ARTUR BĂLĂUCĂ

ARITMETICĂ

Teme pentru centre de excelență

+

233
MODELE DE PROBLEME REZOLVATE

+

1168
DE PROBLEME SEMNIFICATIVE PENTRU OLIMPIADE, CONCURSURI ŞI CENTRE DE EXCELENȚĂ

Clasa a V-a

Ediţia a XI-a

În conformitate cu noua programă de olimpiadă!

EDITURA TAIDA – 2020
– IAŞI –

Cuprins

CAPITOLUL I

NUMERE NATURALE

I.1. Operații cu numere naturale.Compararea şi ordonarea numerelor naturale

Proprietăţile inegalităţii între numere naturale

➲ **Reţineţi!** Numărul natural a este mai mare sau cel mult egal cu numărul natural b dacă există un număr natural c astfel încât să avem $a = b + c$.

1. $a \leq a$, oricare ar fi a număr natural (**reflexivitatea**);

2. $a \leq b$ şi $b \leq a \Rightarrow a = b$ (**antisimetria**);

3. $a \leq b$ şi $b \leq c \Rightarrow a \leq c$ (**tranzitivitatea**);

4. $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$ şi $a - d \leq b - d$ (oricare ar fi c şi d numere naturale cu $a \geq d$ şi $b \geq d$);

5. $a \leq b \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$ (oricare ar fi c număr natural);

6. $a \leq b \Rightarrow a : c \leq b : c$ (oricare ar fi c număr natural nenul, iar a: c şi b: c sunt numere naturale);

7. Oricare ar fi numerele naturale a şi b are loc una şi numai una din relaţiile: $a > b$ sau $a = b$ sau $a < b$.

Probleme rezolvate:

1. Pe o tablă sunt scrise numerele 1, 2, 3, 6, 7, 9, 10, 23, 48. Dan și Ana au șters fiecare câte patru numere și au observat că suma numerelor șterse de Dan este de patru ori mai mare decât suma numerelor șterse de Ana.

a) Ce număr a rămas pe tablă?

b) Ce numere a șters fiecare copil?

(Concursul „Florica T. Câmpan", etapa județeană, Iași, 2012)

Rezolvare:

a) Notăm cu a, b, c, d numerele șterse de Dan și cu e, f, g, h, $e < f < g < h$ cele șterse de Ana și cu p numărul care a rămas pe tablă. Avem: $a + b + c + d = 4 \cdot (e + f + g + h)$ și $5 \cdot (e + f + g + h) + p = 109$, **(1)**. Prin încercări se obține $p = 9$, soluție unică.

b) Dacă $p = 9$, din **(1)** rezultă $e + f + g + h = 20$. Se observă că $e \geq 3$ conduce la situații imposibile. Dacă $e = 1$, atunci $f + g + h = 19$, de unde $f = 2$, $g = 7$ și $h = 10$ sau $f = 3$, $g = 6$, $h = 10$. $e = 2$, conduce la $f + g + h = 18$, imposibil. Prin urmare, Ana a șters numerele 1, 2, 7, 10, iar Dan numerele 3, 6, 23 și 48 sau Ana a șters numerele 1, 3, 6, 10 iar Dan numerele 2, 7, 23 și 48.

2. Se numește număr „împerecheat" un număr natural scris în baza zece care are patru cifre și este format din două perechi de cifre egale (exemple: 5577, 7755, 5555, 5757 etc.).

a) Găsiți toate numerele „împerecheate" care au suma 2011.

b) Dacă se așază într-un șir toate numerele „împerecheate" în ordine crescătoare, aflați primii patru și ultimii patru termeni ai șirului.

c) Câte numere „împerecheate" există? Justificați răspunsul!

(Concursul „Matematica, de drag", Bistrița, 2013, Cătălin Budeanu)

Rezolvare:

a) $1001 + 1010 = 2011$.

b) 1001, 1010, 1100, 1111, ..., 9966, 9977, 9988, 9999.

c) Numerele sunt formate cu cifrele a și b, unde a și b sunt numere nenule distincte. Avem 6 numere împerecheate formate cu cifrele a și b: $\overline{aabb}$, $\overline{abab}$, $\overline{abba}$, $\overline{bbaa}$, $\overline{baba}$, $\overline{baab}$. Dacă $a = 1$ și b ia valorile 2, 3, ..., 9 avem $8 \cdot 6 = 48$ numere împerecheate. Dacă $a = 2$ și b ia valorile 3, 4, ..., 9 avem $7 \cdot 6 = 42$ numere împerecheate. Dacă $a = 3$ și b ia valorile 4, 5, ..., 9 avem $6 \cdot 6 = 36$ numere împerecheate. Dacă $a = 4$ și b ia valorile 5, 6, 7, 8, 9 avem $6 \cdot 5 = 30$ numere împerecheate. Dacă $a = 5$ și b ia valorile 6, 7, 8, 9 avem $6 \cdot 4 = 24$ numere împerecheate.

