ARTUR BĂLĂUCĂ

CĂTĂLIN BUDEANU GABRIEL MÎRȘANU

ARITMETICĂ
ALGEBRĂ GEOMETRIE

Clasa a VI-a

- Teste inițiale
- Considerații teoretice la noțiunile din programa școlară
- Modele de probleme rezolvate
- Probleme practice
- 20 modele de teste ce conţin itemi cu note şi bareme de notare
- Itemi cu note
- Soluții, indicații, răspunsuri și comentarii la problemele propuse

EDITURA TAIDA
– IAŞI –

Cuprins

ARITMETICĂ. ALGEBRĂ

CAPITOLUL I

TESTE INIȚIALE. RECAPITULARE ȘI COMPLETĂRI

TESTE INIŢIALE

TESTUL 1 (iniţial)

Partea I. Încercuiţi litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

1. Rezultatul calculului: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$ este:
A. 36; **B.** 72; **C.** 18; **D.** 70. (5p)

2. Rezultatul calculului: $11+2[3+(4+5\cdot 6):2]:5-13$ este:
A. 8; **B.** 4; **C.** 6; **D.** 10. (5p)

3. Dacă $ab + ac + ad + ae = 750$ şi $b + c + d + e = 25$, atunci $a = ...$
A. 50; **B.** 75; **C.** 30; **D.** 25. (5p)

4. Dacă fracția $\frac{5+n}{8}$ unde $n \in \mathbb{N}$, este subunitară, atunci $n = ...$.
A. {0; 1; 2; 3}; **B.** {1; 2; 3}; **C.** {0; 1}; **D.** {0; 1; 2}. (5p)

5. Dacă $14 + 2x = 20$, atunci x este egal cu ... .
A. {3}; **B.** {0; 3}; **C.** {6}; **D.** {2}. (5p)

6. Dacă $3{,}5x - 0{,}75 = 2{,}5x + 3{,}25$, atunci x este egal cu ... .
A. 4,25; **B.** 2; **C.** 4,50; **D.** 4. (5p)

7. Dacă $a = 0{,}13$ mm, atunci $a = ...$ cm.
A. 0,0013 cm; **B.** 1,3 cm; **C.** 0,013 cm; **D.** 0,31 cm. (5p)

8. Rezultatul calculului: $3{,}5 \cdot 0{,}02 + 5{,}6 \cdot 0{,}1$ este egal cu ... .
A. 0,53; **B.** 0,63; **C.** 1,63; **D.** 0,063. (5p)

Partea a II-a. La următoarele probleme se cer rezolvări complete.

1. Suma de 3750 lei a fost plătită în bancnote de 50 lei sau 100 lei.
a) Care este numărul maxim de bancnote cu care s-a plătit această sumă?
b) Dar numărul minim? (10p)

2. Aflaţi numerele naturale a şi b ştiind că: **a)** $5a + 4b = 60$; **b)** $(a + 7) \cdot (b + 2) = 48$. (20p)

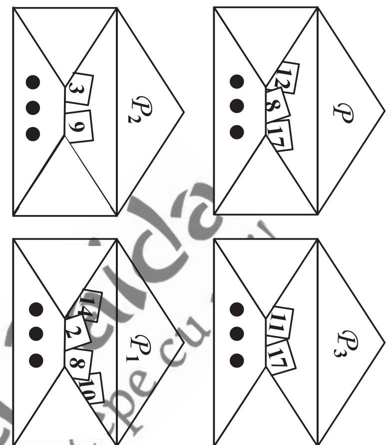
3. Un tren personal parcurge distanţa dintre două localităţi în 15 ore, iar un tren accelerat în 10 ore. Peste câte ore se vor întâlni cele două trenuri, dacă pornesc simultan din cele două localităţi, unul către celălalt? (10p)

4. Determinaţi cel mai mic număr natural care împărţit la 13 dă restul 4 şi împărţit la 23 dă restul 3. (10p)

Timp de lucru 50 minute. Se acordă 10 puncte din oficiu.

II.2. Mulţimi. Descriere, notaţii, reprezentări; mulţimi numerice/ nenumerice. Mulţimi finite, cardinalul unei mulţimi finite; relația dintre un element și o mulţime; mulţimi infinite, mulţimea numerelor naturale ($\mathbb{N}$ și $\mathbb{N}^*$)

Să împărţim cartonaşele



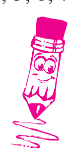
❖ Luăm un plic P în care punem 20 de cartonaşe pe care sunt scrise numerele naturale de la 1 la 20.
❖ Apoi mai luăm 3 plicuri P_1, P_2, P_3.
❖ În plicul P_1 punem cartoanele din P care au pe ele scrise numerele pare.
❖ În plicul P_2 punem cartonaşele din P care au pe ele scrise numerele impare multipli de 3.
❖ În plicul P_3 punem cartonaşele care au pe ele scrise numere de două cifre ce au exact doi divizori.
❖ După aceste operaţii enumerăm în paranteze acolade, numerele de pe cartonaşele din P_1, P_2 şi P_3.

Avem: P_1: {2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20}.
P_2: {3; 9; 15}.
P_3: {11; 13; 17; 19}.

Au mai rămas cartonaşe în plicul P?
Ce numere conţin pe ele?
Mai luaţi un plic P_4 şi aşezaţi în el cartonaşele rămase.
Obţinem: P_4: {1; 5; 7}.
Spunem că mulţimea cartonaşelor din plicul P am împărţit-o în patru mulţimi.
Prin **mulţime** înţelegem o colecţie (grămadă, ansamblu de obiecte distincte).

Exemple:

- Mulţimea cifrelor arabe din sistemul zecimal de numeraţie: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9.
- Mulţimea elevilor din clasa noastră.
- Mulţimea numerelor naturale de două cifre.
- Mulţimea literelor cuvântului „apartament“.
- Mulţimea cifrelor numărului 12378.
- Mulţimea continentelor.



Reţineţi:

➲ O **mulţime** conţine elemente.
➲ Elementele pot fi numere, litere, obiecte, fenomene, animale, persoane etc.
➲ Nu are importanţă numărul elementelor într-o mulţime.
➲ Un element apare într-o mulţime o singură dată.

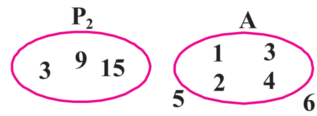
Cum notăm mulţimile şi elementele lor?

Mulţimile se notează cu litere mari de tipar din alfabetul latin: A, B, C, ..., M, N, P, ...„ X, Y, Z. Dacă un obiect face parte dintr-o mulţime, spunem că acesta **aparţine** acelei mulţimi.	***Exemple:*** Dacă notăm cu A mulţimea literelor cuvântului „apartament“ spunem că *a* este un element al mulţimii A, iar *o* nu este un element al mulţimii A.	
	Scriem: $a \in A$ $o \notin A$	***Spunem:*** *a* aparţine mulţimii A *o* nu aparţine mulţimii A.

Cum reprezentăm mulţimile?

O mulţime poate fi descrisă în următoarele moduri:

1. Prin enumerarea elementelor într-o paranteză acoladă, separându-le prin „;“.
Pentru situaţia descrisă cu plicurile avem mulţimile:
$P = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20\}$.
$P_1 = \{2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20\}$.
$P_2 = \{3; 9; 15\}$.
$P_3 = \{11; 13; 17; 19\}$.



2. Cu ajutorul diagramelor Venn-Euler.
Desenele alăturate sunt diagrame.
Prima diagramă indică faptul că mulţimea P_2 este formată din elementele: 3; 9 şi 15, iar cealaltă diagramă indică faptul că mulţimea A este formată din elementele 1; 2; 3; 4 şi numerele 5 şi 6 nu aparţin mulţimii A.

3. Al treilea mod constă în **precizarea unei proprietăţi caracteristice elementelor mulţimii**.
Exemplu: Mulţimea B a multiplilor nenuli ai lui 5 mai mici decât 40.

Notăm:	***Citim:***
$A = \{x / x$ multiplu de 5 şi $x < 40\}$.	Mulţimea elementelor x cu proprietatea că x este multiplu de 5 şi x este mai mic decât 40.

Să revenim la problema celor 4 plicuri.
$P = \{x / x$ este număr natural nenul şi $x \leq 20\}$.
$P_1 = \{x / x$ este element din P, număr par$\}$.
$P_2 = \{x / x$ este element din P, număr impar, multiplu de 3$\}$.
$P_3 = \{x / x$ este element din P, x are două cifre şi exact 2 divizori$\}$.

Observaţii:
➲ Mulţimile pot fi mai mult sau mai puţin numeroase.
➲ Există mulţimi care nu conţin nici un element. O astfel de mulţime se numeşte mulţime **vidă** şi se notează cu simbolul Φ.
➲ Numărul elementelor unei mulţimi (M) se numeşte **cardinalul** acelei mulţimi (**card M**). Astfel, în cazul celor 4 plicuri avem: card P = 20; card P_1 = 10; card P_2 = 3 şi card P_3 = 4. Card Φ = o.

Când două mulţimi sunt egale?

➲ Fie mulţimea $A = \{0; 2; 4; 6; 8\}$ şi $B = \{x / x$ este cifră pară$\}$.
Mulţimile A şi B au aceleaşi elemente. Spunem că mulţimile A şi B sunt **mulţimi egale** şi notăm A = B.

Reţineţi! Două mulţimi sunt **egale** dacă au aceleaşi elemente.

Mulţimile ($\mathbb{N}$ şi $\mathbb{N}^*$)

Observaţie: Aşa cum pentru mulţimea vidă am utilizat un simbol rezervat (Φ), pentru mulţimea numerelor naturale folosim simbolul $\mathbb{N}$, iar pentru mulţimea numerelor naturale nenule simbolul $\mathbb{N}^*$.
Avem: $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$ şi $\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; 4; 5; \ldots\}$.

