VARIANTA 40

5p	**1.** Să se formeze o ecuaţie de gradul al doilea, ştiind că aceasta are soluţiile $x_1=2$ şi $x_2=3$.
5p	**2.** Să se rezolve sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x+y-2=0 \\ x^2-2x+y=0 \end{cases}$, unde $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$.
5p	**3.** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5(9-x^2)=1$.
5p	**4.** Să se calculeze probabilitatea ca alegând un element n al mulţimii $A=\{1,2,3,4\}$, acesta să verifice inegalitatea $n!<5$.
5p	**5.** Să se calculeze $\frac{\sin 135^\circ}{\cos 45^\circ}$.
5p	**6.** Să se calculeze aria triunghiului ABC în care $AB=8, AC=4$ şi $m(\sphericalangle BAC)=45^\circ$.

Soluţii

1. $S=x_1+x_2=5$, $P=x_1x_2=6$; $x^2-Sx+P=0$; $x^2-5x+6=0$.

2. Dacă $y=2-x$, atunci a doua ecuaţie devine $x^2-3x+2=0$, de unde $x=1$ şi $x=2$; soluţiile sistemului vor fi $x=2$ şi $y=0$ sau $x=1$ şi $y=1$.

3. Din condiţia $9-x^2>0$, rezultă $x\in(-3,3)$. Atunci $9-x^2=5$, de unde $x=\pm2\in(-3,3)$.

4. $P=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$. Cum $1!=1; 2!=2;\ 3!=6;\ 4!=24$, atunci $P=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

5. $\sin 135^\circ=\sin(180^\circ-45^\circ)=\sin 45^\circ$. Deci $\frac{\sin 135^\circ}{\cos 45^\circ}=\frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ}=\mathrm{tg}45^\circ=1$.

6. $A_{ABC}=\frac{AB\cdot AC\cdot \sin A}{2}=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=8\sqrt{2}$.

VARIANTA 86

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

5p a) Să se verifice că $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, pentru orice $x>0$.

5p b) Să se determine ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul $A\left(e,\frac{1}{e}\right)$.

5p c) Să se arate că $\ln x\leqslant\frac{x}{e}$, pentru orice $x>0$.

2. Se consideră funcţia $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=1-\sqrt{x}$.

5p a) Să se determine mulţimea primitivelor funcţiei *f*.

5p b) Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei *Ox*, a graficului funcţiei *f*.

5p c) Folosind, eventual, faptul că $\sqrt{x}\geq x$, pentru orice $x\in[0,1]$, să se arate că $\int_0^1 f^{2008}(x)\,dx\leq\frac{1}{2009}$.

Soluţii

1. a) $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

b) $d:y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$; $d:y-f(e)=f'(e)(x-e)$; $d:y=\frac{1}{e}$, deoarece $f(e)=\frac{1}{e}$ şi $f'(e)=0$.

c) Din studiul semnului derivatei lui f se obţine că f este crescătoare pe $(0,e]$ şi descrescătoare pe $[e,+\infty)$; $x=e$ este punct de maxim pentru *f*, de unde $f(x)\leqslant f(e)=\frac{1}{e}$ pentru orice $x>0$. Rezultă $\ln x\leqslant\frac{x}{e}$.

2. a) $\int f(x)dx=\int(1-\sqrt{x})dx=x-\frac{2x\sqrt{x}}{3}+\mathscr{C}$.

b) $V=\pi\int_0^1 f^2(x)dx=\pi\left(x-\frac{4x\sqrt{x}}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{6}$.

c) $\sqrt{x}\geqslant x$, deci $1-\sqrt{x}\leqslant 1-x$; obţinem $\int_0^1 f^{2008}(x)dx\leqslant\int_0^1(1-x)^{2008}dx$;

$\int_0^1(1-x)^{2008}dx=\frac{(x-1)^{2009}}{2009}\Big|_0^1=\frac{1}{2009}$, deci $\int_0^1 f^{2008}(x)dx\leqslant\frac{1}{2009}$.