Rezolvare:

Cazul I. $A=\overline{abc}$ conduce la relaţia $101a + 11b + 2c + a \cdot b \cdot c = 106$, care nu dă soluţie.

Cazul II. $A=\overline{ab}$ conduce la ecuaţia $11a + 2b + a \cdot b = 106 \Leftrightarrow a \cdot (b + 11) + 2 \cdot (b + 11) = 128 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (a + 2) \cdot (b + 11) = 128$. Cum $b + 11 \geq 11$, avem $b = 5$ şi $a = 6$, de unde $A = 65$.

Cazul III. $A = a$, a cifră, nu dă soluţii.

22. Să se determine numerele naturale $\overline{abc}$, scrise în baza 10, astfel încât
$\overline{abc}=\overline{cba}+\overline{ab}+\overline{ba}+\overline{ca}+\overline{ac}+\overline{bc}+\overline{cb}$.

(Concursul „Matematica, de drag", Bistriţa, 2010, Dumitru Acu)

Rezolvare:

Relaţia dată conduce la $100a + 10b + c = 23a + 32b + 122c$. Adică $77a = 22b + 121c \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 7a = 2b + 11c$. Pentru că $7a \leq 7 \cdot 9 = 63 \Rightarrow c \leq 5$.

$c = 1$, duce la $7a = 2b + 11 = 2b + 4 + 7 = 2(b + 2) + 7$ de unde rezultă $(b + 2) \vdots 7$, adică $b = 5$, $7a = 21$ şi $a = 3$; avem 351.

$c = 2$, duce la $7a = 2b + 22 = 2b + 8 + 14 = 2(b + 4) + 14$ apoi $(b + 4) \vdots 7$, prin urmare $b = 3$ şi $a = 4$; avem 432.

$c = 3$, duce la $7a = 2b + 33 = 2b + 5 + 28$, $(2b + 5) \vdots 7$, $b = 1$ şi $a = 5$; $2b + 35 - 2 = 2(b - 1) + 35$, $(b - 1) \vdots 7$, $b = 8$ şi $a = 7$. Se obţin numerele 513 şi 783.

$c = 4$, $7a = 2b + 44 = 2(b + 1) + 42$, $b = 6$ şi $a = 8$; avem 864.

$c = 5$, $7a = 2b + 55 = 2b + 6 + 49 = 2(b + 3) + 49$, cu $b = 4$ şi $a = 9$; 945 soluţie.

23. Notăm cu $s(n)$ suma cifrelor numărului natural n scris în baza 10. Determinaţi toate numerele n pentru care $n - s(n) = 2007$. **(Concursul „Tinere speranţe", Baia Mare, 2010)**

Rezolvare:

Din $n - s(n) = 2007$ rezultă că n are 4 cifre, adică este de forma $n=\overline{abcd}$.
Deci $(1000a + 100b + 10c + d) - (a + b + c + d) = 2007$, de unde rezultă relaţia $111a + 11b + c = 223$.
Cum $11b \leq 99$ şi $c \leq 9$ rezultă că $a = 2$ şi $11b + c = 1$, de unde $b = 0$ şi $c = 1$, iar d este o cifră oarecare.

EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1.[*] Suma dintre cel mai mare şi cel mai mic număr de patru cifre distincte este:
A) 10890; **B)** 10899; **C)** 10898; **D)** 10900.

2. Reconstituiţi înmulţirea: **a)**
$$\begin{array}{r} ***3 \ \times \\ ** \\ \hline ***7 \\ **0* \\ \hline 3****7 \end{array}$$
b)
$$\begin{array}{r} 46 \ \times \\ ** \\ \hline *** \\ *** \\ \hline 1*78 \end{array}$$
unde steluţele reprezintă cifre scrise în baza 10.

3. Scrieţi în ordine crescătoare toate numerele naturale de două cifre care se pot forma cu cifrele: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 şi care se împart exact la 3.