➲ Mulţimea numerelor naturale este infinită, adică are o infinitate de elemente. Elementele mulţimilor $\mathbb{N}$ şi $\mathbb{N}^*$ le putem scrie, fără a le repeta, într-un şir nemărginit (infinit).
➲ Mulţimea numerelor naturale pare este infinită: $\{0; 2; 4; 6; \ldots\}$.
➲ Mulţimea numerelor naturale impare este infinită: $\{1; 3; 5; 7; \ldots\}$.
➲ Mulţimea multiplilor lui 3 este infinită: $\{0; 3; 6; 8; 12; \ldots\}$.
➲ O mulţime care nu este infinită o numim **mulţime finită**. De exemplu: mulţimea literelor din alfabetul unei ţări sau mulţimea elevilor din şcoală sau mulţimea arborilor dintr-o pădure etc.

EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. Scrieţi toate numerele naturale care: **a)** sunt cel mult egale cu 8;
b) sunt cel puţin egale cu 85 şi sunt mai mici decât 100. (*nota* 5)

2. Scrieţi cinci numere naturale care: **a)** sunt nenule; (*nota* 5)
b) sunt cel puţin egale cu 2004; **c)** sunt cel mult egale cu 2004. (*nota* 5)

3. Scrieţi, mulţimile literelor din fiecare cuvânt: „matematică“; „apartament“; „apometru“; „aerisirea“; „paralelipiped“. (*nota* 5)

4. Scrieţi mulţimea cifrelor din care sunt formate numerele:
a) 423561; **b)** 12342; **c)** 1203403; **d)** 98762101. (*nota* 5)

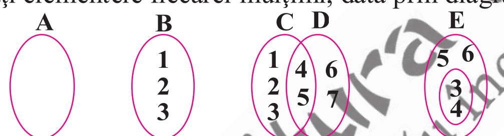
5. Scrieţi mulţimea cifrelor în baza: **a)** 2; **b)** 10. (*nota* 7)

6. Scrieţi mulţimea tuturor resturilor împărţirii unui număr natural la 10. (*nota* 7)

7. Se dau mulţimile: A = {1; 2; 3; 4; 5}; B = {2; 5; 6} şi C = {4; 5; 7; 8}. Pentru fiecare dintre elementele: 1; 2; 7; 8; 9, scrieţi cărei mulţimi aparţin şi căreia nu aparţin. (*nota* 5)

8. Este corect scrisă mulţimea: A = $\{1; 3; 4^0; 4; 2^2; 9; 25\}$? De ce? (*nota* 5)

9. Enumeraţi elementele fiecărei mulţimi, dată prin diagrama Venn-Euler:

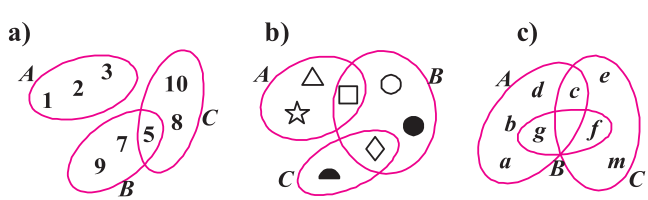


(*nota* 5)

10. Scrieţi următoarele mulţimi enumerând elementele acestora:
A = $\{x \in \mathbb{N} \mid x \le 5\}$; B = $\{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x \le 5\}$;
C = $\{x \in \mathbb{N} \mid 2 \le x \le 4\}$; D = $\{x \in \mathbb{N}^* \mid 0 \le x \le 6\}$. (*nota* 5)

11. Scrieţi elementele mulţimilor următoare:
a) mulţimea numerelor de două cifre identice;
b) mulţimea anotimpurilor;
c) mulţimea continentelor globului pământesc;
d) mulţimea cifrelor din sistemul zecimal de numeraţie;
e) mulţimea pătratelor perfecte de două cifre;
f) mulţimea literelor din cuvântul „auxiliar“;
g) mulţimea cifrelor numărului 123027153;
h) mulţimea resturilor ce se pot obţine la împărţirea unui număr natural la 7;
i) mulţimea colegilor de clasă născuţi în luna decembrie;
j) mulţimea planetelor din sistemul solar;
k) mulţimea lunilor anului calendaristic;
l) mulţimea ţărilor vecine României. (*nota* 5)

12. Urmăriţi diagramele următoare şi precizaţi în fiecare caz elementele mulţimilor A, B şi C.



(*nota* 5)

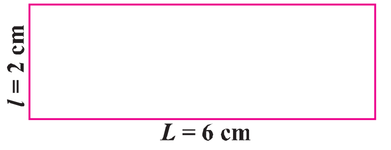
CAPITOLUL IV

RAPOARTE. PROPORŢII

IV.1. Rapoarte

Să observăm:

Lungimea dreptunghiului este de trei ori mai mare decât lăţimea sa.



Avem: $\frac{l}{L} = \frac{2\,\text{cm}}{6\,\text{cm}} = \frac{1}{3}$.

Spunem că $\frac{1}{3}$ este **raportul** dintre lăţimea şi lungimea dreptunghiului şi îl notăm $\frac{l}{L}$.

În general: Numărul raţional $a : b$, unde a şi b sunt numere raţionale pozitive, se numeşte **raportul** numerelor a şi b.

Se notează $\frac{a}{b}$, iar a şi b se numesc **termenii raportului.**

Să rezolvăm:

✪ Care este raportul dintre volumul unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 3 m; 2 m; 5 m şi volumul unui cub cu muchia de 10 m ?

Ionuţ a scris:

$V_{paralelipiped} = 3\text{ m} \cdot 2\text{ m} \cdot 5\text{ m} = 30\text{ m}^3$ şi $V_{cub} = (10\text{ dm})^3 = 1000\text{ dm}^3$, deci raportul este:

$\frac{V_{paralelipiped}}{V_{cub}} = \frac{30\text{m}^3}{1000\text{dm}^3} = \frac{3}{100} = 0{,}03$.

Ce greşeală a făcut Ionuţ? Cele două volume au fost exprimate cu unităţi de măsură diferite!

Răspuns corect: $\frac{V_{paralelipiped}}{V_{cub}} = \frac{30\,\text{m}^3}{1\,\text{m}^3} = 30$.

În general:

- **Raportul măsurilor** a două mărimi este raportul numerelor care exprimă cele două măsuri cu condiţia ca ambele măsuri să fie exprimate cu aceeaşi unitate de măsură.

Ce este scara unei hărţi?

- $\boxed{\textbf{Scara} = \frac{\textbf{distanţa de pe hartă}}{\textbf{distanţa reală}}}$.

Exerciţiu rezolvat:

✪ Distanţa între două localităţi, de pe o hartă cu scara de $\frac{1}{5000000}$ este de 18 cm. Care este distanţa dintre două localităţi pe teren?

Rezolvare: La un centimetru de pe hartă corespund 50 km pe teren.
Deci distanţa dintre cele două localităţi este egală cu $50 \cdot 18 = 900$ km.

Valoarea unui raport

Fie raportul $\frac{a}{b}$, numărul $c = a : b$ se numeşte **valoarea acestuia**.

Atenţie!

Valoarea unui raport nu se schimbă dacă înmulţim sau împărţim ambii termeni ai acestuia cu acelaşi număr raţional, nenul: $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$ şi $\frac{a}{b} = \frac{a : n}{b : n}$ $(n \neq 0)$.

EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. Scrieţi raportul numerelor şi apoi aflaţi valoarea acestuia:
a) 21 şi 63; **b)** 300 şi 50; **c)** 63 şi 54; **d)** 45 şi 90; **e)** 35 şi 49; **f)** 1,5 şi 0,75; **g)** $2\frac{1}{4}$ şi $\frac{1}{2}$; **h)** 0,(3) şi 1,(6); **i)** 1,1(6) şi 0,1(6). (*nota* 5)

2. Fie numerele $m = 36$ şi $n = 31$. Completaţi spaţiile punctate:
a) Raportul numerelor m şi n este egal cu ... .
b) Raportul numerelor n şi m este egal cu ... . (*nota* 5)

3. Victor are în ghiozdan 30 de creioane colorate: 12 albe, 6 negre, 7 albastre şi restul galbene. Scrieţi raportul dintre:
a) numărul creioanelor negre şi numărul creioanelor albe;
b) numărul creioanelor albastre şi numărul creioanelor negre şi albastre la un loc;
c) numărul creioanelor albe şi numărul total de creioane din cutie;
d) numărul de creioane care nu sunt negre şi numărul total de creioane din cutie. (*nota* 5)

4. Scrieţi raportul dintre cel mai mic număr de două cifre şi cel mai mare număr de două cifre distincte. (*nota* 7)

5. Se dau mulţimile A = {3, 4, 5, 6} şi B = {1, 3, 4, 5, 6}.
a) Scrieţi raportul $\frac{m}{n}$ a două numere impare unde $m \in$ A şi $n \in$ B.
b) Câte rapoarte care au valori diferite de forma $\frac{a}{b}$ există, unde $a \in$ A şi $b \in$ B.
c) Câte rapoarte de forma $\frac{x}{y}$ au valoarea 1, dacă $x \in$ A şi $y \in$ B?
d) Câte rapoarte de forma $\frac{c}{d}$ au valoarea 2, dacă $c \in$ A şi $d \in$ B? (*nota* 7)

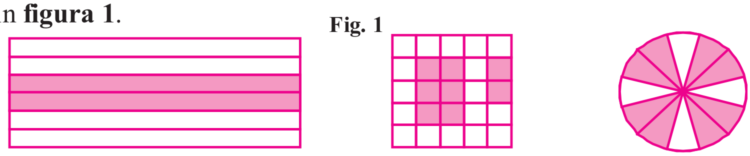
6. Lăţimea unui dreptunghi este de 8 m şi lungimea este de trei ori mai mare. Aflaţi raportul dintre: **a)** lungime şi lăţime; **b)** lăţime şi lungime; **c)** lăţime şi perimetru. (*nota* 5)

7. Aflaţi raportul dintre: **a)** 3,5 m şi 4,2 m; **b)** 13dm şi 4,5 m; **c)** $2\frac{1}{2}$ kg şi 500 g; **d)** 25 dm^2 şi 120 cm^2; **e)** 13 lei şi 650 bani; **f)** 3 ore şi 120 minute. (*nota* 5)

8. Un buştean cântăreşte 120 kg. Cât va cântări un alt buştean, de trei ori mai greu decât primul? Calculaţi raportul dintre masele celor doi buşteni. Ce observaţi?(*nota* 5)

9. Scrieţi, raportul dintre ariile suprafeţelor haşurate şi ariile suprafeţelor totale pentru fiecare din **figura 1**.

Fig. 1



a) **b)** **c)** (*nota* 5)

GEOMETRIE

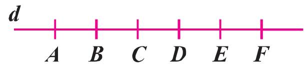
CAPITOLUL I

NOȚIUNI GEOMETRICE FUNDAMENTALE

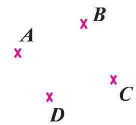
I.1. Recapitulare și aprofundare

Să ne amintim:

- Punctele situate pe aceeași dreaptă se numesc puncte **coliniare**.

