Conform modelelor stabilite de ME

BAC

MATEMATICĂ M1

Coordonator Radu Gologan

Mihaela Berindeanu
Nicoleta Agenna Ionescu Mazilu
Ovidiu Șontea
Gabriel Vrînceanu

Cuvânt-înainte

Specificul pregătirii pentru susținerea examenului de bacalaureat la matematică este necesitatea studiului individual intens. În primul rând, datorită cantității extrem de mari de informație pe care elevul trebuie să o dobândească pe parcursul tuturor anilor de școală, care adesea este transmisă rigid și formal, fără suport intuitiv. Aceasta face ca unii elevi să considere matematica studiată în liceu neatrăgătoare.

În al doilea rând, pentru că înțelegerea faptului matematic și al utilității acestuia în dezvoltarea gândirii și a modelării realității nu se poate face fără exercițiu intens și fără un efort intelectual. Aceasta înseamnă rezolvarea cu creionul în mână, în anii de liceu, a sute de exerciții și probleme. Evident că profesorul de la clasă are, în acest sens, rolul cel mai important, prin exemple explicate și teme judicios alese. Este însă esențial ca elevul să lucreze cât mai mult singur, să-și descopere astfel punctele slabe și să înțeleagă în final fenomenele și metodele matematice studiate.

Aveți în față o colecție de exerciții care își propune să aducă o noutate pe piața auxiliarelor de matematică și anume prezentarea graduală ca dificultate și ca finalitate așteptată a unei suite de teste, utile pentru examenul de bacalaureat și pentru pregătirea treptată, de-a lungul claselor a XI-a și a XII-a.

Lucrarea se adresează elevilor și cadrelor didactice deopotrivă. Pentru elevi, cartea este o invitație spre studiul individual și autoevaluarea progresului personal, iar pentru cadrele didactice este un instrument valoros pentru urmărirea progresului fiecărui elev.

Volumul conține teste conforme cu programa pentru bacalaureat la disciplina Matematică, pentru specializarea matematică-informatică, asemănătoare modelelor oficiale emise de Centrul Național de Evaluare și Examinare al Ministerului Educației Naționale.

Lucrarea cuprinde două părți. Prima parte conține modele de simulare a examenului de bacalaureat pentru clasele a XI-a și a XII-a, pentru rezolvarea cărora sunt necesare cunoștințele predate la clasă până în luna martie inclusiv.

Partea a doua a lucrării conține teste pentru rezolvarea cărora sunt necesare toate cunoștințele predate în cei 12 ani de studiu. Aceste teste sunt clasificate pe grade de dificultate crescătoare, în trei module: A, B, respectiv C. Testele din modulul A sunt concepute de autori astfel încât înțelegerea lor ar trebui să asigure nota minimă 6 la examen. Analog, modulul B se referă la nota minimă 8, iar C la o notă între 9,50 și 10. Testele mai ușoare sunt însoțite doar de indicațiile de rezolvare, dar testele dificile sunt însoțite de rezolvări complete.

Autorii sunt profesori cu o bogată experiență de predare la licee de excelență, care au pregătit elevi cu rezultate excepționale la examene și chiar la olimpiade. Mulți dintre acești elevi mi-au fost studenți de elită la Facultatea de Automatică și Calculatoare. În plus, autorii lucrării au și o îndelungată experiență în crearea de teste și probleme pentru examene și concursuri.

Dragi elevi, dragi dascăli matematicieni, recomand cu căldură acest minunat auxiliar.

Prof. dr. Radu Gologan

Președintele Societății de Științe Matematice din România

EXAMENUL DE BACALAUREAT

Teste de simulare BAC pentru clasa a XI-a

Teste de simulare BAC pentru clasa a XII-a

*Egalitatea nu există
decât în matematică.*
Mihai Eminescu

Teste de SIMULARE BAC pentru clasa a XI-a

Se acordă 10 puncte din oficiu

Test 1

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați partea reală a numărului complex $\frac{3+i}{3-i}$.

5p **2.** Soluțiile ecuației $x^2-(2m+1)x+3m+5=0$ sunt x_1 și x_2, iar m este un număr real. Arătați că $3(x_1+x_2)-2x_1x_2+7=0$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2 4x+\log_2 x=4$.

5p **4.** Determinați câte numere pare de 3 cifre se pot forma folosind elementele mulțimii $A=\{1,2,3,4,5\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră vectorii $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}+5\vec{j}$ și $\overrightarrow{AC}=$ $=(m+2)\vec{i}+(4m-1)\vec{j}$, unde m este un număr real. Determinați numărul real m astfel încât $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}$.

5p **6.** Știind că $\operatorname{tg} a=\frac{2}{3}$, arătați că $\frac{3\sin a+\cos a}{3\sin a-\cos a}=3$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră determinantul $D(x,y)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x & y & 3\\ x^3 & y^3 & 27\end{vmatrix}$, unde x, y sunt numere reale.

5p a) Arătați că $D(0,1)=24$.

