $\det A = 0$ , atunci  $A = O_2$ .

b) Demonstrați că, dacă  $A, B \in G$  și  $A \cdot B = O_2$ , atunci  $A = O_2$  sau  $B = O_2$ .

**6.** Calculați determinanții:  $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ ,  $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix}$  și  $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ .

**7.** Se consideră matricea  $A = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . Arătați că:

$\det(A) = (a - b)(a - 1)$  și calculați  $\det(A - A^t)$ .

### 3.7. Șiruri

1. Studiați monotonia șirului  $(x_n)_{n \geq 1}$  dacă:

a)  $x_n = \frac{n+1}{n}$ ;

b)  $x_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ ;

c)  $x_n = \frac{2^n}{n!}$ ;

d)  $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$ .

2. Studiați mărginirea șirului  $(x_n)_{n \geq 1}$  al cărui termen general este:

a)  $x_n = 1 + (-1)^n$ ;

b)  $x_n = \frac{2^n + 3^n}{5^n}$ ;

c)  $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ;

d)  $x_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ .

3. Arătați că următoarele șiruri sunt divergente:

a)  $a_n = \frac{(-1)^n \cdot n}{n+2}$ ;

b)  $b_n = \sin \frac{n\pi}{2}$ ;

c)  $c_n = n^2 - n$ ;

d)  $d_n = 2^n - 3^n$ .

4. Calculați limita fiecăruia dintre următoarele șiruri, având termenul general:

a)  $a_n = \frac{7n+3}{8n-2}$ ;

b)  $b_n = \frac{n^2 - n + 2}{n+3}$ ;

c)  $c_n = \frac{n^2 + 1}{(n+1)^3}$ ;

d)  $d_n = \frac{(n-1)^2 - (n+1)^2}{2n+1}$ ;

e)  $e_n = \frac{1+2+\dots+n}{n^2+2}$ ;

f)  $f_n = \left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^3$ .

5. Calculați limita șirului cu termenul general  $a_n$  în fiecare dintre următoarele situații:

a)  $a_n = \frac{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}}{n}$ ;

b)  $a_n = \frac{3\sqrt{n} + 5}{2\sqrt{n} + 7}$ ;

c)  $a_n = \frac{\sqrt{n+2}}{1 + \sqrt[3]{n+1}}$ ;

d)  $a_n = \sqrt{n^2+1} - 2n$ ;

e)  $a_n = \sqrt{3n+1} - \sqrt{2n+3}$ ;

f)  $a_n = \sqrt{n^2+1} - n\sqrt{n}$ .

6. Calculați limita fiecăruia dintre următoarele șiruri având termenul general:

a)  $a_n = \frac{\ln n + 3}{\ln n - 2}$ ;

b)  $b_n = \ln(n+1) - \ln n$ ;

c)  $c_n = \frac{\ln(e^n + 1)}{n+1}$ ;

d)  $d_n = \frac{\ln(4^n + 1)}{\ln(2^n + 3)}$ ;

e)  $l_n = \frac{1 + \ln n^2}{2 + \ln n^3}$ ;

f)  $f_n = n - \ln n$ .

### 3.16. Reprezentarea grafică a funcțiilor

1. Determinați coordonatele punctelor de intersecție a graficului funcției  $f$  cu axele de coordonate, dacă:
  - a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 4x$ ;
  - b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{e^x + 1}$ .
2. Se consideră funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 5, g: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{4}{x^2}$ . Determinați punctele de intersecție a graficelor celor două funcții și rezolvați inecuația  $g(x) \leq f(x)$ .
3. Reprezentați grafic funcțiile:
  - a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3 + 2x - x^2$ ;
  - b)  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^3 - 3x + 2$ .
4. Reprezentați grafic funcțiile:
  - a)  $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ ;
  - b)  $g: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \{\mathbb{R}\}, g(x) = \frac{x}{x-1}$ .
5. Reprezentați grafic funcțiile:
  - a)  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ ;
  - b)  $f: (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x\sqrt{x^2 - 1}$ .
6. Reprezentați grafic funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x+1)e^x$ . Determinați mulțimea valorilor reale ale lui  $m$  pentru care ecuația  $f(x) = m$  are două soluții reale.
7. Reprezentați grafic funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x^2 - 3)e^x$ . Determinați valorile reale ale lui  $m$ , știind că graficul funcției  $f$  intersectează dreapta de ecuație  $y = m$  ( $m \in \mathbb{R}$ ) în exact trei puncte.
8. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$ .
  - a) Reprezentați grafic funcția  $f$ .
  - b) Câte soluții reale are ecuația  $x - 2 = m\sqrt{x^2 + 1}$ , unde  $m \in \mathbb{R}$ ?
9. Reprezentați grafic funcția  $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = xe^{\frac{2}{x}}$ .
10. Reprezentați grafic funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln x}{x}$ .
11. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + m}{x^2}$ , unde  $m \in \mathbb{R}$ .
  - a) Determinați  $m$ , astfel încât funcția să admită un extrem local în  $x = 2$ .

# Clasa a XII-a

## 4.1. Legi de compoziție

1. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x \circ y = 2^{x+y}$ , oricare ar fi  $x, y \in \mathbb{R}$ .
  - a) Calculați  $1001 \circ (-1001)$ .
  - b) Rezolvați ecuația  $x \circ x^2 = 64$ .
  - c) Demonstrați că, dacă  $(x \circ y) \circ z = 2^{z+1}$ , atunci  $x = -y$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție „ $\circ$ ”, definită prin  $x \circ y = x + y + 11$ , oricare ar fi  $x, y \in \mathbb{R}$ .
  - a) Arătați că  $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ , oricare ar fi  $x, y, z \in \mathbb{R}$ .
  - b) Găsiți două elemente  $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$  pentru care  $a \circ b \in \mathbb{Z}$ .
  - c) Determinați cel mai mare număr natural  $n$ , pentru care  $1 \circ 2 \circ \dots \circ n < 1000$ .
3. Pe mulțimea numerelor reale definim operația  $x * y = x^2 - 4xy + 3y^2$ .
  - a) Calculați  $300 * 100$ .
  - b) Arătați că  $(x * x) * y \geq 0$ , oricare ar fi numerele reale  $x$  și  $y$ .
  - c) Demonstrați că există o infinitate de numere iraționale  $a$  pentru care numărul  $a * 1$  este natural.
4. Pe mulțimea numerelor reale definim operația  $x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$ , oricare ar fi  $x, y \in \mathbb{R}$ .
  - a) Arătați că  $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ , oricare ar fi  $x, y, z \in \mathbb{R}$ .
  - b) Calculați  $(-1000) \circ (-999) \circ \dots \circ 1000$ .
  - c) Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația  $x \circ x \circ x \circ x = 12$ .
5. Pe mulțimea numerelor reale definim operația „ $\circ$ ” prin  $x \circ y = xy + \sqrt{2}(x+y) + 2 - \sqrt{2}$ , oricare ar fi  $x, y \in \mathbb{R}$ .
  - a) Demonstrați că  $x \circ y = (x + \sqrt{2})(y + \sqrt{2}) - \sqrt{2}$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .

18. În  $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$  considerăm matricele  $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{2} & \hat{1} \end{pmatrix}$  și  $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$ .

- Calculați  $A^2$  și  $A^3$ .
- \* Determinați  $A^{2002}$  și  $A^{2003}$ .
- Demonstrați că  $A^n \neq I_2$ , oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}^*$ .

19. Fie mulțimea de matrice  $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_5 \right\}$ .

- Dați un exemplu de matrice nenulă din mulțimea  $A$  care are determinantul egal cu  $\hat{0}$ .

b) Arătați că există o matrice nenulă  $M \in A$ , astfel încât  $\begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ -\hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix} \cdot M = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$ .

c)\* Rezolvați ecuația  $X^2 = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ -\hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}$ .

20. Se consideră mulțimea  $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & a & \hat{0} \\ b & c & a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ .

- Determinați numărul de elemente din  $A$ .
- Arătați că, pentru orice  $X \in A$ ,  $X^2 = I_3$  sau  $X^2 = O_3$ .
- Determinați numărul matricelor  $X$  din  $A$  care au proprietatea că  $X^2 = O_3$ .

21. În mulțimea  $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5)$  se consideră submulțimea  $G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ \hat{2}y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z}_5 \right\}$ .

- \* Arătați că, dacă  $x, y \in \mathbb{Z}_5$  și  $x^2 - \hat{2}y^2 = \hat{0}$ , atunci  $x = y = \hat{0}$ .
- Dacă  $A, B \in G$ , atunci  $A + B \in G$  și  $A \cdot B \in G$ .
- Dați exemplu de structură de corp cu 25 de elemente.