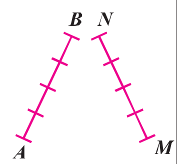


- Punctele care nu sunt situate pe aceeași dreaptă se numesc puncte **necoliniare**.
- Punctele A, B, C, D sunt necoliniare.



- Prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una.

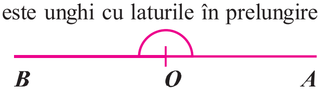
- **Distanța** dintre două puncte A și B, notată AB, este lungimea segmentului AB.
- Două segmente AB și CD sunt **congruente** dacă au aceeași lungime. $AB \equiv NM$.



- Punctul M este **mijlocul** segmentului AB dacă $M \in AB$ și $MA \equiv MB$.

- Unghiul AOB este unghi nul dacă semidreptele OA și OB coincid.

- Dacă semidreptele OA și OB sunt opuse, atunci unghiul $\sphericalangle AOB$ este unghi cu laturile în prelungire sau unghi **alungit**.



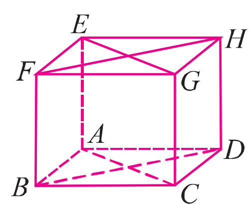
- Unghiul care nu e nici alungit, nici nul se numește **unghi propriu**.
- Două unghiuri $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle COD$ sunt congruente dacă au aceeași măsură $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

1. Se dau 9 puncte distincte două câte două, dintre care exact 4 sunt coliniare, iar celelalte sunt oricare trei, necoliniare. Câte drepte determină cele 8 puncte? (*nota* 5)

2. În paralelipipedul din figura alăturată numiți câte patru exemple de:

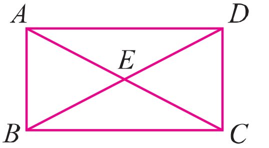
a) perechi de drepte paralele;
b) perechi de drepte necoplanare;
c) trei drepte concurente;
d) segmente congruente. (*nota* 5)



3. Fie A, B, C, D patru puncte coliniare în această ordine. Dacă $AB = 25$ cm; $BD = 82$ cm și $CD = 40$ cm, calculați lungimile segmentelor BC, AC și AD. (*nota* 5)

4. Lungimea unui dreptunghi este cu 20 cm mai mare decât lățimea lui. Dacă perimetrul dreptunghiului este egal cu 120 cm, aflați lungimile laturilor dreptunghiului. (*nota* 5)

5. Figura alăturată reprezintă un dreptunghi $ABCD$.
a) Scrieți segmentele congruente de pe figură.
b) Precizați mijloacele segmentelor (AC) și (BD). (*nota* 5)

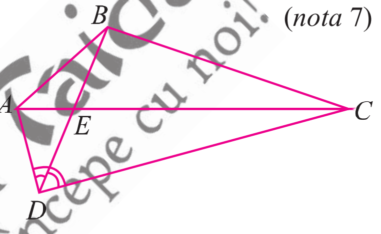


6. Fie A, B, C, D, E cinci puncte coliniare în această ordine astfel încât: $AB \equiv BC \equiv CD \equiv DE$.
a) Construiți un desen corespunzător.
b) Care sunt mijloacele segmentelor: AC, AE, CE și BD? (*nota* 5)

7. Dacă punctul C este mijlocul segmentului AB și D este mijlocul segmentului AC, aflați lungimea segmentului CD dacă $AB = 24$ cm. (*nota* 5)

8. Pe segmentul AB cu lungimea de 24 cm se consideră punctele C, D, E, F astfel încât: $\frac{AC}{AB} = \frac{3}{8}$; $\frac{AD}{AB} = \frac{3}{4}$; punctele E și F sunt mijloacele segmentelor AC și, respectiv, BD. Calculați lungimea segmentului EF. (*nota* 7)

9. Câte unghiuri proprii sunt în figura alăturată? Dar alungite? (*nota* 7)



10. Completați spațiile punctate:
a) Unitatea de măsură pentru unghi este ... .
b) Un unghi nul are măsura de ... grade.
c) Un unghi alungit are măsura de ... grade.
d) Un unghi drept are măsura de ... grade.
e) Submultiplii unghiului cu măsura de un grad sunt ... și ... . (*nota* 7)

11. Câte minute reprezintă $12°$? Dar $120°$? Dar $15°$ și $32'$? (*nota* 7)

12. Câte secunde reprezintă $18°$? Dar $23'$? Dar $24°$ și $15'$? (*nota* 7)

13. Calculați:

a) $25°15' + 27°25'$; **c)** $150° - 120°15'$; **e)** $39°44' : 4$;
b) $28° + 12°18'$; **d)** $25°13' \cdot 4$; **f)** $12°27' : 3$. (*nota* 7)

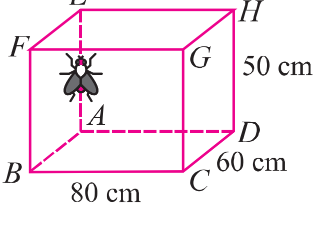
14. Suma măsurilor a două unghiuri este $125°$, iar diferența lor este $39°$. Aflați măsurile celor două unghiuri. (*nota* 7)

15. Măsurile unor unghiuri sunt exprimate în grade prin numere naturale consecutive. Dacă suma măsurilor acestor unghiuri este $36°$, aflați măsurile lor. (*nota* 7)

16. Se dau 5 puncte distincte. Cele 5 puncte pot determina exact 6 drepte dacă le unim două câte două? (*nota* 7)

Probleme practice

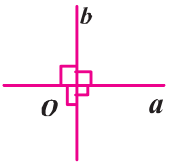
17. O cutie are formă de paralelipiped dreptunghic. O muscă se deplasează din vârful A al cutiei și, ajunge în punctul G (vârful opus), mergând pe drumul cel mai scurt numai pe laturile (muchiile) cutiei. Ce distanță parcurge musca și, câte variante are la dispoziție? (*nota* 9)



I.6. Drepte perpendiculare (definiție, notație, construcție); oblice; aplicații în poligoane şi corpuri geometrice, distanţa de la un punct la o dreaptă

Să recapitulăm:

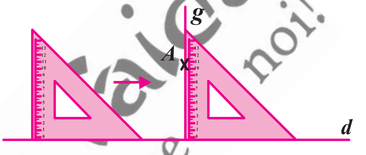
- Prin plierea unei foi de hârtie de două ori, astfel încât părţile suprapuse să coincidă de fiecare dată se obţin patru unghiuri drepte. Cele două drepte astfel obţinute se vor numi **drepte perpendiculare** (figura alăturată).
- Dacă dreptele a şi b sunt perpendiculare, atunci notăm $a \perp b$, în caz contrar vom nota $a \not\perp b$.



Cum construim perpendiculara pe o dreaptă dată, dintr-un punct exterior acesteia?

Fie dreapta d şi punctul A, unde $A \notin d$.

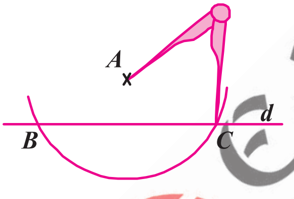
Utilizând numai echerul



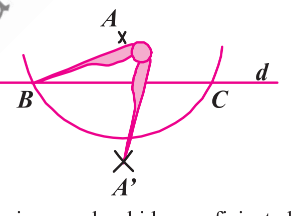
Am aşezat echerul cu o catetă pe dreapta d şi apoi l-am deplasat de-a lungul dreptei d până când cealaltă catetă a echerului conţine punctul A, după care trasăm dreapta g (figura alăturată).

Utilizând compasul şi o riglă negradată

a)



b)



Pasul 1: Fixăm vârful ascuţit al compasului în punctul A şi cu o deschidere suficient de mare, descriem un arc de cerc care să intersecteze dreapta d în două puncte distincte B şi C (figura **a)** de mai sus).

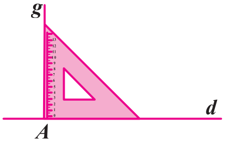
Pasul 2: Fixăm vârful ascuţit al compasului în punctul B şi apoi în punctul C cu aceeaşi deschidere şi trasăm câte un arc de cerc situate în semiplanul determinat de dreapta d care nu conţine punctul A (figura **b)** de mai sus).

Fixăm punctul A' în care se intersectează cele două arce de cerc.

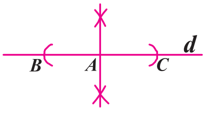
Dreapta AA' este perpendiculară pe dreapta d, adică $AA' \perp d$.

Cum construim perpendiculara pe o dreaptă dată, dintr-un punct care aparţine dreptei? ($A \in d$)

a)



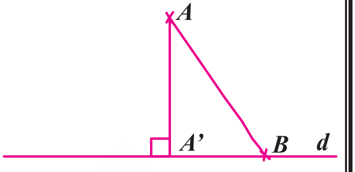
b)



Dacă $A \in d$ aşezăm echerul cu vârful drept în punctul A şi cu o catetă pe dreapta d (**figura a)**). Dacă utilizăm numai compasul şi o riglă negradată, punctele B şi C pe dreapta d le obţinem la pasul 1 construind câte două arce de cerc, cu aceeaşi deschidere a compasului de o parte şi de alta a punctului A, apoi repetăm construcţia de la pasul 2 (**figura b)**).