5p b) Arătați că $D(x,y)=(y-x)(3-x)(3-y)(x+y+3)$, $\forall\, x,y\in\mathbb{R}$.

5p c) Demonstrați că numărul $D(x,y)$ este divizibil cu 6 pentru orice numere întregi x,y.

2. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}x+1 & 0 & x\\ 0 & 1 & 0\\ x & 0 & x+1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p a) Calculați $A(2)-A(1)$.

5p b) Arătați că $A(a)A(b)=A(a+b+2ab)$, pentru orice numere reale a,b.

5p c) Determinați numerele naturale pentru care $A(a)A(a+5)=A(18a+1)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{2x+1}{x+3}$ și, respectiv, șirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$, având termenul general $x_n=f(n)$.

5p a) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p b) Demonstrați că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este crescător.

5p c) Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2+1)\ln\dfrac{x_n}{x_{n+1}}$.

2. Se considera funcția:

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}2x+a, & \text{pentru } x\leq 2\\ x^2+(a^2-a)x, & \text{pentru } x>2\end{cases}$, unde a este un număr real.

5p a) Determinați numerele reale a pentru care funcția f este continuă în $x=2$.

5p b) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{f(x)}}{x}$.

5p c) Pentru $a=2$, arătați că ecuația $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ are cel puțin o soluție în intervalul $(-1,0)$.

Test 2

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați $\left|6\log_3\sqrt[3]{243}-\sqrt[4]{16}\right|$.

5p **2.** Fie funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-7x+3,\ g(x)=-2x-3$. Aflați punctele de intersecție ale graficelor celor două funcții.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(5^x-5)\left(2^x-\frac{1}{2}\right)=0$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să conțină cel puțin un număr impar.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,3), B(6,-3), C(-2,5)$. Determinați ecuația medianei triunghiului ABC, duse din A.

5p **6.** Arătați că $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_4$.

5p a) Calculați σ^{-1} (permutarea inversă permutării σ).

5p b) Arătați că permutarea σ este impară.

5p c) Dacă $\omega = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, rezolvați în S_4 ecuația $\sigma x = \omega$.

2. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $M = \left\{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AX = XA\right\}$.

5p a) Arătați că $A, I_2 \in M$.

5p b) Arătați că, dacă $X \in M$, atunci există numerele reale a și b astfel încât $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

5p c) Arătați că, dacă $X, Y \in M$, atunci $XY \in M$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x^3 + x - 2}{x^2 + 3}$.

5p a) Calculați $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

5p b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p c) Arătați că $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{x - 1} = 1$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2^x + 3x + m, & \text{pentru } x \le 0 \\ \dfrac{\sin 4x}{2x}, & \text{pentru } x > 0 \end{cases}$,

unde $m \in \mathbb{R}$.

5p a) Arătați că $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 2$.

5p b) Determinați numărul real m pentru care funcția f este continuă în $x = 0$.

5p c) Pentru $m = 1$ arătați că ecuația $f(x) = 0$ admite o rădăcină negativă, care nu aparține mulțimii numerelor întregi.

Teste de SIMULARE BAC pentru clasa a XII-a

Se acordă 10 puncte din oficiu

TEST 1

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătaţi că numărul $\log_2\sqrt{2+\sqrt{2}}+\log_2\sqrt{2-\sqrt{2}}$ este raţional.

5p **2.** Se consideră funcţiile $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-5x+4$, $g(x)=2x+1$. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $(f\circ g)(x)=0$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $9^{x+1}-1=3^x-3^{x+2}$.

5p **4.** Determinaţi numărul funcţiilor impare $f:\{-2,-1,0,1,2\}\to\{-2,-1,0,1,2\}$.

5p **5.** Fie *ABCDEF* un hexagon regulat cu latura $AB=3$ cm. Calculaţi $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$.

5p **6.** Arătaţi că un triunghi având lungimile laturilor de 2 cm, 3 cm şi 4 cm este obtuzunghic.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie $A(m)=\begin{pmatrix} m+1 & 1 & 1\\ 1 & m+1 & 1\\ 1 & 1 & m+1\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases}(m+1)x+y+z=-1\\ x+(m+1)y+z=-1\\ x+y+(m+1)z=m+5\end{cases}, \text{ unde } m\in\mathbb{R}.$$

5p a) Arătaţi că $\det(A(1))=4$.

5p b) Arătaţi că $\det(A(m))=m^2(m+3)$, pentru oricare $m\in\mathbb{R}$.

5p c) Pentru $m=-3$, determinaţi soluţia sistemului (x_0, y_0, z_0) pentru care $x_0y_0+z_0^2=5$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x\circ y=xy-5x-5y+30$.

5p a) Arătaţi că $x\circ y=(x-5)(x-y)+5$.

5p b) Calculați $\sqrt{1} \circ \sqrt{2} \circ \ldots \circ \sqrt{2020}$.

5p c) Rezolvați în mulțimea numerelor întregi sistemul $\begin{cases} x \circ x = y \\ y \circ y = x \end{cases}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(-3, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{x+3}$.

