VARIANTA 9

5p	**1.** Să se determine numărul natural x pentru care $1+3+5+\ldots+x=225$.
5p	**2.** Să se determine valorile parametrului real m știind că graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+mx-2m$ intersectează axa Ox în două puncte situate la distanța 3.
5p	**3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\left(2^{-x+1}+1\right)=x$.
5p	**4.** Să se arate că $C_{17}^{3}>C_{17}^{15}$.
5p	**5.** Fie hexagonul regulat $ABCDEF$ de latură 4. Să se calculeze modulul vectorului $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.
5p	**6.** Să se arate că $\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\ldots+\sin^2 90^\circ=\frac{91}{2}$.

Soluții

1. $x=2n-1$, unde n este numărul de termeni ai șirului.

$S_n=1+3+5+\ldots+2n-1=\frac{n(1+2n-1)}{2}=n^2$ de unde se obține $n^2=225$, adică $n=15$.

Deci $x=2n-1=29$.

2. Condiția ca ecuația $x^2+mx-2m=0$ să aibă 2 soluții reale este $\Delta=m^2+8m>0$.
Din $|x_1-x_2|=3$ obținem $(x_1-x_2)^2=9$, de unde $(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=9$, adică $m^2+8m-9=0$ cu soluțiile $m_1=-9$ și $m_2=1$, care verifică $\Delta>0$.

3. Din $\log_2(2^{-x+1}+1)=x$ rezultă $2^{-x+1}+1=2^x$, adică $(2^{-x})\cdot 2+1=2^x$. Notăm $2^x=y>0$ și obținem $\frac{2}{y}+1=y$, de unde $y^2-y-2=0$; $\Delta=9$ cu soluțiile $y_1=2$ sau $y_2=-1<0$, de unde se obține $x=1$.

4. $C_{17}^{15}=\frac{17!}{(17-15)!\cdot 15!}=\frac{17!}{15!\cdot 2!}=C_{17}^{2}$; deci $C_{17}^{15}=C_{17}^{2}<C_{17}^{3}$.

5. $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$. Dar $|\overrightarrow{AD}|=2|\overrightarrow{BC}|$ și $\overrightarrow{AD}\parallel\overrightarrow{BC}$, deci $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}$, adică $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BC}$ și prin urmare $|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}|=3BC=12$.

6. Se folosește formula $\sin x=\cos(90^\circ-x)$.

$\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\ldots+\sin^2 90^\circ=(\sin^2 1^\circ+\cos^2 1^\circ)+\ldots+(\sin^2 44^\circ+\cos^2 44^\circ)+$
$+\cos^2 45^\circ+1=44+\frac{2}{4}+1=\frac{182}{4}=\frac{91}{2}$.

VARIANTA 60

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\sqrt{1+x^2}$.

5p **a)** Să se arate că mulțimea valorilor funcției f este $(0,\infty)$.

5p **b)** Să se arate că, dacă $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\ln f(x)$, atunci $(f(x)-x)\cdot g'(x)=1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se demonstreze că $g(x)<x$, pentru orice $x>0$, unde g este funcția definită la punctul **b)**.

2. Fie mulțimea

$$M=\left\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\mid f \text{ este derivabilă și } \int_0^1 f(x)\,dx=f(0)=f(1)\right\}.$$

5p **a)** Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x^3-3x^2+x$ aparține mulțimii M .

5p **b)** Să se arate că dacă f este o funcție polinomială de grad trei, care aparține lui M , atunci $f\left(\frac{1}{2}\right)=f(0)$.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $f\in M$, ecuația $f'(x)=0$ are cel puțin două soluții în intervalul $(0,1)$.

Soluții

1. a) $f'(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\neq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, $f'(0)>0$, deci f' are semn constant pozitiv, rezultă că f este strict crescătoare, continuă, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ și

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=0,$$ de unde concluzia.

b) Din $g'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ rezultă relația cerută.

c) Fie $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\varphi(x)=g(x)-x$. Avem $\varphi'(x)=\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}-1$. Deoarece φ este continuă și $\varphi'(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}^*$, rezultă φ strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$ prin urmare, pentru orice $x>0$ avem $\varphi(x)<\varphi(0)$. Cum $\varphi(0)=0$, se obține inegalitatea cerută.

2. a) Funcția f fiind o funcție polinomială, este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

$\int_0^1 f(x)\,dx=\dfrac{2x^4}{4}\Big|_0^1-\dfrac{3x^3}{3}\Big|_0^1+\dfrac{x^2}{2}\Big|_0^1=\dfrac{1}{2}-1+\dfrac{1}{2}=0$. Cum $f(0)=0$ și $f(1)=0$, atunci funcția f face parte din mulțimea M.