Ce înţelegem prin distanţa de la un punct la o dreaptă?

Dacă punctul A nu aparţine dreptei d ($A \notin d$) (figura alăturată), prin distanţa de la punctul A la dreapta d se înţelege lungimea segmentului cu capetele în punctele A şi A', unde $AA' \perp d$, $A' \in d$.
Punctul A' se numeşte **piciorul perpendicularei** duse din punctul A pe dreapta d.
Notăm $\text{d}(A, d) = AA'$, unde $AA' \perp d$ şi $A' \in d$.

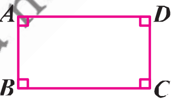


Dacă $B \in d$, atunci $\text{d}(B, d) = 0$. Dacă punctul $B \in d$ şi $B \neq A'$ spunem că dreapta AB este **oblică**. (**figura alăturată**)

Probleme rezolvate:

1. a) Desenaţi punctele A, B, C, D ştiind că $AB \perp BC$, $BC \perp CD$ şi $CD \perp DA$. (**figura alăturată**)

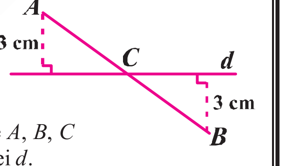
b) Ce figură este $ABCD$?



Rezolvare:

b) Se obţine patrulaterul $ABCD$ care are toate unghiurile drepte, deci este dreptunghi.

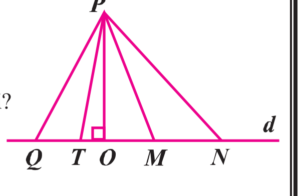
2. Desenaţi dreapta d şi punctele coliniare A, B şi C astfel încât punctele A şi B să fie situate la distanţa de 3 cm de dreapta d iar punctul C la distanţa de o cm de dreapta d (**figura alăturată**).



Rezolvare:

Observăm că punctul C se află situat pe dreapta d, iar pentru ca punctele A, B, C să fie coliniare trebuie ca A şi B să fie situate de o parte şi de alta a dreptei d.

3. Construiţi punctul P care nu se află pe dreapta d şi perpendiculara $PO \perp d$ cu $O \in d$, apoi consideraţi pe dreapta d punctele M, N, Q, T diferite de punctul O. Măsuraţi cu o riglă gradată lungimile oblicelor (PM), (PN), (PQ), (PT) şi lungimea perpendicularei (PO). Ce observaţi? Care dintre segmentele măsurate are lungimea mai mică?

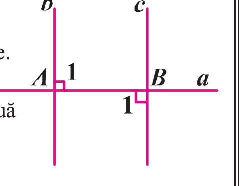


Rezolvare:

$PO < AM$; $PO < PN$; $PO < PT$; $PO < PQ$.

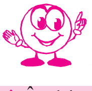
Concluzie: Lungimea perpendicularei PO (distanţa de la punctul P la dreapta d) este mai scurtă decât orice oblică dusă din punctul P.

4. Demonstraţi că două drepte perpendiculare pe aceeaşi dreaptă sunt paralele.



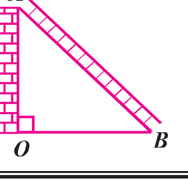
Rezolvare:

$m(\sphericalangle A_1) = m(\sphericalangle B_1) = 90^\circ$, deci dreptele b şi c formează cu secanta a două unghiuri alterne interne congruente şi, prin urmare, $b \parallel c$ (**figura alăturată**).

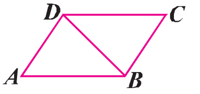


Reţineţi!

❖ Înălţimea zidului este mai mică decât lungimea scării.



TESTUL 20



1. Dacă în **figura alăturată** avem $[AB] \equiv [DC]$ şi $[AD] \equiv [BC]$, să se arate că $AB \parallel CD$ şi $AD \parallel BC$. (10p)(*nota* 5)

2. Dacă în **figura de mai sus** avem $AB \parallel CD$ şi $AD \parallel BC$, arătaţi că $[AB] \equiv [CD]$ şi $[AD] \equiv [BC]$. (10p)(*nota* 5)

3. În triunghiul ΔABC se duce bisectoarea $[AM$ a unghiului $\sphericalangle BAC$ şi $BN \parallel AM$ ($N \in AC$). Dacă $m(\sphericalangle BNA) = 48°$, calculaţi $m(\sphericalangle BAC)$. (10p)(*nota* 5)

4. Măsura unui unghi al unui triunghi isoscel este de 80°. Aflați măsurile celorlalte unghiuri ale triunghiului. (10p)(*nota* 7)

5. Dacă într-un triunghi, centrul de greutate coincide cu ortocentrul său, arătați că triunghiul este isoscel. (10p)(*nota* 5)

6. Fie triunghiul echilateral ABC. Dacă D este simetricul punctului C față de B, iar E este simetricul lui B față de C, aflați măsura unghiului DAE. (10p)(*nota* 7)

7. Fie triunghiul ΔABC isoscel, cu baza BC și punctele M și N, $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ astfel încât $[BM] \equiv [NC]$ şi $m(\sphericalangle B) = m(\sphericalangle C) = 50^\circ$. Paralela prin punctul A la dreapta BC intersectează BN în P şi CM în Q. Arătaţi că $\Delta ANP \equiv \Delta AMQ$. (10p)(*nota* 9)

8. a) Demonstrați că triunghiul obținut ducând prin vârfuri paralele la laturile opuse ale unui triunghi isoscel este tot isoscel.
b) Aceeași problemă pentru un triunghi echilateral. (10p)(*nota* 9)

9. Fie triunghiul ABC echilateral și punctele M și N astfel încât $M \in (AC)$, $N \in (AB)$ și $(AN) \equiv (MC)$.
a) Demonstrați că $\Delta ANC \equiv \Delta CMB$;
b) Dacă $BM \cap CN = \{P\}$, aflați măsura unghiului $\sphericalangle BPN$.

Timp de lucru: 1 oră şi 30 minute. Se acordă 10 puncte din oficiu.

REZULTATE. INDICAȚII. SOLUȚII. COMENTARII

ALGEBRĂ. CAPITOLUL I. TESTE INIȚIALE. RECAPITULARE ȘI COMPLETĂRI

TESTUL 1 **I. 1.** A. **2.** C. **3.** C. **4.** D. **5.** A. **6.** D. **7.** C. **8.** B. **II. 1. a)** 75; **b)** 38.
2. a) $(a, b) \in \{(0,15), (4,10), (8,5), (12,0)\}$; **b)** $(a, b) \in \{(1,4), (5,2), (9,1), (17,0)\}$. **3.** 6 ore.
4. Conform teoremei împărțirii cu rest avem relațiile: $n = 13a + 4$ și $n = 23b + 3$, de unde $n = 13b + (10b + 3)$ și $13b + (10b + 3) = 13a + 4$. Deci $13 / 10b - 1$, b minim implică $b = 4$ și $n = 95$.

TESTUL 2 **I. 1.** C. **2.** B. **3.** D. **4.** A. **5.** C. **6.** D. **7.** B. **8.** B. **9.** C. **II. 1.** 4027. **2.** Un elev cheltuie 2,6 lei + 1,4 lei = 4 lei, iar toți elevii cheltuie 4 lei · 24 = 96 lei. **3.** 7,1. **4.** 120 de sticle.