## 4.4. Polinoame

- Determinați polinomul  $f$  de gradul trei, cu coeficienți reali, pentru care  $f(1+i) = -1 + 2i$  și  $f(i) = 1 - i$ .
- Se consideră polinomul  $f = (X+1)^{10} + (X-1)^{10}$ , cu forma algebrică  $f = a_0 + a_1X + \dots + a_{10}X^{10}$ .
  - Determinați suma coeficienților polinomului  $f$ .

- b) Calculați  $f(i)$  și deduceți că  $a_0 + a_4 + a_8 = a_2 + a_6 + a_{10}$ .
- c) Determinați coeficienții polinomului  $f$ .
- 3.** Determinați gradele polinoamelor  $f + g$  și  $fg$  în fiecare dintre cazurile:
- a)  $f = X^3 + X + 1, g = -X^3 - X - 1, f, g \in \mathbb{R}[X]$ ;
- b)  $f = \hat{2}X^2 + \hat{3}X + \hat{1}, g = \hat{2}X^2 + X + \hat{2}, f, g \in \mathbb{Z}_4[X]$ .
- 4\*** Determinați polinoamele  $f, g \in \mathbb{Z}[X]$  cu  $\text{grad}(f) = 1, \text{grad}(g) = 2$ , în fiecare din următoarele cazuri:
- a)  $f \cdot g = X^3 - X^2 - 5X + 2$ ;                      b)  $g(f(X)) = X^2$ .
- 5\*** Arătați că polinomul  $f \in \mathbb{C}[X]$  este element inversabil în inelul  $(\mathbb{C}[X], +, \cdot)$  dacă și numai dacă  $f$  este constantă nenulă.
- 6.** Se consideră polinomul  $f = \hat{4}X + \hat{1} \in \mathbb{Z}_8[X]$ . Calculați  $f^2$  și deduceți că polinomul  $f$  este element inversabil al lui  $(\mathbb{Z}_8[X], +, \cdot)$ .
- 7.** Determinați câtul și restul împărțirii polinomului  $f$  prin polinomul  $g$  în fiecare dintre următoarele cazuri:
- a)  $f = X^5 + 2X^3 - 3X + 2, g = X^2 + X + 1, f, g \in \mathbb{R}[X]$ ;
- b)  $f = 2X^4 - 2X^3 - 5X^2 - X, g = 2X^2 + 1, f, g \in \mathbb{R}[X]$ ;
- c)  $f = X^3 + X^2 + \hat{2}X + \hat{1}, g = \hat{3}X^2 + \hat{1}, f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$ ;
- d)  $f = X^5 - 2X^3 + X - 3, g = X^2 - 2, f, g \in \mathbb{Z}[X]$ ;
- e)  $f = X^4 - (2 + i)X^2 + X - i, g = X + i, f, g \in \mathbb{C}[X]$ ;
- f)  $f = X^3 + X^2 + X + \hat{2}, g = X + \hat{1}, f, g \in \mathbb{Z}_3[X]$ .
- 8.** Determinați numerele reale  $a$  și  $b$ , știind că polinomul  $f = X^3 + aX + b$  dă restul 2 la împărțirea prin  $X - 1$  și restul  $-4$  la împărțirea prin  $X + 1$ .
- 9.** Împărțind polinomul  $f$  prin  $X - 1$  obținem restul 2, iar la împărțirea prin  $X + 1$  obținem restul  $-4$ . Aflați restul împărțirii lui  $f$  prin  $X^2 - 1$ .
- 10.** Se consideră polinomul  $f = (1 + X + X^2)^{1004}$ , cu forma algebrică:  
 $f = a_0 + a_1X + \dots + a_{2008}X^{2008}$ .
- a) Calculați  $f(-1)$ .
- b) Arătați că  $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2008}$  este număr întreg impar.
- c) Determinați restul împărțirii polinomului  $f$  la  $X^2 - 1$ .
- 11.** Determinați polinomul  $f = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d$  care prin împărțire la  $X^2 - 3X + 1$ , dă restul  $2X + 1$ , iar prin împărțire la  $X^2 - 1$  dă restul  $-2X + 2$ .

## 4.9. Proprietăți ale integralei Riemann

1. Demonstrați că:

$$\text{a) } -1 \leq \int_0^1 \sin(x^2 + x + 1) dx \leq 1; \quad \text{b) } 1 \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e.$$

2. Demonstrați că:

$$\text{a) } 1 \leq \int_1^2 \sqrt{x^2 - x + 1} dx \leq \sqrt{3}; \quad \text{b) } \frac{\sqrt{3}}{2} \leq \int_0^1 \sqrt{x^2 - x + 1} dx \leq 1.$$

3. Fie  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{x+1}$ . Arătați că  $1 \leq \int_0^1 f(x) dx \leq e - 1$ .

4. Pentru fiecare  $n \in \mathbb{N}$  se consideră  $I_n = \int_e^{e^2} \frac{\ln^n x}{x} dx$ . Folosind faptul că  $1 \leq \ln x \leq 2$ , oricare ar fi  $x \in [e, e^2]$ , demonstrați că  $1 \leq \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} \leq 2^n$ , oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}$ .

5. Se consideră funcția  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x+1}$ . Arătați că, dacă  $a > 0$ , atunci

$$\frac{1}{a+2} \leq \int_a^{a+1} f(x) dx \leq \frac{1}{a+1}.$$

6. Fie funcția  $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$ . Arătați că  $\int_1^x f(t) dt \leq \frac{x-1}{6}$ , oricare ar fi  $x \in [1, +\infty)$ .

7. a) Arătați că  $2^x - x \ln 2 - 1 \geq 0$ , oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\text{b) Arătați că } \int_0^1 2^{x^2} dx \geq 1 + \frac{\ln 2}{3}.$$

8. a) Arătați că  $e^x \geq x + 1$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\text{b)* Arătați că } \frac{1}{e} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq \frac{\pi}{4}.$$

9\*. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$ . Stabiliți semnul funcției,

$$\text{apoi demonstrați că } \int_0^1 \cos x^2 dx \geq \frac{9}{10}.$$

# Teste pentru Bacalaureat, după modelul M.E.

## Testul 1

### Subiectul I

(30 de puncte)

- (5p) 1. Calculați  $\lceil \sqrt{2022} \rceil - 4 \cdot \left\{ -\frac{1}{4} \right\}$  ( $\lceil x \rceil =$  partea întreagă a numărului real  $x$ ,  $\{x\} =$  partea fracționară a numărului real  $x$ ).
- (5p) 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{2}{1+2^x}$ . Calculați  $S = f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1) + f(2)$ .
- (5p) 3. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația  $2x - \sqrt{x-1} = 3$ .
- (5p) 4. Determinați numărul elementelor mulțimii  $A$ , știind că are exact 11 submulțimi cu cel mult două elemente.
- (5p) 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră dreapta  $d$  de ecuație  $3x + y - 1 = 0$ . Arătați că punctele  $A(2, 5)$  și  $B(-4, 3)$  sunt simetrice față de dreapta  $d$ .
- (5p) 6. Arătați că  $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = 2$ .

### Subiectul al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea  $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$ , unde  $a$  este un număr real.

- (5p) a) Verificați că  $\det(A(a)) = a + 5$ .
- (5p) b) Determinați  $a \in \mathbb{R}$ , astfel încât inversa matricei  $A(a)$  să fie matricea  $B = \begin{pmatrix} -12 & -7 & 3 \\ -5 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ .
- (5p) c) Determinați matricea  $X \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ , știind că  $X \cdot A(-4) = C$ , unde  $C$  este matricea  $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .



**2.** Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea de compoziție  $z_1 * z_2 = z_1 + z_2 + \frac{z_1 + z_2}{2}$ , pentru orice  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ .

- (5p) a) Verificați dacă  $(1 + i) * (1 - i) = 3$ .  
 (5p) b) Demonstrați că mulțimea  $M = \{x + i \mid x \in \mathbb{R}\}$  este parte stabilă a lui  $\mathbb{C}$  față de legea „\*“.  
 (5p) c) Arătați că pentru o infinitate de numere complexe  $z$ ,  $(-2 + 3i) * z$  este număr real.

**Subiectul al III-lea**

**(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x - x$ .

- (5p) a) Calculați  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f(x+1)}$ .  
 (5p) b) Arătați că  $f$  are un singur punct de extrem.  
 (5p) c) Demonstrați că dreapta  $y = (e - 1)x$  este tangentă graficului funcției  $f$ .

**2.** Se consideră funcția  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - \frac{\ln x}{x}$ .

- (5p) a) Verificați că  $\int_1^2 \left( f(x) + \frac{\ln x}{x} \right) dx = \frac{7}{3}$ .  
 (5p) b) Determinați  $a \in (1, \infty)$ , știind că  $\int_1^a (x^2 - f(x)) dx = \frac{1}{2}$ .  
 (5p) c) Demonstrați că orice primitivă a funcției  $f$  pe  $(0, 1)$  este strict monotonă.