4. În expresia $8 \cdot 30 + 48 : 8 + 4$ puneţi paranteze astfel încât să se obţină:
a) cel mai mic număr posibil; **b)** cel mai mare număr posibil.

---

[*] La problema **1** numai un răspuns este corect.

I.2. Factorul comun

➲ ***Rețineți!*** $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$ pentru orice a, b, c numere naturale, **(1)**.

$a \cdot b - a \cdot c = a \cdot (b - c)$ pentru orice a, b, c numere naturale cu $b \geq c$, **(2)**.

Relațiile **(1)** și **(2)** exprimă faptul că înmulțirea numerelor naturale este **distributivă** față de adunare și scădere.

În ambele cazuri spunem că l-am scos în factor comun pe a.

Relațiile **(1)** și **(2)** se pot extinde pentru un număr finit de termeni.

Avem $ab_1 + ab_2 + ab_3 + ... + ab_n = a(b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n)$.

Probleme rezolvate

1. Să se arate că:
a) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (Am notat $a^2 = a \cdot a$).
b) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, oricare ar fi a și b numere naturale.

Rezolvare:
a) $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a(a + b) + b(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
b) $(a + b)(a - b) = a(a - b) + b(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$.

Observație: Rețineți relațiile din problema **1**, ele sunt foarte mult utilizate din acest moment.

2. Știind că $a = 20$ și $ab + ac + 10b + 10c = 90$, aflați numerele naturale b și c.

Rezolvare:
$ab + ac + 10b + 10c = a(b + c) + 10(b + c) = (b + c)(a + 10) = (b + c) \cdot (20 + 10) = 30 \cdot (b + c) = 90$, de unde $b + c = 3$. Avem $b = 0$, $c = 3$ sau $b = 1$, $c = 2$ sau $b = 2$, $c = 1$ sau $b = 3$ și $c = 0$.

3. Suma unor numere naturale impare consecutive este egală cu 144. Aflați numerele.

Rezolvare:
Mai întâi, observăm că numărul numerelor este par, deoarece suma lor este pară. Dacă notăm primul număr cu $2p + 1$ avem relația:
$(2p + 1) + (2p + 3) + (2p + 5) + ... + [2p + (2k - 1)] + [2p + (2k + 1)] = 144$, unde k este număr natural impar.
$\underbrace{(2p + 2p + ... + 2p)}_{(k+1)\text{ termeni}} + [1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1)] = 144$, **(1)**. Calculăm suma din paranteza dreaptă.

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) =$
$= (2 \cdot 0 + 1) + (2 \cdot 1 + 1) + (2 \cdot 2 + 1) + \ldots + (2k + 1) =$
$= (2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \ldots + 2 \cdot k) + \underbrace{(1 + 1 + ... + 1)}_{(k+1)\text{ termeni}} =$
$= 2 \cdot (1 + 2 + \ldots + k) + (k + 1) =$
$= 2 \cdot k \cdot (k + 1) : 2 + (k + 1) =$
$= (k + 1) \cdot (k + 1)$.

Relația **(1)** devine $2p \cdot (k + 1) + (k + 1) \cdot (k + 1) = 144$, de unde $(k + 1)(2p + k + 1) = 144$, **(3)**.
Analizăm cazurile:
$\underline{k = 1}$, din **(3)** obținem: $2(2p + 2) = 144$, de unde $2p + 2 = 72$ și $p = 35$. Numerele sunt $2 \cdot 35 + 1$ și $2 \cdot 35 + 3$, adică 71 și 73.
$\underline{k = 3}$, din **(3)** obținem: $4(2p + 4) = 144$, de unde $2p + 4 = 36$ și $p = 16$. Numerele sunt: $2 \cdot 16 + 1$, $2 \cdot 16 + 3$, $2 \cdot 16 + 5$ și $2 \cdot 16 + 7$, adică 33, 35, 37 și 39.
$\underline{k = 5}$ conduce la $6(2p + 6) = 144$, de unde $2p + 6 = 24$, adică $p = 9$. Numerele sunt 19, 21, 23, 25, 27, 29.

$\underline{k = 7}$ conduce la $8(2p + 8) = 144$, de unde $2p + 8 = 18$, adică $p = 5$. Numerele sunt 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25.
$\underline{k = 9}$ conduce la $10(2p + 10) = 144$, nu convine.
$\underline{k = 11}$ conduce la $12(2p + 12) = 144$, de unde $p = 0$. Numerele sunt 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23. Prin urmare, avem 6 soluții.