I. Operații cu numere naturale **1. a)** 5211; **b)** 3645; **c)** 4928; **d)** 1015; **e)** 1712; **f)** 1158; **g)** 677; **h)** 79412; **i)** 319; **j)** 13489; **k)** 386; **l)** 38254; **m)** 45428; **n)** 6834; **o)** 2502. **2. a)** $(27 + 63) + (58 + 42) = 100 + 100 = 200$; **b)** $7835 + (749 + 251) = 7835 + 1000 = 8835$ etc. **3.** Fie a, b, c cele trei numere. Avem relațiile: $a + b + c = 750$; $a + b = 384$ și $b + c = 492$, de unde $a + b + b + c = (a + b + c) + b = 876$, deci $b = 876 - 750 = 126$. $a = 384 - 126 = 258$ și $c = 492 - 126 = 366$. **4.** Numărul cel mic (scăzătorul) este egal cu $5182 - 4387 = 795$. Suma numerelor este 5977. **5. a)** $x = 482 - 352 = 130$; **b)** $x = 1000 - 382 = 618$; **c)** $x = 478 + 123 = 601$; **d)** $x = 500 - 150 = 350$; **e)** $x = 1500 - 831 = 669$; **f)** $x = 7132 + 389 = 7521$. **6. a)** 1242; **b)** 700; **c)** 16362; **d)** 11663; **e)** 4305; **f)** 86944; **g)** 826496; **h)** 187500; **i)** 416; **j)** 308; **k)** 20; **l)** 795. **7.** $25 \cdot 6 \cdot 20 = 3000$ *l* apă. **8. a)** baza 5, exponentul 3; **c)** baza 7, exponentul 0; ...; **i)** nu are sens. **9. a)** 7^2; **b)** 10^0; **c)** 10^{10}; **d)** 0^1; **e)** nu are sens; **f)** 3^2; **g)** 2012^{2013}; **h)** 8^0. **10. a)** 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256; 512, 1024, 2048, 4096; **b)** 0, 1, 1, 2000; **c)** 512, 1728, 81, 1000, 10000, 729; **d)** 2187, 121, 196, 27000, 15625, 303, 1; **e)** 512, 144, 15129, 0, 1, 1; **f)** 243, 729, 1331, 169, 62500; **g)** 25, 125, 625, 225, 3375; **h)** 49, 343, 2401, 289, 4913; **i)** 36, 216, 1296, 256, 4096; **j)** 64, 324, 784, 1444, 2304; **k)** 81, 361, 841, 1521, 2401; **l)** 10201, 10404, 10609, 10816, 1000000. **11. a)** 16; **b)** 32; **c)** 85; **d)** 160; **e)** 400; **f)** 68; **g)** 240; **h)** 144; **i)** 720; **j)** 680; **k)** 840; **l)** 234; **m)** 260; **n)** 1300; **o)** 800; **p)** 400. **12. a)** 14; **b)** 9; **c)** 40; **d)** 169; **e)** 64; **f)** 224; **g)** 1225; **h)** 324; **i)** 4. **13. a)** $9 - 8 + 1 = 2$; **b)** $64 - 32 + 1 = 33$; **c)** $343 - 64 - 9 = 270$; **d)** $14^2 = 196$; **e)** $(7 + 4 - 1)^2 = 100$; **f)** $5^3 - 1 = 124$; **g)** $49 - 25 - 16 = 8$; **h)** $64 - 32 - 16 = 16$; **i)** $81 - 27 - 9 - 3 - 1 = 41$. **14. a)** $9 + 361 + 484 = 36 + 289 + 529$ etc. **15. c)** $(3 \cdot 11)^2 + (4 \cdot 11)^2 = (5 \cdot 11)^2 \Leftrightarrow (3^2 + 4^2)11^2 = 5^2 \cdot 11^2$; **d)** $(3 \cdot 111)^2 + (4 \cdot 111)^2 = (5 \cdot 111)^2 \Leftrightarrow 3^2 \cdot 111^2 + 4^2 \cdot 111^2 = 5^2 \cdot 111^2$; **e)** $(3 \cdot 1111)^2 + (4 \cdot 1111)^2 = (5 \cdot 1111)^2$ etc. **16. a)** $2^5 > 2^3$; **b)** $4^7 < 6^7$; **c)** $4^2 = 2^4$; **d)** $4^3 = 2^6$; **e)** $4^3 = 8^2$; **f)** $5^3 > 10^2$; **g)** $11^2 < 2^7$; **h)** $10^2 < 11^2$; **i)** $3^5 = 243$ și $2^8 = 256$, deci $3^5 < 2^8$. **17. a)** 31; **b)** 59; **c)** 26; **d)** 33; **e)** 128; **f)** 483; **g)** 15; **h)** 11; **i)** 1452; **j)** 23; **k)** 158; **l)** 1200. **18. a)** câtul 28, restul 6; **b)** câtul 40, rest 3; **c)** câtul 135, rest 18; **d)** câtul 778, rest 26; **e)** câtul 121, rest 13; **f)** câtul 41, rest 500; **g)** câtul 151, rest 14; **h)** câtul 30, rest 92; **i)** câtul 98, rest 238. **19.** Fie a și b cele două numere. Avem $a = 20b + 5$ și $a + b = 152$, de unde $20b + 5 + b = 152$, adică $b = 7$ și $a = 145$. **20.** 1664 și 15. **21.** nu, deoarece $15 \nmid 220$. **22.** 1200 și 200. **23.** Conform **teoremei împărțirii cu rest** avem: $a = 15 \cdot 6 + r$, unde $r < 6$. Se obțin numerele: 90, 91, 92, 93, 94, 95. Sunt șase numere. **24.** Cel mai mic număr este $207 = 9 \cdot 23$ și cel mai mare este $792 = 9 \cdot 88$. Deci sunt $88 - 22 = 66$ de numere. **25. a)** $2000 = (9 : 9 + 999) \cdot (9 + 9) : 9$; **b)** $2000 = 333 \cdot (3 + 3) + (3 + 3) : 3$.

26. a)

t	0	1	3	2	2 h 40 min	3 h 20 min
d	0	45	15	30	20	10

27. Dacă numărul porților este x, la prima poartă deținutul face cel mult x încercări, face un semn la cheia folosită, la a doua poartă face cel mult $x - 1$ încercări etc. În total, face cel mult

TESTUL 7 **1.** 28; 22. **2.** 48 ani respectiv, 12 ani. **3.** 25%. **4. a)** 9,6; **b)** 34; **c)** 0,4. **5.** $\frac{1}{6}$. **6.** 75600 lei. **7.** 1%. **8. a)** 15840 lei, 39600 lei; **b)** 19620 lei, 49050 lei. **9.** 15%. **10.** 3571 lei. **11.** 45°. **12. a)** 108 ha, 115,2 ha şi, respectiv, 76,8 ha; **b)** 38,4%; **c)** 25,6%.

IV.3. Proporţii; proprietatea fundamentală a proporţiilor; proporţii derivate; aflarea unui termen necunoscut dintr-o proporţie **1. a)** Nu; **b)** Da; **c)** Da; **d)** Da; **e)** Nu; **f)** Da. **2. a)** Da; **b)** Da; **c)** Nu; **d)** Nu; **e)** Da; **f)** Da; **g)** Da; **h)** Da; **i)** Nu; **j)** Da; **k)** Nu. **3. a)** $0,24\cdot 5=1,2$; $0,6\cdot 2=1,2$. **4.** $\frac{1}{3}=\frac{4}{12};\frac{1}{2}=\frac{6}{12};\frac{2}{4}=\frac{3}{6}$ şi proporţiile derivate cu aceeaşi termeni. **5.** Nu. **6.** $a=6$, $b=8$, $c=12$, $d=4$, $e=9$, $f=16$. Generalizare: $a=6k$, $b=8k$, $c=12k$, $d=4k$, $e=9k$, $f=16k$, unde $k\in\mathbb{N}^*$. **7. a)** 6; **b)** $d=7$. **8. a)** $\frac{1}{2}$; **b)** 7; **c)** $\frac{3}{2}$. **9. a)** 2,4; **b)** 40; **c)** $\frac{8}{9}$; **d)** 24; **e)** $\frac{7}{9}$; **f)** 2,4; **g)** 1; **h)** 1; **i)** 2; **j)** $\frac{1}{12}$; **k)** $\frac{51}{440}$; **l)** $\frac{33}{50}$; **m)** $\frac{81}{71}$ **10. a)** 4; **b)** 11; **c)** 8; **d)** 9; **e)** 2; **f)** 5; **g)** 1; **h)** 2,25; **i)** 3; **j)** 2,75; **k)** 9,25; **l)** $\frac{5}{16}$; **m)** 2. **11. a)** $x=12$; **b)** $a\in\{0;5\}$ şi $x\in\left\{1;\frac{73}{75}\right\}$; **c)** $a=8$ şi $x=3$; **d)** $a=8$ şi $x=7$. **12.** Fie x capacitatea vasului mic. Avem: $\frac{x}{40}=\frac{3}{4}$, de unde $x=\frac{40\cdot 3^{(4}}{4}=30l$. **13.** Fie x distanţa parcursă în a II-a zi. Avem proporţia $\frac{9}{7}=\frac{40,5}{x}$, de unde $x=\frac{40,5\cdot 7}{9}=4,5\cdot 7=27,50$ km. **14.** Fie x numărul de minute în care a mers primul automobil. Avem proporţia $\frac{3}{5}=\frac{x}{90}$, de unde $x=\frac{90\cdot 3}{5}=18\cdot 3=54$ de minute. **15. a)** $\frac{5}{15}=\frac{8}{24}$; $\frac{8}{5}=\frac{54}{15};\frac{15}{5}=\frac{24}{8}$ etc. **16. a)** $\frac{15}{21}=\frac{25}{35}$; **b)** $\frac{5}{14}=\frac{25}{70}$; **c)** $\frac{5+7}{7}=\frac{25+35}{35}$ sau $\frac{12}{7}=\frac{60}{35}$; **d)** $\frac{5}{7}=\frac{5}{7}$. **17. a)** $\frac{3}{1}=\frac{12}{4}$; **b)** $\frac{3}{5-3}=\frac{12}{20+2}$ sau $\frac{3}{2}=\frac{12}{8}$; **c)** $\frac{3}{50}=\frac{12}{200}$. **18. a)** $\frac{20}{25}=\frac{28}{35}$ sau $\frac{16}{20}=\frac{28}{35}$;

b) $\frac{1}{5}=\frac{7}{35}$ (am împărţit numărătorii la 4) sau $\frac{4}{1}=\frac{28}{7}$ (am împărţit numitorii la 5);

c) $\frac{4}{20}=\frac{28}{140}$ (am înmulţit numitorii cu 4) sau $\frac{20}{5}=\frac{140}{35}$ (am înmulţit numărătorii cu 5).

19. a) $\frac{4}{5}=\frac{2,8}{3,5}$; **b)** $\frac{4}{0,5}=\frac{2,8}{0,35}$; **c)** $\frac{2}{5}=\frac{28}{70}$. **20. a)** $\frac{x-y}{y}=\frac{7-5}{5}$ sau $\frac{24}{y}=\frac{2}{5}$, de unde $y=\frac{24\cdot 5}{2}=60$ şi $x=60+24=84$; **b)** $\frac{x}{x+y}=\frac{7}{7+5}$, de unde $\frac{x}{36}=\frac{7}{12}$ şi $x=\frac{36\cdot 7}{12}=21$, iar $y=36-21=15$; **c)** $\frac{2x}{3y}=\frac{7\cdot 2}{5\cdot 3}$, de unde $\frac{2x}{3y}=\frac{14}{15}$ iar $\frac{2x+3y}{3y}=\frac{14+15}{15}$ şi $\frac{58}{3y}=\frac{29}{15}$. Deci $y=\frac{{}^{2}\cancel{58}\cdot\cancel{15}^{5}}{{}_{1}\cancel{29}\cdot\cancel{3}_{1}}=10$ şi $x=\frac{58-30}{2}=14$. **21.** Avem $7\frac{x}{y}+\frac{y}{y}=\frac{21}{16}$, de unde $7\frac{x}{y}=\frac{21}{16}-1=\frac{5}{16}$

16. a) $x \in \{-2; 0; 2; 4\}$; **b)** $x \in \{-7; -4; -3; -2; 0, 1, 2, 5\}$; **c)** $x \in \{0; 2\}$; **d)** $x \in \{-5; -3; -2; 0; 1; 3\}$; **e)** $x \in \{-2; 0\}$; **f)** $x \in \{-13; -8; -5; -4; -2; -1; 2; 7\}$; **g)** $x \in \{-7; 4\}$; **h)** $x \in \{-4; -1; 0; 1\}$; **i)** $x \in \{-3; -1; 0; 3; 5\}$; **j)** $x \in \{-16; -9; -4; -3; -1; 0; 5; 12\}$; **k)** $x = -1$. **17.** $A=\{-1; 0\}$; $B = \{-5; -2; -1; 0; 2; 3; 4; 7\}$ etc. **18.** $\frac{x^2+4}{x+2}=\frac{x^2+2x-2x-4+8}{x+2}=\frac{x(x+2)-2(x+2)+8}{x+2}=$

$= \frac{(x+2)(x-2)+8}{x+2} = x-2+\frac{8}{x+2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x+2/8 \Rightarrow x+2 \in \{\pm1; \pm2; \pm4; \pm8\}$ etc.