**Testul 2**

**Subiectul I**

**(30 de puncte)**

- (5p) **1.** Arătați că numerele  $\log_3 8, \sqrt{6}, \log_{\sqrt{2}} 3$  sunt în progresie geometrică.  
 (5p) **2.** Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 3x + 2$ . Determinați semnul produsului  $P = f(\sqrt{2}) \cdot f(\sqrt{3}) \cdot f(\sqrt{5})$ .  
 (5p) **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $2^{2x+1} - 2^x = \sqrt{2}(2^{x+1} - 1)$ .  
 (5p) **4.** Determinați valorile întregi ale lui  $x$  pentru care  $C_7^{x-1} \geq 2C_7^x$ .  
 (5p) **5.** În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(2, 4), B(8, 1)$  și  $C(0, 1)$ . Arătați că punctul  $H(2, 5)$  este ortocentrul triunghiului  $ABC$ .  
 (5p) **6.** Determinați  $x \in (0, \pi)$ , știind că  $\sin x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \cos x \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ .

**Subiectul al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră sistemul 
$$\begin{cases} ax - y - z = -4 \\ 2x + ay + 4z = 25, a \in \mathbb{R} \text{ și } A \text{ matricea sistemului.} \\ x + y + 3z = 18 \end{cases}$$

(5p) a) Arătați că  $\det A = 3a^2 - 3a$ .

(5p) b) Determinați  $a \in \mathbb{R}$ , dacă sistemul are soluție unică.

(5p) c) Pentru  $a = 1$  determinați numărul soluțiilor  $(x_0, y_0, z_0)$  ale sistemului cu  $x_0, y_0, z_0$  numere naturale.

2. Pe  $\mathbb{R}$  se definește legea  $x * y = 2x + 2y - \frac{xy}{2} - 4$ , pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ .

(5p) a) Arătați că  $x * y = 4 - \frac{1}{2}(x-4)(y-4)$ , pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ .

(5p) b) Arătați că  $e = 2$  este elementul neutru al legii date.

(5p) c) Stabiliți dacă  $(\mathbb{R}, *)$  are o structură de grup.

**Subiectul al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1 - \ln(x + 1)$ .

(5p) a) Calculați  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x}$ .

(5p) b) Demonstrați că oricare două tangente la graficul funcției sunt secante.

(5p) c) Arătați că graficul funcției  $f$  nu intersectează axa  $Ox$ .

2. Se consideră funcția  $f: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{x+1}$ .

(5p) a) Arătați că  $\int_0^1 \frac{xe^x}{f(x)} dx = \frac{5}{6}$ .

(5p) b) Calculați  $\int_1^2 \left( f(x) - \frac{e^x}{(x+1)^2} \right) dx$ .

(5p) c) Demonstrați că  $\int_1^3 f(x) dx \geq e \ln 2$ .

## Testul 9

### Subiectul I

(30 de puncte)

- (5p) 1. Se consideră numărul complex  $z = \frac{1-i}{1+i}$ . Arătați că  $z^{12}$  este număr real.
- (5p) 2. Aflați numărul real  $m$  pentru care graficul funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + mx + 4$  intersectează axa  $Ox$  în două puncte distincte.
- (5p) 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\lg^2 x - 3\lg x + 2 = 0$ .
- (5p) 4. Fie  $x$  un număr real nenul. Determinați rangul termenului, din dezvoltarea binomului  $\left(x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{16}$ , care îl conține pe  $x^4$ .
- (5p) 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră vectorii  $\overline{AB} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$  și  $\overline{BC} = \vec{i} - \vec{j}$ . Determinați numărul real  $m$ , știind că  $\overline{AC} = (m+1)\vec{i} + (m-2)\vec{j}$ .
- (5p) 6. Arătați că  $\sin \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4}$ .

### Subiectul al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea  $A(m, n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m^2 \\ 1 & n & n^2 \end{pmatrix}$  și sistemul de ecuații

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + my + m^2z = m^3, \text{ unde } m \text{ și } n \text{ sunt numere reale.} \\ x + ny + n^2z = n^3 \end{cases}$$

- (5p) a) Arătați că  $\det(A(m, n)) = (m-1)(n-1)(n-m)$ .
- (5p) b) Rezolvați sistemul, dacă  $m \neq 1, n \neq 1$  și  $m \neq n$ .
- (5p) c)\* Demonstrați că, dacă sistemul are soluția  $(-1, 1, 1)$ , atunci cel puțin două dintre numerele  $1, m, n$  sunt egale.
2. Fie  $x_1, x_2, x_3$  rădăcinile complexe ale polinomului  $f = X^3 - 3X^2 + mX + n$ , unde  $m$  și  $n$  sunt numere reale.
- (5p) a) Arătați că  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9 - 2m$ .
- (5p) b) Determinați  $m$  și  $n$ , știind că  $x_1 = x_2 = x_3$ .
- (5p) c) Pentru  $m = 1$  și  $n = -3$ , descompuneți polinomul  $f$  în factori ireductibili în  $\mathbb{C}[X]$ .

**Subiectul al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x^2 + 2x + m)e^x$ , unde  $m$  este un parametru real.
- (5p) a) Determinați  $m$ , știind că  $f'(0) = 4$ .
- (5p) b) Demonstrați că, pentru  $m = 2$ , funcția  $f$  este strict crescătoare.
- (5p) c) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre  $-\infty$  la graficul funcției  $f$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{1+x^2}$  și numărul  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{f(x)} dx$ , unde  $n$  este un număr natural nenul.
- (5p) a) Calculați  $\int_0^1 2xf(x)dx$ .
- (5p) b) Calculați  $\int_0^1 f(x) \cdot f'(x) dx$ .
- (5p) c) Demonstrați că  $nI_n = \sqrt{2} - (n-1)I_{n-2}$ , pentru orice număr natural  $n$ ,  $n \geq 3$ .

**Testul 10**

**Subiectul I**

**(30 de puncte)**

- (5p) 1. Arătați că numărul  $a = \log_7 1001 - \log_7 143 + \sqrt[3]{27}$  este pătratul unui număr natural.
- (5p) 2. Dacă  $g$  este inversa funcției de gradul întâi  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x - 1$ , calculați  $g(21)$ .
- (5p) 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $|2x - 1| = |x + 7|$ .
- (5p) 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr oarecare de trei cifre, produsul cifrelor acestuia să fie număr impar.
- (5p) 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră vectorii  $\vec{u} = 6\vec{i} - \vec{j}$  și  $\vec{v} = 8\vec{i} + 48\vec{j}$ . Determinați măsura, în radiani, a unghiului format de vectorii  $\vec{u}$  și  $\vec{v}$ .
- (5p) 6. Demonstrați că, dacă  $\operatorname{ctg} x = 2$ ,  $\operatorname{ctg} y = 3$  și  $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , atunci  $x + y = \frac{\pi}{4}$ .

## Testul 28

### Subiectul I (30 de puncte)

- (5p) 1. Fie  $(a_n)_{n \geq 1}$ , o progresie aritmetică astfel încât  $a_3 = 3$  și  $a_7 = 15$ . Calculați  $a_1 + a_9$ .
- (5p) 2. Determinați numărul real  $m$  pentru care punctul  $A(m, 2)$  aparține graficului funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2x + 3$ .
- (5p) 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{5-x} = 3x - 1$ .
- (5p) 4. Într-o clasă sunt 12 elevi, dintre care 5 sunt fete. Aflați în câte moduri se poate alege un comitet reprezentativ al clasei format din 3 fete și 2 băieți.
- (5p) 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(1, 2)$ ,  $B(5, 6)$  și  $C(-1, 1)$ . Determinați ecuația înălțimii duse din vârful  $C$  în triunghiul  $ABC$ .
- (5p) 6. Calculați  $\cos 70^\circ + \cos 110^\circ$ .

### Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea  $A(m) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$  și sistemul

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + 2y - z = 3 \\ mx + y + z = 4m + 1 \end{cases}, m \in \mathbb{R}.$$

- (5p) a) Arătați că  $\det A(m) = 5 - m$ .
- (5p) b) Arătați că pentru  $m = 5$  sistemul nu are soluție.
- (5p) c) Determinați numerele naturale  $m$ , știind că sistemul are o soluție  $(x_0, y_0, z_0)$  formată din numere naturale.
2. Pe mulțimea numerelor reale definim legea  $x * y = 6x + 6y - 2xy - 15$ , pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ .

- (5p) a) Arătați că  $e = \frac{5}{2}$  este elementul neutru al legii date.

- (5p) b) Verificați că legea „\*” este asociativă.

- (5p) c) Rezolvați ecuația  $x * x * x = x, x \in \mathbb{R}$ .

### Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcțiile  $f, g: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - 1 - x \ln x$  și  $g(x) = \frac{\ln x}{x-1}$ .

- (5p) a) Arătați că  $f(x) < 0$ , pentru orice  $x \in (1, +\infty)$ .  
 (5p) b) Demonstrați că funcția  $g$  este strict descrescătoare.  
 (5p) c) Arătați că  $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}-1} > (\sqrt{3})^{\sqrt{2}-1}$ .