4. Calculați suma $S = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + 98 \cdot 99 + 99 \cdot 100$.

Rezolvare:
Avem $S \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \cdot 3 + ... + 98 \cdot 99 \cdot 3 + 99 \cdot 100 \cdot 3$

$$S \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot (4 - 1) + 3 \cdot 4 \cdot (5 - 2) + ... + 98 \cdot 99 \cdot (100 - 97) + 99 \cdot 100 \cdot (101 - 98)$$

$$S \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \cdot 5 - 2 \cdot 3 \cdot 4 + ... + 98 \cdot 99 \cdot 100 - 97 \cdot 98 \cdot 99 +$$

0

0

$$+ 99 \cdot 100 \cdot 101 - 98 \cdot 99 \cdot 100$$

$$S \cdot 3 = 99 \cdot 100 \cdot 101 = 999900.$$

EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. Calculaţi: $1999 \cdot 2000 - 1998 \cdot 1999 - 2 \cdot 1998$.

2. Calculaţi: **a)** $3909 \cdot 1998 + 1997 \cdot 3909 - 3994 \cdot 3909$;
b) $(4 + 8 + 12 + ... + 2004) : (2 + 4 + 6 + ... + 1002)$.

3. Determinaţi numerele naturale a, b şi c, ştiind că $5a + 5b + 5c = 40$, iar $a < b < c$.

4. Se dau numerele: $a = 1 + 2 + 3 + ... + 9$; $b = 11 + 22 + 33 + ... + 99$; $c = 111 + 222 + 333 + ... + 999$. Fără a efectua adunarea să se arate că numărul $a + b + c$ se divide cu 369.

5. Determinaţi numerele naturale pare de forma $\overline{ab}$, ştiind că $\overline{ab} + \overline{ba} = 4a + 4b + 56$.

6. Calculaţi: $4a + 18b + 15c + 18d$, ştiind că $2a + 3b = 50$ şi $4b + 5c + 6d = 120$.

7. Aflaţi numerele naturale x, y, z ştiind că: $xz + 7yz + z = 49$ şi $x + 7y = 6$.

8. a) Calculați suma $a + 5b + 7c$, știind că $3a + 9b = 51$ și $4b + 14c = 62$.
b) Dacă $3a + 2b + 4c = 92$ și $b + 2c = 16$, calculați $ab + 2ac$.

9. Din egalităţile: $ab - ac = bc - c^2$ şi $b = c + 1$ să se deducă: **1)** o relaţie între a şi c; **2)** valoarea numerică a expresiei $2b - a - c$; **3)** valoarea numerică a produsului $(a^2 - b^2) \cdot (b^2 - c^2) \cdot (c^2 - a^2)$.

10. Calculaţi: $(3^7 - 3^6) \cdot (3^6 - 3^5) \cdot (3^5 - 3^4) : (3^5)^3$.

11. Să se scrie numărul $n = (2001^3 - 2001^2) + (2001^2 - 2001)$ ca produsul a trei numere naturale consecutive.

CAPITOLUL III

DIVIZIBILITATEA NUMERELOR NATURALE

III.1. Divizor; multiplu; divizori comuni; multipli comuni. Criterii de divizibilitate cu: 2, 5, 2^n, 5^n, 10^n, 3 și 9. Alte criterii de divizibilitate (extinderi)

➲ ***Rețineți!*** Numărul natural b divide numărul natural a dacă există un număr natural c astfel încât $a = b \cdot c$.

Notații: b / a sau $a \,\vdots\, b$ ("b divide a" sau "a se divide cu b").

➲ *Observație.* Nu există pentru orice pereche de numere naturale a și b un număr natural c astfel încât $a = b \cdot c$ și urmează că relația b / a nu este peste tot definită în $\mathbb{N}$.

➲ **Proprietățile relației de divizibilitate**

1. a / a oricare ar fi a număr natural (reflexivitatea);

2. a / b și $b / a \Rightarrow a = b$ (antisimetria);

Demonstrație:

Observație: Dacă $a = 0$, din $0 / b$ rezultă $b = 0$ și dacă $b = 0$, din $0 / a$ rezultă $a = 0$ (conform proprietății **5**).

Cazul *a* și *b* numere naturale nenule.