V.6. Puterea cu exponent natural a unui număr întreg nenul; reguli de calcul cu puteri

1. a) $(-4)^3$; **b)** $(-5)^4$; **c)** $(-12)^4$; **d)** $(+3)^5$; **e)** $(-1)^5$; **f)** $(+2)^6$. **2. a)** baza -3 şi exponentul 4 etc. **3. a)** $(-5)^8$; **b)** $(-11)^3$; **c)** $(+8)^8$; **d)** $(+3)^4$; **4. a)** $B = \{1; -2; 4; -8; 16; -32; +64\}$; **b)** $C = \{1; 25; -125; 625\}$. **5. a)** 4; 9; 125; 1296; 1; 1; 32; –1000; –343; –15625; 216; **b)** –4; –9; 9; –27; 4; +25. **6. a)** $(-2)^9$; **b)** $(-5)^{20} = 5^{20}$; **c)** $(-10)^{34} = 10^{34}$; **d)** $(-2)^{22} = 2^{22}$; **e)** 5^{11}; **f)** 30^4; **g)** $(-2)^0$; **h)** 24^5; **i)** $(2^2 \cdot 5^6 \cdot 7)^2$; **j)** 7^8; **k)** $(2 \cdot 5)^2$. **7. a)** $(-2)^6 = 64$; **b)** $(-3)^5 = -243$; **c)** $(-7)^2 = 49$; **d)** $(-7)^3 = -343$; **e)** $2^6 = 64$; **f)** $(-1)^{15} = -1$; **g)** $[(-6)^2]^2 = 6^4 = 1296$; **h)** $(-5)^2 = 25$; **i)** $(-2^{35}) : 2^{33} = -2^2 = -4$; **j)** $(-3^{16}) : 3^{14} = -3^2 = -9$; **k)** $(-5^3)^8 : 5^{22} = 5^{24} : 5^{22} = 5^2 = 25$; **l)** $(9^5 \cdot 9^8 : 9^6)^{14} : 9^{96} = 9^{98} : 9^{96} = 9^2 = 81$. **8. a)** 12; **b)** –2401; **c)** 0; **d)** –1; **e)** 1; **f)** 8; **g)** 1; **h)** –1. **9. a)** 348; **b)** –1; **c)** 1025; **d)** – 448; **e)** –64; **f)** 0. **11.** –104. **12. a)** –1900; **b)** 1190. **13. a)** 0; **b)** 0. **14.** –6. **15.** $E = -99$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. **16.** $n^8 : n^6 = n^2 = 25$, de unde $n \in \{-5; 5\}$. **17. a)** $n \in \{-2; 2\}$; **b)** $n \in \{-8; 8\}$; **c)** $n \in \{-6; 6\}$; **d)** $n \in \{-1; 1\}$; **e)** $n \in \{-1; 1\}$; **f)** $n = 3$; **g)** $n = -4$. **18.** Se arată că $a \cdot b > 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

19. $(-1)^{n+k} + (-1)^{n+k+1} = 0$, oricare ar fi $n, k \in \mathbb{N}$. **20.** $E(n) = \begin{cases} n, & \text{dacă } n \text{ este par} \\ -n, & \text{dacă } n \text{ este impar.} \end{cases}$

$S = -1 + 2 - 3 + 4 - 5 + ... + 1998 - 1999 + 1000 = (-1 + 2) + (-3 + 4) + ... + (-1997 + 1998) - 999 + 1000 = 999 - 1999 + 1000 = 0$. **21. a)** 999; **b)** –1000. **22.** n impar.

V.7. Ordinea efectuării operaţiilor şi folosirea parantezelor

1. a) –16; **b)** –39; **c)** –9; **d)** 15; **e)** 5; **f)** 56; **g)** 992. **2. a)** 8; **b)** –32; **c)** –80. **3. a)** 140; **b)** 46; **c)** 89; **d)** 100; **e)** –831; **f)** 24500. **4. a)** –1; **b)** –390; **c)** 40; **d)** 1788; **e)** –125; **f)** 265; **g)** –10. **5. a)** 160; **b)** –720; **c)** –1710; **d)** 176200; **e)** –9900; **f)** 275. **6. a)** –63; **b)** –231; **c)** 5544; **d)** –7; **e)** –40; **f)** –2; **g)** –1. **7. a)** 324; **b)** –621; **c)** –12502; **d)** –81; **e)** –29. **8. a)** –1000; **b)** –1000; **c)** –1000; **d)** 0. **9.** Fie $x_1, x_2, ..., x_k$ numerele negative din oricare scriere posibilă. Avem $(1 + 2 + ... + 2012) - 2 \cdot (x_1 + x_2 + ... + x_k) = \frac{2012 \cdot 2011}{2} - 2(x_1 + x_2 + ... + x_k) =$ par. Cum 2011 este număr întreg impar, orice scriere nu este posibilă. **10.** $a = [(-1) + (-1)(+1) + (+1)] + ... + [(-1) + (-1)(+1) + (+1)] + (-1) = -1$. **11.** 5^{50}. **12.** 3^{1006}.

V.8. Ecuaţii, probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuaţiilor în contextul mulţimii numerelor întregi

1. a) –3; **b)** 6; **c)** –2; **d)** –11; **e)** 4; **f)** 0; **g)** 7; **h)** –2; **i)** 0; **j)** 4; **k)** 7; **l)** –1; **m)** –1; **n)** ϕ; **o)** –5; **p)** ϕ; **q)** –4; **r)** –5. **2. a)** 4; **b)** –2; **c)** –1; **d)** –4; **e)** 15; **f)** 7; **g)** –2; **h)** 5; **i)** 3; **j)** ϕ; **k)** $x \in \mathbb{Z}$; **l)** $-\frac{19}{11}$; **m)** $x \in \{-3; 7\}$; **n)** $x \in \{-3; 1; 4\}$; **o)** $(x, y) \in \{(-8; 3), (2; 1), (-4; 7), (-2; -3)\}$; **p)** $(x, y) \in \{(-10; 6), (-5; 7), (-2; 10), (-1; 15), (1; -5), (2; 0), (5; 3), (10; 4)\}$; **q)** $x = -2$; $y = -1$. **3. a)** $x \in \{-2; 2\}$; **b)** $x \in \{2; 8\}$; **c)** $x \in \{5\}$; **d)** $x \in \{0; 10\}$; **e)** nu are soluţie; **f)** $x \in \{-6; -4\}$; **g)** $x = 6$; $y = -3$; **h)** nu are soluţie; **i)** $x = 10$. **4. a)** $x = 4$; $y = 3$; **b)** $x = 3$; $y = 2$; **c)** $x = 0$; $y = 3$; $z = 3$; **d)** $x = 0$; $y = 3$; $z = 2$. **5. a)** –2; +2; **b)** –9; +9; **c)** –6; +6; **d)** –4; +4; **e)** 0; **f)** ϕ; **g)** –3; +3; **h)** –6; +6. **6.** $x = 2$; $y = 2$. **7.** $(x,y) \in \{(1; -2); (1; 3); (-1; -1); (-1; 2); (3; 2); (3; -1); (-3; 0); (-3; 1); (5; 0); (5; 1)\}$. **8. a)** $x \in \{-7; 9; 11; 27\}$; **b)** $x \in \{-5; 6\}$. **9. a)** $S = \{-3; 5\}$; **b)** $S = \phi$; **c)** $S = \{-3; 2\}$; **d)** $S = \{-1; 0; 1\}$; **e)** $S = \varnothing$; **f)** $S = \varnothing$.

VI.4. Înmulţirea numerelor raţionale; proprietăţi **1. a)** $\frac{9}{5}$; **b)** $\frac{12}{5}$; **c)** $\frac{2}{3}$; **d)** $\frac{9}{2}$; **e)** 24; **f)** 35; **g)** 14; **h)** 35; **i)** $\frac{3}{4}$; **j)** $\frac{4}{3}$; **k)** 30; **l)** 24; **m)** 24; **n)** 0; **o)** 5; **p)** 5; **q)** 0.