2. Pentru fiecare număr natural nenul  $n$  se consideră numărul  $I_n = \int_1^e \ln^n x dx$ .

- (5p) a) Calculați  $I_1$ .  
 (5p) b) Demonstrați că  $I_n = e - nI_{n-1}$ , pentru orice număr natural  $n \geq 2$ .  
 (5p) c) Arătați că  $I_3 = 6 - 2e$ .

## Testul 29

### Subiectul I

(30 de puncte)

- (5p) 1. Calculați suma primilor cinci termeni ai unei progresii geometrice  $(b_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $b_1 = 1$  și  $b_2 = -2$ .  
 (5p) 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - x$ . Calculați  $(f \circ f)(2)$ .  
 (5p) 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $2^{x+2} - 2^{x-1} = 28$ .  
 (5p) 4. Se dă dezvoltarea  $\left(2\sqrt{x} + \frac{3}{x}\right)^6, x > 0$ . Determinați termenul independent de  $x$ .  
 (5p) 5. Se consideră un triunghi  $ABC$  și punctul  $M$  astfel încât  $\overline{BM} = 2\overline{MC}$ . Determinați numerele reale  $x, y$ , știind că  $\overline{AM} = x\overline{AB} + y\overline{AC}$ .  
 (5p) 6. Fie  $a \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$  astfel încât  $\sin a = -\frac{4}{5}$ . Calculați  $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$ .

### Subiectul al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f_A: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), f_A(X) = AXA^{-1}$ , unde  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  și  $A$  este inversabilă.  
 (5p) a) Calculați  $f_A(I_2)$ .  
 (5p) b) Arătați că  $f_A$  este o funcție bijectivă.  
 (5p) c) Arătați că  $f_A(X \cdot Y) = f_A(X) \cdot f_A(Y)$ , pentru orice  $X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .  
 2. Se consideră polinomul  $f = X^4 - 3X^2 + 2X + 3 \in \mathbb{R}[X]$ , având rădăcinile complexe  $x_1, x_2, x_3, x_4$ .  
 (5p) a) Determinați restul împărțirii lui  $f$  prin polinomul  $X - 3$ .  
 (5p) b) Arătați că  $f$  nu are rădăcini raționale.  
 (5p) c) Arătați că  $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + 3\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}\right) = -8$ .

## Testul 41

### Subiectul I (30 de puncte)

- (5p) 1. Scrieți sub formă trigonometrică numărul complex  $z = -2i$ .
- (5p) 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = X^2 - 4X + 5$ . Comparați numerele  $f(\sqrt{2})$  și  $f(\sqrt{3})$ .
- (5p) 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_x(x+2) = 2$ .
- (5p) 4. Stabiliți câte numere naturale de trei cifre se pot forma folosind cifre din mulțimea  $\{0, 1, 2, 3\}$ .
- (5p) 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(2, 1)$  și  $B(-3, 2)$ . Determinați coordonatele simetricului punctului  $B$  față de punctul  $A$ .
- (5p) 6. În triunghiul  $ABC$  avem:  $AB = 6$ ,  $AC = 8$  și  $\sphericalangle BAC = 120^\circ$ . Calculați lungimea laturii  $BC$ .

### Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea  $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ m & -1 & 1 \\ x & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $A(x) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

- (5p) a) Dacă  $m = 2$ , arătați că  $\det A(x) = x^2 + 3x + 2$ .
- (5p) b) Dacă  $m = 2$ , demonstrați că există valori ale lui  $x \in \mathbb{R}$  pentru care matricea  $A(x)$  nu este inversabilă.
- (5p) c) Demonstrați că, oricare ar fi  $m \in \mathbb{R}$ , există valori ale lui  $x \in \mathbb{R}$  pentru care matricea  $A(x)$  nu este inversabilă.
2. Se consideră inelul  $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ .
- (5p) a) Arătați că elementele inversabile ale acestui inel sunt  $\hat{1}, \hat{3}, \hat{5}$  și  $\hat{7}$ .
- (5p) b) Dacă  $a \in \mathbb{Z}_8$  este element inversabil, arătați că ecuația  $\hat{2}x = a$  nu are soluții în  $\mathbb{Z}_8$ .
- (5p) c) Dacă  $b \in \mathbb{Z}_8$  este element neinvertabil, arătați că ecuația  $\hat{2}x = b$  are exact două soluții  $x \in \mathbb{Z}_8$ .

### Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x - x$ .

- (5p) a) Calculați  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- (5p) b) Determinați intervalele de monotonie ale funcției  $f$ .
- (5p) c) Demonstrați că  ${}^{100}\sqrt{e} > \frac{101}{100}$ .

2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ .

(5p) a) Calculați  $\int_0^1 f^2(x) dx$ .

(5p) b) Calculați  $\int_0^1 xf(x) dx$ .

(5p) c)\* Fie  $\Gamma$  suprafața cuprinsă între graficul funcției  $f$ , asimptota oblică spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f$  și dreptele cu ecuațiile  $x = 0$  și  $x = 1$ . Determinați aria suprafeței  $\Gamma$ .

## Testul 42

### Subiectul I

(30 de puncte)

(5p) 1. Arătați că numărul  $a = \log_3 2 - \log_9 4$  este întreg.

(5p) 2. Arătați că, pentru orice număr real  $m$ , parabola  $y = x^2 + mx - m^2 - 1$  intersectează axa  $Ox$  în două puncte.

(5p) 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $2^x + 2^{2-x} = 5$ .

(5p) 4. Aflați câte numere naturale de trei cifre au suma cifrelor egală cu 25.

(5p) 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctul  $A(1, 2)$  și dreapta  $d: y = x - 1$ . Calculați distanța de la punctul  $A$  la dreapta  $d$ .

(5p) 6. Triunghiul  $ABC$  are lungimile laturilor  $AB = 9, BC = 10$  și  $CA = 11$ . Calculați aria triunghiului.

### Subiectul al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea  $A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & 1-x \\ 0 & -1 & 0 \\ 1-x & 1 & x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}$ .

(5p) a) Arătați că  $\det A(2) = -3$ .

(5p) b) Determinați  $x \in \mathbb{R}$ , dacă  $A(x) \cdot A(1-x) = A(0) \cdot A(1)$ .

(5p) c) Determinați valorile întregi ale lui  $x$  pentru care  $A(x)$  este inversabilă și inversa are toate elementele numere întregi.

2. Se consideră polinomul  $f = 6X^4 - X^3 - X + 6 \in \mathbb{R}[X]$ .

(5p) a) Arătați că polinomul  $g = 3X^2 + 4X + 3$  divide polinomul  $f$ .

(5p) b) Demonstrați că polinomul  $f$  nu are rădăcini reale.

(5p) c) Arătați că toate rădăcinile polinomului  $f$  au modulele egale cu 1.



## Testul 58

### Subiectul I (30 de puncte)

- (5p) 1. Dacă  $z = -4 + i$ , calculați modulul numărului  $\bar{z} - 2z$ .
- (5p) 2. Determinați coordonatele punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2x + 2, g(x) = x + 2$ .
- (5p) 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-4} = \sqrt{8^x}$ .
- (5p) 4. Fie mulțimea  $A = \{0, 2, 4, 6, 7, 9\}$ . Câte submulțimi ale mulțimii  $A$  au trei elemente și conțin cel puțin un număr impar?
- (5p) 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(2, 4)$  și  $B(4, 2)$ . Calculați distanța de la punctul  $O$  la dreapta  $AB$ .
- (5p) 6. Demonstrați că  $\frac{1 + \sin 2x}{1 + \cos 2x} = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{tg} x)^2$ , pentru orice număr real  $x, x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .

### Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul 
$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 3x + y + mz = 0, \quad m \in \mathbb{R} \text{ și matricea } A = \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & m \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (5p) a) Arătați că  $\det(A) = -5m - 10$ .
- (5p) b) Determinați numărul real  $m$ , dacă sistemul are soluție unică.
- (5p) c) Pentru  $m = -2$ , determinați soluția  $(x_0, y_0, z_0)$  a sistemului, știind că  $x_0 + 2y_0 + 3z_0 = 20$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = xy - 2x + 3y$ .
- (5p) a) Arătați că legea  $*$  nu este asociativă.
- (5p) b) Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $(x + 1) * x = 1$ .
- (5p) c) Arătați că există numerele  $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$  astfel încât  $a * b \in \mathbb{N}$ .

**Subiectul al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ .

(5p) a) Calculați  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$ .

(5p) b) Determinați punctele de extrem local ale funcției  $f$ .

(5p) c) Comparați numerele  $a = f\left(\frac{11}{12}\right)$  și  $b = f\left(\frac{12}{13}\right)$ .

2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ .

(5p) a) Arătați că  $\int_1^2 \frac{1}{f^2(x)} dx = \frac{3}{2}$ .

(5p) b) Calculați aria cuprinsă între graficul funcției  $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(x)$  și axa  $Ox$ .

(5p) c) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei  $Ox$  a graficului funcției  $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(x)$ .

**Testul 59**

**Subiectul I**

**(30 de puncte)**

(5p) 1. Verificați dacă numărul  $a = \lg\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \lg\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \dots + \lg\left(1 - \frac{1}{10}\right)$  este întreg.

(5p) 2. Se consideră mulțimile  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + m = 0\}$  și  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + mx + 1 = 0\}$ . Determinați  $m \in \mathbb{R}$  dacă  $A \cap B = \{1\}$ .

(5p) 3. Fie  $ABC$  un triunghi dreptunghic în  $A$ , cu  $AB = 4$  și  $\sphericalangle C = 30^\circ$ . Dacă  $M$  este mijlocul laturii  $BC$ , calculați  $\overline{AM} \cdot \overline{AB}$ .

(5p) 4. Notăm cu  $F$  mulțimea funcțiilor  $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ . Determinați probabilitatea ca alegând o funcție  $f$  din  $F$  aceasta să fie injectivă.

(5p) 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctul  $A(2, -3)$  și dreapta  $d$  de ecuație  $2x - 3y + 4 = 0$ . Determinați ecuația perpendicularei din  $A$  pe dreapta  $d$ .

(5p) 6. Dacă  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  și  $\text{ctg } x - \text{tg } x = 2$ , calculați  $\text{tg } 2x$ .

# Soluții

## Clasa a IX-a

### 1.1. Mulțimi și elemente de logică matematică

1.  $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ . 2.  $b < d < a < c$ . 3.  $a = 6 \in \mathbb{N}$ . 4.  $b = 2 \in \mathbb{N}$ . 5.  $a = \sqrt{2}$ ,  $b = 18\sqrt{2}$ ,  $m_a = \frac{19\sqrt{2}}{2}$ ,  $m_g = 6$ . 6.  $a = 8$ ,  $b = -4$ . 7.  $\sqrt{x+49} \in [7, 10]$ ,  $\sqrt{x+625} \in [25, 26] \Rightarrow a \in [32, 36]$ ,  $\forall x \in [0, 51]$ . 8.  $E(x, y) = \sqrt{(x-1)^2 + 4} + \sqrt{(y+3)^2 + 1} \geq \sqrt{4} + \sqrt{1} = 3$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ . 9. 186. 10. a) -2; b) 0; c) 5; d) 1. 11. a)  $x \in \{-3, 7\}$ ; b)  $x \in \{-3, 5\}$ ; c)  $x \in \{-1, 5\}$ ; d)  $x = -1$ . 12. a)  $x \in [-1, 2]$ ; b)  $x \in (-\infty, -7] \cup [1, +\infty)$ . 13. 100. 14.  $E(x) = 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . 15.  $|2x - 3| + 2|x - 1| = |2x - 3| + |2x - 2| = |2x - 3| + |2 - 2x| \geq |2x - 3 + 2 - 2x| = 1$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . 16.  $x^2 + 3x + 3 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . 17. b)  $E(x) = (x^2 + 1) \left( \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right) > \frac{3}{4}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . 18.  $xy - 2x - 2y + 6 = (x - 2)(y - 2) + 2 \in [2, +\infty)$ ,  $\forall x, y \in [2, +\infty)$ . 21. Fie  $P(n) = 13^n + 7^n - 2 \div 6$ , unde  $n \in \mathbb{N}$ . Pentru  $n = 0$  avem  $13^0 + 7^0 - 2 \div 6$ , deci  $P(0)$  este adevărată. Presupunem că  $P(k)$  este adevărată pentru un număr natural  $k$ ; atunci  $13^k + 7^k - 2 = 6p$ , cu  $p \in \mathbb{N}$ . Rezultă că  $13^{k+1} + 7^{k+1} - 2 = 13 \cdot 13^k + 7^{k+1} - 2 = 13(6p + 2 - 7^k) + 7 \cdot 7^k - 2 = 6 \cdot 13p - 6 \cdot 7^k + 24 = 6(13p - 7^k + 4) \div 6$ , deci  $P(k + 1)$  este adevărată, drept urmare,  $P(n)$  este adevărată pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ . 22. 6. 23. 192. 24. 60. 25. 243. 26. 171. 27. 16. 28. a) 8; b) 25; c) 50.

### 1.2. Progresii

1.  $a_1 = 5$ . 2.  $a_1 = -1$ . 3. Fie  $r$  rația progresiei; atunci  $a_1 + 2r = 5$  și  $a_1 + 4r = 9$ . Rezultă  $a_1 = 1$  și  $r = 2$ . Prin urmare,  $S_7 = \frac{(a_1 + a_7) \cdot 7}{2} = 49$ . 4. 2007 este al 402-lea termen al progresiei. 5.  $x = 6$ . 6. Este suma primilor 11 termeni ai unei progresii aritmetice cu primul termen 1 și rația 3; avem că  $S_{11} = \frac{(1+31) \cdot 11}{2} = 176$ . 7. Termenii sumei formează o progresie aritmetică în care  $a_1 = 1$ ,  $r = 4$ . Dacă notăm cu  $m$  numărul de termeni, atunci  $n = a_m = a_1 + r(m - 1)$ , deci  $n = 4m - 3$ . Astfel,  $231 = S_m = \frac{m(4m - 2)}{2} = 2m^2 - m$  și cum  $m \in \mathbb{N}^*$ , obținem că  $m = 11$ , apoi  $n = 41$ . 8.  $a_{n+1} - a_n = 3$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , deci  $(a_n)$  este progresie aritmetică de rație  $r = 3$  și  $a_1 = 1$ . Apoi

**29.** Cum  $\sin B = 1$ , rezultă că  $\sphericalangle B = 90^\circ$ . Avem că  $\sin A = \frac{BC}{AC}$ , deci  $AC = 8$ . Aria triunghiului  $ABC$  este egală cu  $8\sqrt{3}$ . **30.**  $S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin \sphericalangle BAD = 24\sqrt{2}$ . **31.** a) Cum  $A + B = \pi - C$ , rezultă că  $\frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{1 - \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B} = -\operatorname{tg} C$ , deci  $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C$ ; b)  $\operatorname{tg}(A + B) = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{1 - \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B} = -1$ , deci  $A + B = 135^\circ$ . Rezultă că  $\operatorname{tg} C = 1$ . Altfel: Folosind relația de la a), obținem că  $\operatorname{tg} C = 1$ , deci  $C = 45^\circ$ .

## Clasa a X-a

### 2.1. Radicali și logaritmi

**1.** b) Observăm că  $\sqrt{11-6\sqrt{2}} = 3-\sqrt{2}$  și  $\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$ ; c) Se ridică la pătrat în ambii membri. **2.** Avem:  $\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{6}} + \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\right) = 1 \in \mathbb{Q}$ . **3.**  $a = 2$ . **4.** Se arată că  $-4 < \sqrt{2} - 3\sqrt{3} < -3$ , deci  $\lceil \sqrt{2} - 3\sqrt{3} \rceil = -4$ . **5.** a) 0; b) 6; c) 1; d) 27. **6.** a)  $E = \frac{x}{y}$ ; b)  $a = \frac{2}{3}$ . **7.** Cum  $E(x) = x^{\frac{11}{6}}$  și  $a = 2^{\frac{3}{11}}$ , rezultă  $E(a) = \sqrt{2}$ . **8.** a)  $a = \sqrt[16]{2^{15}}$ , deci  $a \cdot b = 2$ ; b)  $a = 2$ . **9.**  $k = 2$ . **10.** a) Aducând radicalii la ordin comun rezultă  $\sqrt{2} < \sqrt[4]{5} < \sqrt[3]{4}$ ; b)  $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} < \sqrt[3]{4} < \sqrt[4]{27\sqrt{3}}$ . **11.** a) Avem:  $a^2 = 9 + 2\sqrt{14}$  și  $b^2 = 9 + 2\sqrt{18}$ , deci  $a < b$ ; b) Cum  $a = \frac{1}{\sqrt{13} + \sqrt{12}}$  și  $b = \frac{1}{\sqrt{12} + \sqrt{11}}$ , rezultă  $a < b$ . **12.** Aducem la același ordin, deci  $a > b$ . **13.** a)  $\frac{7}{2}$ ; b)  $-3$ ; c)  $\frac{7}{3}$ ; d)  $\frac{13}{6}$ ; e)  $\frac{1}{2}$ . **14.**  $c < a < b$ . **15.** a)  $a = 1$ ; b)  $b = -1$ . **16.** a) 2; b)  $-24$ ; c) 3; d) 1. **17.** a) 3; b) 2. **18.** a) 2; b) 0; c) 0. **19.** a)  $a = \frac{1}{2}$ ; b) Fie  $\log_2 3 = x$ ; atunci  $a = (3+x) \cdot (5+x) - (6+x)(2+x) = 3 \in \mathbb{Q}$ ; c)  $-3$ . **20.**  $a = 3$ . **21.** a)  $\log_3 5$ ; b) 2; c)  $\log_{0,3} 2$ ; d)  $-1$ ; e)  $\log_3 5$ . **22.** a) Cum  $1 < 2 < 3$ , rezultă  $0 < \log_3 2 < 1$ ; b) Cum  $3 < 4 < \sqrt{27}$ , rezultă  $1 < \log_3 4 < \frac{3}{2}$ ; c) Se arată că  $\log_3 4 < \frac{3}{2} < \log_4 9$ , deci  $\log_3 4 < \log_4 9$ . **23.** a) Inegalitatea este echivalentă cu  $2\sqrt{2} < 3 < 4$ ; b) Folosind a), avem  $a > 2$  și  $a < 2 + \frac{2}{3}$ , deci  $[a] = 2$ . **24.**  $\log_{12} 18 = \frac{2 + \log_3 2}{1 + 2 \log_3 2} = \frac{2+a}{1+2a}$ . **25.** Din  $\log_{40} 100 = a$