5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{e^x(x+2)}{(x+3)^2}$, pentru orice $x \in (-3, +\infty)$.

5p b) Calculați $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x) - \frac{1}{3}}{x}$.

5p c) Arătați că $f\left(\frac{-1}{2019}\right) + f\left(\frac{1}{2021}\right) > \frac{2}{e^2}$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}$ și numărul $I_n = \int_0^1 x^n f(x)dx$ asociat fiecărui număr natural n.

5p a) Arătați că $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}\ln 3$.

5p b) Calculați I_1.

5p c) Arătați că $nI_n = 2 - 3(n-1)I_{n-2}$, pentru orice număr natural $n \geq 2$.

TEST 2

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați termenul a_7 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_5 = 5$ și $a_9 = 13$.

5p **2.** Determinați numărul real m astfel încât valoarea minimă a funcției $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + mx + m + 2$ să fie 3.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_9 x + \log_{27} x + \log_{\frac{1}{3}} x = = -\frac{1}{6}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr natural de 3 cifre, acesta să aibă toate cifrele pătrate perfecte.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$, $B(-5,7)$, $C(8,3)$, $D(1,a)$, numărul a fiind un număr real. Determinați numerele reale a astfel încât $AB \parallel CD$.

5p **6.** Arătați că, dacă $a + 2b = \frac{\pi}{6}$, atunci $4\sin b\cos b = \cos a - \sqrt{3}\sin a$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & m+1 & -m \\ m & m & -1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + (m+1)y - mz = 2 \\ mx + my - z = m+1 \end{cases}$, unde m este un număr real.

5p a) Arătați că $\det(A(m)) = (m+1)(m-2)$.

5p b) Pentru $m = 0$, arătați că matricea este inversabilă și calculați A^{-1}.

5p c) Determinați numerele reale m pentru care sistemul este incompatibil.

2. Pe mulțimea $G = (1, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x \circ y = \sqrt{x^2y^2 - x^2 - y^2 + 2}$, pentru orice $x, y \in G$.

5p a) Arătați că, dacă $x, y \in G$, atunci $x \circ y \in G$.

5p b) Rezolvați în mulțimea G ecuația $x \circ x \circ x = x$.

5p c) Se consideră funcția $f:(0, \infty) \to (1, \infty)$, $f(x) = \sqrt{x + a}$. Determinați numerele reale a astfel încât $f(xy) = f(x) \circ f(y)$, $\forall\, x, y \in (0, \infty)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{e^x}$.

5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{-x^2 + 6x - 8}{e^x}$, unde $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.

5p c) Arătați că $\left(\frac{x}{2}\right)^2 - x + 1 \le e^{x-4}$, pentru orice $x \in [2, +\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = xe^{2x}$.

5p a) Arătați că $\int_1^2 \frac{f(x)}{x}\, dx = \frac{e^2(e^2 - 1)}{2}$.

5p b) Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(0) = \frac{3}{4}$.

5p c) Dacă pentru fiecare număr natural n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 x^n f(x)\, dx$, arătați că $2I_n = e^2 - (n+1)I_{n-1}$ pentru orice număr natural $n \ge 2$.

TEST 3

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați z^{5019}, știind că z este un număr complex astfel încât $z + \frac{1}{z} = 1$.

5p **2.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale inecuaţia $x^2 - 3x < 0$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{2x} + 3^x = 2$.

5p **4.** Determinați numărul natural n pentru ca $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 64$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$, $A(2,3)$, $B(1,3)$. Calculați aria triunghiului OAB.

5p **6.** Determinați $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ştiind că $\frac{\sqrt{3}\sin x + 3\cos x}{\cos x} = 6$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p a) Arătați că $\operatorname{rang} A = 3$.

5p b) Arătați că $(A - I_3)^3 X = X(A - I_3)^3, \forall X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p c) Determinați inversa matricei A.

2. Se consideră pe intervalul $[8, 10]$ legea de compoziție $x \circ y = xy - 9x - 9y + 90$.

5p a) Arătați că $x \circ y = (x - 9)(y - 9) + 9, \forall x, y \in [8, 10]$.

5p b) Arătați că legea admite element neutru.

5p c) Determinați elementele simetrizabile din mulțimea $[8, 10]$ în raport cu legea dată.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră șirul definit prin relația de recurență $a_{n+1} = \frac{2a_n + 3}{a_n}, a_0 > 0$.

5p a) Arătați că $a_n > 2, \forall n \geq 1$.

5p b) Arătați că $|a_{n+1} - 3| < \frac{1}{2}|a_n - 3|, \forall n \geq 0$.

5p c) Arătați că $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 3$.

2. Se consideră șirul de numere reale $(I_n)_{n \geq 1}$ definit prin $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{4x^2 + 3} dx$.

5p a) Arătați că șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este strict descrescător.

5p b) Arătați că șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este mărginit.

5p c) Calculați $\lim\limits_{n \to \infty} I_n$.