2.

a)

	$\frac{9}{8}$	
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$	
$\frac{2}{3}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{4}{3}$

b)

	$\frac{49}{180}$		
$\frac{2}{3}$	$\frac{49}{120}$		
$\frac{4}{7}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{7}{20}$	
$\frac{2}{5}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{49}{60}$	$\frac{3}{7}$

3. a) $\frac{3}{5}$; **b)** $\frac{3}{10}$; **c)** $\frac{8}{3}$; **d)** 0; **e)** $\frac{4}{15}$; **f)** $\frac{7}{4}$; **g)** $\frac{33}{26}$; **h)** 100; **i)** 3; **j)** $\frac{4}{9}$; **k)** 33. **4. a)** $\frac{3}{10}$; **b)** 2; **c)** 34; **d)** $\frac{85}{3}$; **e)** $\frac{10}{3}$; **f)** 2; **g)** 0; **h)** $\frac{35}{37}$; **i)** $\frac{98}{75}$; **j)** 0. **5. a)** 3,5; **b)** 21,5; **c)** 23,5; **d)** 3415; **e)** 1500; **f)** 15; **g)** 1700; **h)** 12300; **i)** 21050; **j)** 1; **k)** 12340; **l)** 3450. **6. a)** 60; **b)** 945; **c)** 675; **d)** 24700; **e)** 750; **f)** 1080; **g)** 41248; **h)** 900; **i)** 315; **j)** 1250; **k)** 240; **l)** 2250. **7. a)** 1; **b)** 3; **c)** 4; **d)** 4; **e)** 4; **f)** 3; **g)** 2; **h)** 5; **i)** 6. **8. a)** 6,48; **b)** 1,536; **c)** 0,471; **d)** 3,608; **e)** 2,7; **f)** 0,88; **g)** 0,9375; **h)** 0,0003; **i)** 23,4; **j)** 3,75625; **k)** 0,4176; **l)** 0,000026. **9. a)** $\frac{2}{3}$; **b)** $\frac{18}{25}$; **c)** $\frac{7}{90}$; **d)** $\frac{2}{3}$; **e)** $\frac{1}{2}$; **f)** $\frac{5}{27}$; **g)** 3; **h)** $\frac{8}{11}$; **i)** $\frac{8}{3}$. **10.** Se observă că $1,25 \cdot 10 = 12,5 > 12,35$. $1,25 \cdot 11 = 13,75 > 12,35$. Putem lua $a \in \{11, 12, 13\}$. **11. a)** $8\frac{41}{75}$; **b)** $6\frac{203}{300}$; **c)** $4\frac{9}{25}$; **d)** $3\frac{7}{80}$; **e)** $9\frac{1}{2}$.
12. a) 1868,59; **b)** 16,87; **c)** 45,48.

13.

a)

	2,3814	
0,63	3,78	
0,2	3,15	1,2

b)

	74,536		
12,32	6,05		
2,8	4,4	1,375	
3,5	0,8	5,5	0,25

14.

a)

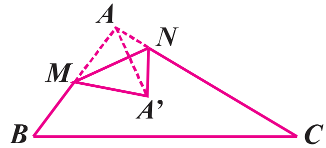
1,12	$\xrightarrow{\cdot 0,5}$	0,56	$\rightarrow$	0,28
$\downarrow \cdot 2$		$\downarrow$		$\downarrow$
2,24	$\rightarrow$	1,12	$\rightarrow$	0,56
$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$
4,48	$\rightarrow$	2,24	$\rightarrow$	1,12

b)

8	$\xrightarrow{\cdot 0,4}$	3,2	$\rightarrow$	1,28
$\downarrow \cdot 2,5$		$\downarrow$		$\downarrow$
20	$\rightarrow$	8	$\rightarrow$	3,2
$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$
50	$\rightarrow$	20	$\rightarrow$	8

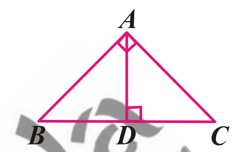
15. a) 3,298; **b)** 11,331; **c)** 31,2706; **d)** 33,91824. **16. a)** 6; **b)** 1; **c)** 7; **d)** 8230; **17. a)** $10\frac{1}{2}$ ha; **b)** $23\frac{1}{8}$ ha; **c)** 322500 lei. **18. a)** 107500 lei; **b)** $86\frac{1}{4}$ ha; **c)** 300000 km; **19. a)** $31\frac{23}{25}$; **b)** 912; **c)** $3\frac{4}{5}$; **d)** 5472. **20.** $\frac{1}{2000}$. **21. i) a)** $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$; $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$; ... ; $\frac{13}{14} < \frac{14}{15}$; $\frac{15}{16} < 1$, deci $m < n$;

12. Cum $[MA] \equiv [MA']$ şi $[NA] \equiv [NA']$ rezultă că MN este mediatoarea segmentului $[AA']$ şi atunci $MN \perp AA'$.

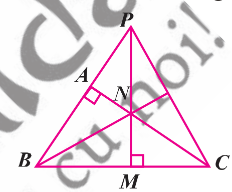


II.6. Înălţimile unui triunghi: definiţie, construcţie, concurenţa înălţimilor (fără demonstraţie)

6. Triunghiurile ABD şi ADC ($AD \perp BC$, $D \in (BC)$) sunt dreptunghice isoscele. Deci $(BD) \equiv (AD)$ şi $(AD) \equiv (DC)$ etc.
7. 55°. **8.** m($\sphericalangle A$) = 48°; m($\sphericalangle B$) = 82°; m($\sphericalangle C$) = 50°.



9. N este intersecţia înălţimilor AC şi MP ale triunghiului PBC deci N este ortocentrul său (**figura alăturată**). Urmează că $BN \perp PC$.



10. Fie $AC \cap BD = \{M\}$; $AE \perp BC$, $E \in (BC)$; $AB \perp FC$, $F \in AB$ şi $AE \cap FC = \{D\}$. (AE) şi (FC) fiind înălţimi ale ΔABC şi $AE \cap FC = \{D\}$. Deci BM este înălţime a ΔABC şi $BD \perp AC$.
11. m($\sphericalangle BCD$) = 90° – m($\sphericalangle B$) = 10°. m($\sphericalangle ACD$) = 90° – 70° = 20°. m($\sphericalangle BDC$) = m($\sphericalangle DB_1C$) + m($\sphericalangle DCB_1$) = 90° + 20° = 110° (**teorema unghiului exterior** $\Delta\ DB_1C$).
12. m($\sphericalangle ACB$) = 180° – (60° + 40°) = 80°. Fie $AE \perp BC$; $E \in (BC)$ şi $(AD$ bisectoarea $\sphericalangle BAC$, $D \in (BC)$. $\text{m}(\sphericalangle CAD) = \dfrac{\text{m}(\sphericalangle BAC)}{2} = 30°$; m($\sphericalangle CAE$) = 90° – 80° = 10°. Deci m($\sphericalangle DAE$) = = 30° – 10° = 20°. **13.** Mai întâi construiţi triunghiurile dreptunghice ADC şi BCD.
14. m($\sphericalangle A$) = 70°; m($\sphericalangle B$) = 60°; m($\sphericalangle C$) = 50°; **b)** Dacă m($\sphericalangle BAC$) > 90°, se obţine: m($\sphericalangle BAC$) = 110°; m($\sphericalangle B$) = 20°; m($\sphericalangle C$) = 50°. Dacă m($\sphericalangle B$) > 90° şi m($\sphericalangle C$) > 90° nu se obţin soluţii. **15.** m($\sphericalangle A$) = 60°; m($\sphericalangle B$) = 80° şi m($\sphericalangle C$) = 40°. **16. a)** A; **b)** F; **c)** F; **d)** A.
17. AC şi OM sunt înălţimi în ΔBCM etc.

II.7. Medianele unui triunghi: definiţie, construcţie, concurenţa medianelor (fără demonstraţie)

2. a) $BB' = \dfrac{BG}{2} \cdot 3 = \dfrac{6}{2} \cdot 3 = 9$ cm; **b)** $CG = GC' \cdot 2 = 8$ cm; **c)** $AA' = 3 \cdot GA' = 15$ cm; **d)** $CC' = \dfrac{CG}{2} \cdot 3 = \dfrac{8}{2} \cdot 3 = 12$ cm. **4.** Construiţi mai întâi punctul C' mijlocul segmentului (AB), apoi semidreapta $(C'X$ pe care luaţi punctele G şi C astfel încât $GC' = \dfrac{4}{2} = 2$ cm şi $CG = 4$ cm. Cum semidreapta $(C'X$ este arbitrară (oarecare) există o infinitate de triunghiuri cu proprietăţile date. **5.** $AD = \dfrac{AG}{2} \cdot 3 = 18$ cm, $BE = 3 \cdot GE = 21$ cm. Deci $AD + BE = 39$ cm. **6. a)** Construim mai întâi ΔMNQ (cazul **L.L.L.**) care are $MN = 4$ cm, $MQ = 2$ cm şi $NQ = 3$ cm. Apoi prelungim segmentul (NQ) cu segmentul $QP = 3$ cm astfel încât $Q \in (NP)$ etc. **7.** Presupunem figura construită şi observăm că putem mai întâi construi triunghiul dreptunghic ADM (cazul **C.I.**). Apoi, de o parte şi de alta a punctului M pe dreapta DM cu compasul construim punctele B şi C astfel încât $BM = MC = 8$ cm etc. **8.** Duceţi paralele prin punctele A, B, C la laturile opuse în triunghiul ABC. Utilizaţi cazul **L.U.L.** etc. şi perechi de unghiuri alterne interne congruente.

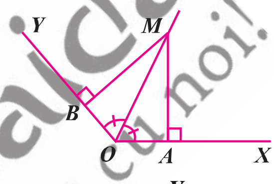
9. (AM fiind mediană în ΔABC şi G centrul de greutate al ΔABC rezultă că $AG = \dfrac{2}{3} AM$,

$= m(\sphericalangle C'B'M') = 180°$. **70. a)** Cazul L.U.L.; **b)** $\Delta APB \equiv \Delta DPC$ (L.U.U.); **c)** Cazul L.L.L.

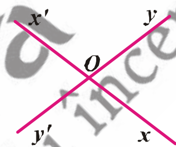
71. $\Delta MAD \equiv \Delta MCD$ (L.U.L.), deci $\widehat{MAB} \equiv \widehat{MCD}$ (de unde $\widehat{MAO} \equiv \widehat{MCO}$) şi $\widehat{MBA} \equiv \widehat{MDC}$. Avem şi $[AD] \equiv [BC]$ şi de aici rezultă că $\Delta AOD \equiv \Delta COB$ (U.L.U.) deci $[OB] \equiv [OD]$. Din $[OB] \equiv [OD]$, $\widehat{D} \equiv \widehat{B}$, $[MB] \equiv [MD]$ rezultă $\Delta MOB \equiv \Delta MOD$ (L.U.L.). Deci $\widehat{BOM} \equiv \widehat{DOM}$ şi urmează că $[OM$ este bisectoarea $\widehat{XOY}$.