## Clasa a XII-a

## 4.1. Legi de compoziție

1. a) 1; b) Ecuația este  $2^{x+x^2} = 2^6$ , adică  $x^2 + x - 6 = 0$  și de aici  $x = 2$  sau  $x = -3$ ; c) Avem că  $(x \circ y) \circ z = 2^{2^{x+y+z}}$ ; din  $2^{2^{x+y+z}} = 2^{z+1}$ , rezultă că  $2^{x+y} = 1$ , deci  $x + y = 0$ . 2. b)  $a = \frac{1}{4}$ ,  $b = \frac{3}{4}$ ;

c) Prin inducție,  $x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n + (n-1) \cdot 11$ ,  $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  și  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . Rezultă că  $1 \circ 2 \circ \dots \circ n = \frac{n(n+1)}{2} + 11(n-1) < 1000$ . Cum  $n$  este maxim, atunci  $n = 34$ .

3. a) 0; b) Cum  $x * x = 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , rezultă că  $(x * x) * y = 3y^2 \geq 0$ ,  $\forall y \in \mathbb{R}$ ; c) Avem  $a * 1 = a^2 - 4a + 3 = (a-2)^2 - 1$ . Pentru orice  $n \in \mathbb{N}$  astfel încât  $n+1$  nu este pătrat perfect, luăm  $a = 2 + \sqrt{n+1}$ . Astfel, găsim o infinitate de valori ale lui  $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , pentru care  $a * 1 = n \in \mathbb{N}$ .

4. a) Folosind faptul că  $x \circ y = (x+4)(y+4) - 4$ , avem că  $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z = (x+4)(y+4)(z+4) - 4$ ,  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ ; b) Observăm că  $x \circ (-4) = (-4) \circ y = -4$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$  (numărul  $-4$  este element absorbant pentru operația „ $\circ$ ”). Atunci  $(-1000) \circ (-999) \circ \dots \circ 1000 = [(-1000) \circ \dots \circ (-5)] \circ (-4) \circ [(-3) \circ \dots \circ 1000] = x \circ (-4) \circ y = -4 \circ y = -4$ ; c) Ecuația se scrie sub forma  $(x+4)^4 - 4 = 12$ . Cum  $x \in \mathbb{R}$ , rezultă că  $(x+4)^2 = 4$ , cu soluțiile  $x_1 = -2$  sau  $x_2 = -6$ . 5. b) Dacă  $x, y \in I$ , atunci  $x + \sqrt{2} > 0$  și  $y + \sqrt{2} > 0$ , deci  $x \circ y > -\sqrt{2}$ , adică  $x \circ y \in I$ ;

c) Observăm că operația este asociativă. Atunci  $\left(-\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{1}}\right) \circ \left(-\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}}\right) \circ \dots \circ \left(-\frac{\sqrt{23}}{\sqrt{13}}\right) = \left[\left(-\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{1}}\right) \circ \dots \circ \left(-\frac{\sqrt{19}}{\sqrt{9}}\right)\right] \circ (-\sqrt{2}) \circ \left[\left(-\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{11}}\right) \circ \left(-\frac{\sqrt{22}}{\sqrt{12}}\right) \circ \left(-\frac{\sqrt{23}}{\sqrt{13}}\right)\right] = [a \circ (-\sqrt{2})] \circ b = (-\sqrt{2}) \circ b = -\sqrt{2}$ .

6. a)  $(x+i)(y+i) - i = xy + ix + iy - 1 - i = x \circ y$ ; b) Demonstrăm inductiv, folosind a); c) Ecuația este  $(x+i)^4 - i = 1 - i$ , deci  $(x+i)^4 = 1$ , de unde  $x+i \in \{-1, 1, i, -i\}$ , adică  $x \in \{-1-i, 1-i, 0, -2i\}$ . 7. a)  $x \circ y = (x-4)(y-4) = y \circ x$ ; b) De exemplu, observăm că  $2 \circ (3 \circ 4) = 8$ , însă  $(2 \circ 3) \circ 4 = 0$ ; c) Avem  $(m-4)(n-4) = 7$ , cu soluțiile  $(m, n) \in \{(5, 11); (11, 5); (3, -3); (-3, 3)\}$ .

8. a)  $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3}$ ,  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ ; b)  $e = 0$ ; c)  $x_1 = x_0 \sqrt[3]{2}$ ,  $x_2 = x_0 \sqrt[3]{3}$ ,  $x_3 = x_0 \sqrt[3]{4} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . 9. b)  $e = \frac{7}{2}$ ; c) Se demonstrează prin inducție matematică.

10. a) Pentru orice  $x, y \in (-\infty, 0)$ , avem că  $x * y \in (-\infty, 0)$ , deci  $*$  este lege de compoziție pe  $G$ ;

c) Fie  $e \in G$  un eventual element neutru; atunci  $\frac{xe}{x+e} = x$ ,  $\forall x \in G$ , sau încă  $xe = x^2 + xe$ ,

$\forall x \in G$ , fals. Rezultă că legea nu are element neutru. 11. a) Observăm că  $x \circ y = e^{3 \ln x \ln y} > 0$ ,

## Teste pentru Bacalaureat, după modelul M.E.

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

### Testul 1

- I. 1.** 41. **2.** 5. **3.**  $x = 2$ . **4.** 4 elemente. **5.**  $AB \perp d$  și mijlocul  $M(-1, 4) \in d$ . **6.**  $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \frac{\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8}}{\sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8}} = \frac{2 \cos \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{4}} = 2$ . **II. 1.** b)  $A^{-1}(a) = B \Leftrightarrow A(a) \cdot B = I_3$ . Rezultă  $a = -4$ ;
- c)  $X = C(A(-4))^{-1} = CB = \begin{pmatrix} 16 & 9 & -4 \end{pmatrix}$ . **2.** b) Dacă  $x + i$  și  $y + i \in M$ , atunci  $(x + i) * (y + i) = \frac{3(x+y)}{2} + i \in M$ ; c)  $z = a - 3i$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . **III. 1.** a)  $\frac{1}{e}$ ; b)  $A(0, 1)$  este punct de minim;
- c) Dreapta este tangentă graficului funcției  $f$  în punctul  $M(1, e - 1)$ . **2.** b)  $\int_1^a (x^2 - f(x)) dx = \int_1^a \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} \ln^2 a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = e$ ; c) Fie  $F$  o primitivă a lui  $f$  pe  $(0, 1)$ . Cum  $F'(x) = f(x) > 0$  (deoarece  $\ln x < 0$ ), rezultă că  $F$  este strict crescătoare pe  $(0, 1)$ .