Conform definiției din a / b rezultă că există m număr natural astfel încât $b = am$, **(1)** iar din b / a rezultă că există n număr natural astfel încât $a = bn$, **(2)**.

Din **(1)** și **(2)** se obține prin înmulțire relația $a \cdot b = b \cdot a \cdot m \cdot n$, **(3)**.

Cum $ab \neq 0$, din **(3)** rezultă $mn = 1$, de unde $m = n = 1$. Prin urmare, din **(1)** sau din **(2)** rezultă $a = b$.

3. $a / 1 \Rightarrow a = 1$;

4. $a / 0$, oricare ar fi a număr natural;

5. $0 / a \Rightarrow a = 0$;

6. $a / b \Rightarrow a / b \cdot c$, oricare ar fi c număr natural;

7. a / b_1 și $a / b_2 \Rightarrow a / b_1 + b_2$ și $a / b_1 - b_2$ $(b_1 \geq b_2)$;

Demonstrație:

Din a / b_1 și a / b_2 rezultă că există numerele naturale m și n astfel încât $b_1 = a \cdot m$ și $b_2 = a \cdot n$. Prin adunare și, respectiv, scădere parte cu parte a celor două egalități, obținem $b_1 + b_2 = a(m + n)$ și $b_1 - b_2 = a(m - n)$, de unde conform definiției rezultă $a / b_1 + b_2$ și $a / b_1 - b_2$.

Generalizare: $a / b_1, a / b_2, \ldots, a / b_n \Rightarrow a / b_1 + b_2 + \ldots + b_n$;

8. a / b și $a \nmid c \Rightarrow a \nmid b + c$;

9. a / b_1 și $a / b_2 \Rightarrow a / b_1c_1 + b_2c_2$, oricare ar fi c_1, c_2 numere naturale;

Generalizare: $a / b_1; a / b_2; \ldots; a / b_n \Rightarrow a / b_1c_1 + b_2c_2 + \ldots + b_nc_n$, oricare ar fi $c_1, c_2, \ldots, c_n$ numere naturale;

10. $a / b \Rightarrow ac / bc$, oricare ar fi c număr natural;

11. ac / bc și $c \neq 0 \Rightarrow a / b$;

12. a_1 / b_1 și $a_2 / b_2 \Rightarrow a_1 \cdot a_2 / b_1 \cdot b_2$;

Generalizare: $a_1 / b_1; a_2 / b_2; \ldots; a_n / b_n \Rightarrow a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n / b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n$.

➲ ***Criterii de divizibilitate***

1. *Criteriul de divizibilitate cu 3 și cu 9.* Un număr natural este divizibil cu 3 sau cu 9, dacă și numai dacă suma cifrelor acelui număr este divizibilă cu 3 și, respectiv, cu 9.

EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. Să se arate că orice număr natural care împărţit la 180 dă restul 120 este divizibil cu 60.

2. Să se arate că numărul $A=2^{n+1}\cdot 3^{n}+2^{n}\cdot 3^{n+1}+6^{n+1}$, unde este n număr natural nenul, este divizibil cu 33. ***(Etapa locală, Botoşani, 1997)***

3. Să se arate că numărul $n=9+9^{2}+9^{3}+...+9^{1998}$ este divizibil cu cinci numere naturale impare consecutive. ***(Etapa judeţeană, Botoşani, 1999)***

4. Fie numărul $A=7+7^{2}+7^{3}+...+7^{1996}$. **a)** Arătaţi că A se divide cu 400.
b) Care este ultima cifră diferită de zero a numărului A? ***(Etapa judeţeană, Botoşani, 2001)***

5. Demonstraţi că numărul $A=2^{n}\cdot 3^{n}\cdot 5^{n}+2^{n}\cdot 15^{n}\cdot 14+3^{n}\cdot 10^{n}\cdot 2$ se divide cu 17 oricare ar fi n număr natural. ***(G. M. 10/1996)***

6. Să se arate că numărul $n=1988^{100}+1987^{100}-1986^{50}-1989^{50}$ este divizibil cu 10.

7. Să se arate că suma $S=6^{101}+6^{102}+...+6^{1000}$ este divizibilă cu 6480. ***(Aida-Elena Bălăucă)***

8. Fie numărul $n=1234567891011...2001$. **a)** Câte cifre are n? **b)** Determinaţi cifra de pe locul 2001 şi stabiliţi dacă n se divide cu 3. **c)** Stabiliţi dacă n se divide cu 9. ***(Artur Bălăucă)***

9. Să se determine numerele naturale n astfel încât numărul $a=1991^{n}+1992^{n}+$ $+\ 1993^{n}+...+2000^{n}$ să fie divizibil cu 5.