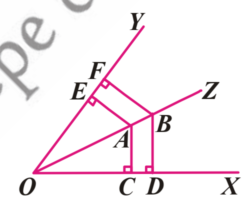
TESTUL 18 **1.** Se analizează cazurile: **I.** $[AB] \equiv [AC]$ **a)** P = 28 cm; **b)** triunghiul nu există $AB + AC = BC$; **II.** $[AC] \equiv [BC]$ **a)** P = 32 cm; **b)** P = 25 cm. **3.** $AM = 2$ cm. **4.** 44°. **5. C).** **6. a)** Se arată că $\Delta ABD \equiv \Delta BAC$ (U.L.U.); **b)** $\Delta DOA \equiv \Delta COB$ (U.L.U.). **7. a)** Se arată că $\Delta ABN \equiv \Delta CBM$ (L.U.L.); **b)** Se arată că $\Delta CAM \equiv \Delta ACN$, de unde $\sphericalangle CAN \equiv \sphericalangle ACM$. **8.** Se arată că $\Delta BAC \equiv \Delta MAN$ (L.U.L.).

II.9. Proprietatea punctelor de pe bisectoarea unui unghi



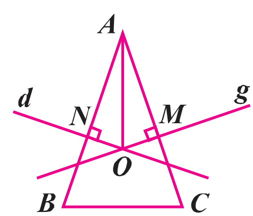
1. $M \in$ bisectoarei $\sphericalangle XOY \Rightarrow (MA) \equiv (MB)$. $\Delta OMA \equiv \Delta OMB$ (C.I.) $\Rightarrow \sphericalangle AMO \equiv \sphericalangle OMB$ etc.
2. Punctul P se află şi pe bisectoarea $\sphericalangle ABC$ (într-un triunghi bisectoarele sunt concurente). Deci $\Delta BPF \equiv \Delta BPE$ (I.C.), de unde $(BE) \equiv (BF)$ etc.
3. $IM = d(I, AC) = d(I, AB) = 10$ cm. De ce?





4. Afirmaţia nu este corectă. M poate fi pe bisectoarea oricăreia din cele 4 unghiuri proprii determinate de dreptele OX şi OY. **5.** $\Delta BOD \equiv \Delta BOF$ (**I.U.**) şi $\Delta AOE \equiv \Delta AOC$ (**I.U.**), de unde $(OD) \equiv (OF)$ şi $(OE) \equiv (OC)$, deci $OD - OC = OF - OE$, adică $(CD) \equiv (EF)$. **6.** Cazul $E \in (AD)$. $\Delta ABD \equiv \Delta ACD$ (**L.U.L.**), de unde $(BD) \equiv (CD)$ şi $m(\sphericalangle ADB) =$ $= m(\sphericalangle ADC)$. Din $(BD) \equiv (CD)$; $m(\sphericalangle EDB) = m(\sphericalangle EDC)$ şi $(ED) \equiv (ED)$ rezultă $\Delta BDE \equiv$ $\equiv \Delta CDE$ (**L.U.L.**), de unde $m(\sphericalangle BED) = m(\sphericalangle DEC)$, adică $(ED$ este bisectoarea $\sphericalangle BEC$. Cazul $D \in (AE)$. $\Delta BAE \equiv \Delta CAE$ (**L.U.L.**) etc. **7.** Punctul de intersecţie a dreptei AB cu bisectoarea unghiului XOY. **8.** Este punctul de intersecţie a dreptei d cu bisectoarea unghiului XOY, dacă acesta există (dacă d este paralelă cu bisectoarea unghiului XOY, atunci problema nu are soluţie). **9.** Mulţimea punctelor egal depărtate de dreptele a şi b este reunirea bisectoarelor celor 4 unghiuri proprii determinate de cele două drepte. Cum bisectoarele a două unghiuri opuse la vârf sunt incluse în aceeaşi dreaptă, această mulţime este, de fapt, reuniunea a două drepte concurente. Evident, d intersectează cel puţin una din aceste drepte (axioma lui Euclid). Numărul maxim de puncte este 2. **10.** Fie J punctul de intersecţie a bisectoarelor unghiurilor CBX şi BCY. Rezultă că el se află la distanţe egale faţă de dreptele AB, BC, CA. Cum J este interior unghiului BAC şi egal depărtat de dreptele AB şi AC, rezultă că el aparţine bisectoarei unghiului BAC. **Observaţie:** Punctul J se numeşte ***centrul cercului exînscris*** ΔABC. Pentru orice triunghi există 3 cercuri exînscrise.

II.10. Proprietatea punctelor de pe mediatoarea unui segment

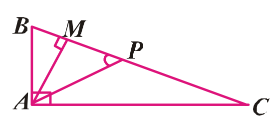


1. $\Delta AMN \equiv \Delta BMN$ (L.L.L.) $\Rightarrow \sphericalangle MAN \equiv \sphericalangle MBN$.
2. Punctele M, N, P, Q sunt egal depărtate de punctele A şi B, deci ele sunt situate pe mediatoarea segmentului $[AB]$.
3. $(PB) \equiv (PC) \equiv (PD) \equiv (PA)$ etc. **4.** Fie dreptele d şi g mediatoarele laturilor (AB) şi (AC); $\{O\} = d \cap g$; $g \cap (AC) = \{M\}$ şi $d \cap (AB) = \{N\}$. $\Delta AOM \equiv \Delta AON$ (**I.U.**), de unde $(AM) \equiv (AN)$. Însă $(AM) \equiv (MC)$; $(AN) \equiv (NB)$, deci $(AB) \equiv (AC)$.

II.13. Proprietăţi ale triunghiului dreptunghic
- cateta opusă unghiului de 30° – teorema directă şi reciprocă;
- mediana corespunzătoare ipotenuzei – teorema directă şi reciprocă

1. a) $90° - 72°13' = 17°47'$; **b)** $27°$; **c)** $45°$; **d)** $m(\sphericalangle P) = 180° - 132° = 48°$, $m(\sphericalangle N) = 90° - 48° = 42°$; **e)** $m(\sphericalangle MNP) = 180° - 98° = 82°$, $m(\sphericalangle P) = 90° - 82° = 8°$. **2. a)** $m(\sphericalangle A) = 60°$, $AC = 2 \cdot AB = 2 \cdot 8$ cm $= 16$ cm; **b)** $m(\sphericalangle C) = 30°$, $AB = \frac{AC}{2} = \frac{30}{2} = 15$ cm; **c)** $m(\sphericalangle A) = 30°$, $AC = 2 \cdot BC = 20$ cm.

3. Dacă x şi y sunt măsurile unghiurilor ascuţite avem: $\frac{x}{90-x} = \frac{y}{180-y} = \frac{x+y}{270-(x+y)} = \frac{90}{180} = \frac{1}{2}$, de unde $x = 30°$, $y = 60°$. cazul $\frac{x}{90-y} = \frac{y}{180-x}$ conduce la $x + y = 90°$? **5.** Utilizaţi proprietăţile triunghiului echilateral. **6.** Fie a, b, c lungimile laturilor triunghiului. Avem: $\frac{a}{5} = \frac{b}{10} = \frac{c}{15} = \frac{a+c}{5+15} = \frac{a+c}{20}$, de unde $b = \frac{a+c}{2}$. **7.** Fie a, b, c măsurile unghiurilor triunghiului. Avem: $\frac{a}{999} = \frac{b}{1000} = \frac{c}{1999} = \frac{a+b}{999+1000} = \frac{a+b}{1999} \Rightarrow a + b = c$, dar $a + b + c = 180°$, deci $c = 90°$. **Generalizare.** Să se arate că dacă măsurile unghiurilor unui triunghi sunt direct proporţionale cu numerele x, y, şi $x + y$, atunci triunghiul este dreptunghic ($x, y > 0$). **8. a)** $20°$, $70°$, $90°$; **b)** $BC = 8$ cm. **9.** $AM = \frac{BC}{2}$. **10.** Fie O mijlocul ipotenuzei (BC). Avem $OA = \frac{BC}{2} = OC$, deci triunghiul OAC este isoscel şi $m(\sphericalangle OAC) = m(\sphericalangle OCA) = 15°$, iar $m(\sphericalangle AOM) = 30°$ (**teorema unghiului exterior**). În ΔAMO dreptunghic avem $AM = \frac{OA}{2}$ (cateta care se opune unghiului de 30° are lungimea egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei). Deci $AM = \frac{OA}{2} = \frac{BC}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{BC}{4}$. **11.** Fie M mijlocul laturii BC. Se arată că triunghiul ΔAMB este echilateral şi triunghiul ΔAMC este isoscel, cu $m(\sphericalangle MCA) = 30°$. **12.** $m(\sphericalangle BAD) = 90^\circ - m(\sphericalangle ABC) = 30^\circ$ deci $BD = \frac{AB}{2} = 5$ cm (**teorema unghiului de 30º**). În ΔABC, $m(\sphericalangle C) = 90° - m(\sphericalangle B) = 30°$, deci $BC = 2AB = 20$ cm (**teorema unghiului de 30°**). Prin urmare, $DB = BC - BD = 15$ cm.



13. a) Fie punctul $O \in (MC)$ astfel încât $(MB) \equiv (MO)$. În ΔABO, înălţimea AM este şi mediană, deci triunghiul este isoscel, de unde $(AB) \equiv (AO)$. Cum $m(\sphericalangle ABO) = 60°$ rezultă că ΔBAO este echilateral. Deci $AO = OB = \frac{BC}{2}$, de unde rezultă că $m(\sphericalangle BAC) = 90^\circ$. (**mediana are lungimea egală cu jumătate din latura corespunzătoare**). $m(\sphericalangle ACB) = 90^\circ - m(\sphericalangle ABC) = 30^\circ$. **b)** Fie punctul P mijlocul ipotenuzei (BC). Avem $AM = \frac{BC}{4} = \frac{BP}{2} = \frac{AP}{2}$ (mediana are lungimea egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei). În triunghiul dreptunghic AMP avem $AM = \frac{AP}{2}$, de unde $m(\sphericalangle APM) = 30^\circ$ (**teorema unghiului de 30º**) (**figura alăturată**).