### Testul 2

- I. 1.**  $\log_3 8 \cdot \log_{\sqrt{2}} 3 = 3 \log_3 2 \cdot 2 \log_2 3 = 6 = (\sqrt{6})^2$ . **2.**  $f(\sqrt{2}) < 0$ ;  $f(\sqrt{3}) < 0$ ;  $f(\sqrt{5}) > 0$ .
- 3.**  $x = -1$  și  $x = \frac{1}{2}$ . **4.**  $x \in \{6, 7\}$ . **5.**  $BH \perp AC$  și  $CH \perp AB$ . **6.**  $x = \frac{\pi}{3}$ . **II. 1.** b)  $\det A \neq 0 \Rightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ ; c) Pentru  $a = 1$  sistemul este compatibil simplu nedeterminat cu soluțiile  $(7 - \alpha, 11 - 2\alpha, \alpha)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Obținem soluții formate din numere naturale pentru  $\alpha \in \{0, 1, 2, \dots, 5\}$ , deci 6 soluții. **2.** c) Se verifică ușor că „\*” este asociativă, are element neutru  $e = 2$  și orice  $x \neq 4$  este inversabil. Rezultă că  $(\mathbb{R}, *)$  nu este grup. **III. 1.** a) 1; b) Fie că în  $A(a, f(a))$  și  $B(b, f(b))$  tangentele nu sunt secante, deci sunt paralele. Rezultă  $f'(a) = f'(b) \Rightarrow a = b$ , fals;
- c) Folosind șirul lui Rolle, ecuația  $f(x) = 0$  nu are soluții. **2.** b)  $\int_1^2 \left( f(x) - \frac{e^x}{(x+1)^2} \right) dx = \int_1^2 \left( \frac{e^x}{x+1} - \frac{e^x}{(x+1)^2} \right) dx = \int_1^2 \left( e^x \cdot \frac{1}{x+1} \right)' dx = \frac{e^x}{x+1} \Big|_1^2 = \frac{2e^2 - 3e}{6}$ ; c) Pentru  $x \in [1, 3]$ ,  $e^x \geq e$ , deci  $\int_1^3 f(x) dx \geq \int_1^3 \frac{e}{x+1} dx = e \ln(x+1) \Big|_1^3 = e \ln 2$ .

dacă  $f'(x_0) = 0$ , deci  $x_0 \in \{-1, 1\}$ . Ecuațiile tangentelor căutate sunt  $y = 3$  și  $y = -1$ . **2.** a)  $I_1 = \frac{1}{4}$ ; b)  $I_n - I_{n+1} = \int_0^1 x^n(1-x)\ln(1+x)dx \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ; c)  $I_n \leq I_1 = \frac{1}{4}$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .

### Testul 40

**I. 1.**  $a = 3 \in \mathbb{N}$ . **2.**  $A(2, 1)$ . **3.**  $x \in \{-1, 0, 1, 2\}$ . **4.**  $C_5^2 \cdot C_5^3 = 100$ . **5.**  $a \in \{-5, 3\}$ . **6.**  $\operatorname{tg} B = \frac{3}{4}$ .

**II. 1.** a) Se arată că  $A^2B = BA^2$ ; c) Pentru orice  $X \in M$ , avem:  $A^2X = XA^2 \Leftrightarrow (5A - 5I_2)X = X(5A - 5I_2) \Leftrightarrow AX - X = XA - X \Leftrightarrow AX = XA$ . **2.** b)  $x \in [-1, 2]$ ; c) Ecuația  $x \circ y = 7$  este echivalentă cu ecuația  $(x-1)(y-1) = 2$  ale cărei soluții sunt  $(-1, 0)$ ,  $(0, -1)$ ,  $(2, 3)$  și  $(3, 2)$ .

**III. 1.** a)  $\lim_{x \nearrow 1} f(x) = \lim_{x \searrow 1} f(x) = f(1) = 2$ ; b)  $f'_s(1) = 1 \neq -1 = f'd(1)$ ; c) Funcția  $f$  are maximum

absolut  $f(1) = 2$ , deci  $f(x) + f(x^2) + f(x^3) \leq 3f(1) = 6$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . **2.** a)  $I_1 = 1$ ; b)  $I_3 = \frac{2}{3}$ ; c) Integrând,

de la 0 la  $\frac{\pi}{2}$ , inegalitatea  $\sin^{n+1}x \leq \sin^n x$ ,  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , obținem  $I_{n+1} \leq I_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

### Testul 41

**I. 1.**  $z = 2\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right)$ . **2.**  $f$  este descrescătoare pe  $(-\infty, 2)$ , deci  $f(\sqrt{2}) > f(\sqrt{3})$ . **3.**  $S =$

$\{2\}$ . **4.**  $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$ . **5.**  $B'(7, 0)$ . **6.**  $2\sqrt{37}$ . **II. 1.** b) Pentru  $x \in \{-2, -1\}$ ,  $\det A(x) = 0$ , deci  $A(x)$  nu este inversabilă; c)  $\det A(x) = x^2 + (m+1)x + m$ ; ecuația  $x^2 + (m+1)x + m = 0$  are discriminantul  $\Delta = (m-1)^2$  și  $(m-1)^2 \geq 0$ ,  $\forall m \in \mathbb{R}$ , deci vor exista valori ale lui  $x$  pentru care

$\det A(x) = 0$ . **2.** c) Dacă  $b = \hat{0}$ , atunci  $S = \{\hat{0}, \hat{4}\}$ ; dacă  $b = \hat{2}$ , atunci  $S = \{\hat{1}, \hat{5}\}$ ; dacă  $b = \hat{4}$ , atunci  $S = \{\hat{2}, \hat{6}\}$ ; dacă  $b = \hat{6}$ , atunci  $S = \{\hat{3}, \hat{7}\}$ . **III. 1.** a)  $f'(x) = e^x - 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ; b)  $f$  este des-

crescătoare pe  $(-\infty, 0]$  și crescătoare pe  $[0, +\infty)$ ; c) Din  $f\left(\frac{1}{100}\right) > f(0)$ , obținem că  ${}^{100}\sqrt{e} -$

$-\frac{1}{100} > 1$ , deci  ${}^{100}\sqrt{e} > \frac{101}{100}$ . **2.** a)  $\frac{4}{3}$ ; b)  $\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$ ; c) Asimptota oblică spre  $+\infty$  la graficul func-

ției  $f$  are ecuația  $y = x$ . Cum  $\sqrt{x^2+1} > x$ , oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}$ , avem  $A(\Gamma) = \int_0^1 (\sqrt{x^2+1} - x) dx =$

$$= \frac{\ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2} - 1}{2}.$$

### Testul 42

**I. 1.**  $a = 0 \in \mathbb{Z}$ . **2.**  $\Delta = 5m^2 + 4 > 0$ , oricare ar fi  $m \in \mathbb{R}$ . **3.**  $S = \{0, 2\}$ . **4.** 6 numere. **5.**  $\sqrt{2}$ .

**6.**  $30\sqrt{2}$ . **II. 1.** b)  $x = 0$  sau  $x = 1$ ; c)  $A(x), A^{-1}(x) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \Rightarrow \det A(x), \det A^{-1}(x) \in \mathbb{Z}$ . Cum  $A(x) \cdot A^{-1}(x) = I_3 \Rightarrow \det A(x) \cdot \det A^{-1}(x) = 1 \Rightarrow \det A(x) = 1$  sau  $\det A(x) = -1 \Rightarrow 1 - 2x = 1$  sau

Considerăm funcția  $g : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \ln \frac{x+2}{x} - \ln \frac{x+1}{x-1} + 1$ . Cum  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} g(x) = -\infty$  și

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ , rezultă că există  $c \in (1, +\infty)$  astfel încât  $g(c) = 0$ . **2.** a) Dacă  $F$  este o primitivă a funcției  $f$ , atunci  $F'(x) = f(x) \leq 0, \forall x \in [1, 3]$ , deci  $F$  este descrescătoare; b)  $3 \ln 3 - 4$ ; c) Obținem ecuația  $a^3 - 6a^2 + 9a - 2 = 0, a \in (1, 3)$ . Soluția este  $a = 2$ .

### Testul 57

**I. 1.** 64. **2.**  $2\sqrt{2}$ . **3.**  $x = 8$ . **4.** Sunt 90 de numere de două cifre; 22 se divid cu 4, 19 se divid cu 5, 4 se divid cu 4 și cu 5. Divizibile cu 4 sau cu 5 sunt 37 de numere. Probabilitatea cerută este egală cu  $\frac{37}{90}$ . **5.** **3.** **6.**  $-3$ . **II. 1.** c)  $\mathcal{A}_{AOC_n} = \frac{3}{2} |2n - 3|$  și este minimă pentru  $n = 1$  sau  $n = 2$ .

**2.** a) 8; c) De exemplu,  $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$ . **III. 1.** a) Avem  $f'(x) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x =$

$= 0, x = 4$ . Punctele căutate sunt  $A\left(0, -\frac{7}{2}\right)$ ;  $B\left(4, \frac{3}{2}\right)$ ; b)  $(-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$ ; c)  $e^{-3}$ . **2.** a)  $\frac{5}{12}$ ;

c)  $A = \int_{-2}^1 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-2}^1 (-x + 2 - x^2) dx = \frac{9}{2}$ .

### Testul 58

**I. 1.** 5. **2.**  $A(0, 2)$ ;  $B(3, 5)$ . **3.**  $\frac{8}{5}$ . **4.** 16. **5.**  $3\sqrt{2}$ . **II. 1.** b)  $m \neq -2$ ; c)  $(3, 1, 5)$ . **2.** a) De exemplu,

$(0 * 1) * 2 \neq 0 * (1 * 2)$ ; b)  $x = -3$  sau  $x = 1$ ; c) Fie  $n \in \mathbb{N}, a * b = n \Rightarrow a = \frac{n - 3b}{b - 2}$ . Alegem  $n \in$

$\mathbb{N}, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ , astfel încât  $a \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ ; de exemplu,  $n = 0, b = \frac{1}{3}, a = \frac{3}{5}$ . **III. 1.** a) 9; b)  $A(0, 4)$

punct de maxim,  $B(2, 0)$  punct de minim; c)  $\frac{11}{12} < \frac{12}{13}$ ;  $\frac{11}{12}, \frac{12}{13} \in [0, 2]$ . Cum  $f$  este strict

descrescătoare pe  $[0, 2]$ , rezultă că  $a > b$ . **2.** b)  $\sqrt{2} - 1$ ; c)  $\pi\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$ .

### Testul 59

**I. 1.**  $a = -1$ . **2.**  $m = -2$ . **3.** 8. **4.**  $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \frac{5}{9}$ . **5.**  $3x + 2y = 0$ . **6.** 1. **II. 1.** a)  $\det(2I_2 - 3A) =$

$= -17 \neq 0$ ; c) Inductiv,  $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ , cu  $a_n, b_n, c_n, d_n > 0$ . **2.** a)  $e = 4$ ; c)  $x = 3$ . **III. 1.** a)  $\frac{1}{3}$ ;



# Breviar teoretic

## 1. ALGEBRĂ

### 1.1. Formule de calcul prescurtat

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2; a^2 - b^2 = (a - b)(a + b); (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac;$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3; a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2);$$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}); n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

### 1.2. Sume remarcabile

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2};$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

### 1.3. Modulul unui număr real

$$\text{Definiție. } |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

Proprietăți: 1)  $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ; 2)  $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ; 3)  $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$ ;

4)  $|x : y| = |x| : |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0$ ; 5)  $|x + y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$ ; egalitatea are loc dacă și numai dacă  $xy \geq 0$ ; 6)  $|x| \leq a \Leftrightarrow x \in [-a, a], a > 0$ ; 7)  $|x| \geq a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty), a > 0$ .

### 1.4. Partea întregă și partea fracționară

Definiție. Partea întregă a unui număr real  $x$  este cel mai mare număr întreg, mai mic sau egal cu  $x$  și se notează cu  $[x]$ . Partea fracționară (zecimală) a unui număr real  $x$  se notează cu  $\{x\}$  și este definită astfel:  $\{x\} = x - [x]$ .

Proprietăți: 1)  $[x] \in \mathbb{Z}$  și  $\{x\} \in [0, 1), \forall x \in \mathbb{R}$ ; 2)  $[x] \leq x < [x] + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ ;

3)  $[x + k] = [x] + k, \forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}$ ; 4)  $\{x + k\} = \{x\}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}$ .

sunt:  $x_P = \frac{x_A + kx_B}{1+k}$ ,  $y_P = \frac{y_A + ky_B}{1+k}$ . Coordonatele centrului de greutate  $G$  al triunghiului  $ABC$

sunt  $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$ ,  $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$ .

## 2.2. Vectori în plan

Fie  $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$  o bază ortonormată asociată unui reper cartezian ortogonal din plan. *Vectorul de poziție* al punctului  $A(x_A, y_A)$  este  $\vec{r}_A = x_A \vec{i} + y_A \vec{j}$ . Coordonatele vectorului  $\vec{AB}$  sunt  $(x_B - x_A, y_B - y_A)$ , adică  $\vec{AB} = (x_B - x_A) \vec{i} + (y_B - y_A) \vec{j}$ . Suma vectorilor  $\vec{u}(a, b)$  și  $\vec{v}(a', b')$  este  $(\vec{u} + \vec{v})(a + a', b + b')$ . Produsul dintre vectorul  $\vec{v}(a, b)$  și scalarul  $t$  este  $(t \cdot \vec{v})(ta, tb)$ .

Panta direcției vectorului  $\vec{v}(a, b)$  este  $m_v = \frac{b}{a}$ , iar a vectorului  $\vec{AB}$  este  $m_{\vec{AB}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ .

Condiții de paralelism (coliniaritate) pentru vectorii  $\vec{u}(a, b)$  și  $\vec{v}(a', b')$ :  $\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow (\exists) t \in \mathbb{R}$

astfel încât  $\vec{u} = t \cdot \vec{v} \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \Leftrightarrow m_u = m_v$ .

## 2.3. Produsul scalar a doi vectori

*Produsul scalar* al vectorilor  $\vec{u}$  și  $\vec{v}$  este numărul real:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \angle(\vec{u}, \vec{v}), & \text{dacă } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ și } \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0, & \text{dacă } \vec{u} = \vec{0} \text{ sau } \vec{v} = \vec{0} \end{cases}$$
. Dacă  $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$  și  $\vec{v} = a'\vec{i} + b'\vec{j}$ , atunci

$\vec{u} \cdot \vec{v} = aa' + bb'$ . Condiții de perpendicularitate pentru vectorii  $\vec{u}(a, b)$  și  $\vec{v}(a', b')$ :  $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow aa' + bb' = 0$ . Măsura unghiului dintre doi vectori nenuli se poate afla cu

ajutorul formulei  $\cos \angle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{aa' + bb'}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2}}$ .

## 2.4. Teoreme remarcabile în triunghi

**Teorema lui Thales:** Dacă  $M$  și  $N$  sunt puncte pe laturile  $AB$ , respectiv  $AC$  ale triunghiului  $ABC$ , atunci dreptele  $MN$  și  $BC$  sunt paralele dacă și numai dacă  $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$ .

**Teorema bisectoarei:** Semidreapta  $AD$ ,  $D \in (BC)$ , este bisectoare a triunghiului  $ABC$  dacă și

numai dacă  $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ .

**Teorema lui Menelaus:** Pe dreptele suport  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  ale laturilor triunghiului  $ABC$  se consideră punctele  $M$ ,  $N$ , respectiv  $P$  (două puncte pe laturi și al treilea pe prelungirea laturii

# Cuprins

<i>Cuvânt-înainte</i> .....	5
-----------------------------	---

## TEME RECAPITULATIVE

*Enunțuri Soluții*

### Clasa a IX-a

1.1. Mulțimi și elemente de logică matematică .....	7.....234
1.2. Progresii .....	9.....234
1.3. Funcții. Funcția liniară .....	10.....236
1.4. Ecuația de gradul al II-lea. Funcția de gradul al II-lea .....	13.....236
1.5. Vectori .....	16.....238
1.6. Trigonometrie .....	19.....239
1.7. Aplicații ale trigonometriei în geometrie .....	21.....241

### Clasa a X-a

2.1. Radicali și logaritmi .....	24.....243
2.2. Numere complexe .....	26.....244
2.3. Funcții .....	28.....245
2.4. Ecuații și inecuații .....	31.....247
2.5. Combinatorică .....	34.....250
2.6. Matematici aplicate. Probabilități .....	36.....251
2.7. Geometrie analitică .....	38.....253
2.8. Probleme recapitulative din materia claselor a IX-a – a X-a.....	41.....254

### Clasa a XI-a

3.1. Permutări.....	48.....256
3.2. Matrice .....	49.....256
3.3. Determinanți .....	52.....258
3.4. Inversa unei matrice. Ecuații matriceale .....	56.....259
3.5. Sisteme de ecuații liniare .....	58.....261
3.6. Probleme de sinteză – algebră.....	62.....263
3.7. Șiruri .....	67.....265
3.8. Șiruri date prin formule de recurență .....	70.....268
3.9. Limite de funcții.....	73.....270
3.10. Asimptote.....	76.....272
3.11. Funcții continue .....	77.....272
3.12. Derivata unei funcții.....	79.....274
3.13. Teorema lui Fermat. Teorema lui Rolle. Teorema lui Lagrange.....	82.....276
3.14. Regulile lui l'Hospital.....	85.....279
3.15. Rolul derivatelor de ordinul I și de ordinul al II-lea în studiul funcțiilor .....	86.....279
3.16. Reprezentarea grafică a funcțiilor .....	95.....290
3.17. Probleme de sinteză – analiză matematică .....	97.....294

**Clasa a XII-a**

4.1. Legi de compoziție.....	104.....	300
4.2. Grupuri.....	107.....	302
4.3. Inele și corpuri .....	112.....	307
4.4. Polinoame .....	115.....	311
4.5. Probleme de sinteză – algebră.....	122.....	316
4.6. Primitive.....	125.....	317
4.7. Formula Leibniz–Newton .....	131.....	320
4.8. Metode de integrare .....	135.....	324
4.9. Proprietăți ale integralei Riemann.....	139.....	328
4.10. Aplicații ale integralei definite.....	143.....	332
4.11. Probleme de sinteză – analiză matematică.....	146.....	335
<b>TESTE PENTRU BACALAUREAT, DUPĂ MODELUL M.E.....</b>	<b>150.....</b>	<b>338</b>
<b>BREVIAR TEORETIC .....</b>	<b>.....</b>	<b>368</b>
<i>Bibliografie.....</i>	<i>.....</i>	<i>397</i>