10. Să se arate că numărul $N=2^{9n+4}\cdot 5^{9n+1}+1$ este divizibil cu 81 oricare ar fi numărul natural n.

11. Dacă $\overline{2ab}+\overline{b3a}+\overline{ab4}=567$, atunci $\overline{ab}\,\vdots\,3$ (numerele sunt scrise în baza zece). ***(Niculai Solomon)***

12. Să se demonstreze că numărul $A=2^{2n+3}\cdot 5^{2n+1}-1$ se divide cu 3, dar nu se divide cu 9, oricare ar fi n număr natural. ***(Etapa judeţeană, Mehedinţi, 1998)***

13. Fie numărul $N=2^{n}\cdot 3^{n}\cdot 5^{n+4}\cdot 31^{n}+2^{n+2}\cdot 3^{n+2}\cdot 5^{n}\cdot 31^{n}$ (n număr natural). Să se determine n astfel încât numărul N să fie divizibil cu $1983\cdot 1984$. ***(Artur Bălăucă)***

14*. Cel mai mic număr natural x pentru care $1260\cdot x=A^{3}$, (A număr natural nenul) este:
A) 7350; **B)** 1050; **C)** 1260; **D)** 1260^{2}. ***(Etapa judeţeană, Constanţa, 1997)***

15. Să se arate că nu există nici un număr natural n astfel încât numărul $n^{2}+1999n+1$ să fie divizibil cu 2000. ***(Artur Bălăucă)***

16. Dacă împărţim numerele 294 şi 277 la acelaşi număr natural obţinem resturile 9 şi 11. Care este împărţitorul?

---

* La problema **14** numai un răspuns este corect.

19. Un pătrat cu latura de 5 m se împarte în pătrățele cu latura de 1 m și se numerotează la întâmplare pătrățelele obținute cu numere de la 1 la 25. Se calculează numerele de pe fiecare linie și de pe fiecare coloană. Există o numerotare a pătrățelelor astfel încât exact o sumă să fie număr par?

(Concursul „Florica T. Câmpan“, Iaşi)

20. Un cub este tăiat în două paralelipipede dreptunghice astfel încât aria unuia dintre cele două este de 2 ori mai mică decât cea a cubului. Aflați de câte ori volumul acestui paralelipiped este mai mic decât volumul cubului inițial.

(Olimpiadă Bulgaria)

21. Se dau 4 cubulețe cu muchiile de 1 cm, 2 cm, 3 cm, 5 cm. Cubulețele pot fi lipite față în față unul de altul. Găsiți așezarea lor, astfel încât corpul obținut să aibă aria cea mai mică. Care este aria în această situație? ***(Olimpiadă Bulgaria)***

CAPITOLUL VI

PROBLEME DE NUMĂRARE ŞI DE COLORARE. PROBLEME DE PERSPICACITATE. PROBLEME DISTRACTIVE. PROBLEME RECREATIVE (JOCURI)(EXTINDERI)

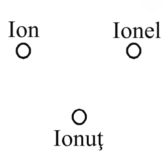
Probleme de numărare (probleme de combinatorică)

Combinatorica reprezintă una din ramurile moderne ale matematicii. Ea reuşeşte să înglobeze noţiuni din toate domeniile şi face apel la forma cea mai „pură“ a inteligenţei, intuiţia. Combinatorica este domeniul cel mai degajat de suveranitatea axiomatizării şi în care libertatea de expunere a ideilor este nelimitată. O gamă diversă de probleme întrebuinţează în enunţul lor un limbaj colocvial, accesibil şi fără vaste cunoştinţe teoretice. Combinatorica nu dispune de un aparat complex de teoreme care să-i rezolve întrebările, în prim plan situându-se aportul personal al elevului.

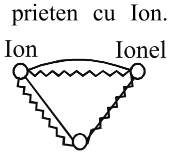
Probleme rezolvate:

1. Trei băieţi Ion, Ionel şi Ionuţ afirmă următoarele:
Ion: Ionel şi Ionuţ nici nu se cunosc, dar Ionel e cel mai bun prieten al meu.
Ionel: Ion şi Ionuţ sunt cei mai buni prieteni, iar eu pe Ion nici nu-l cunosc.
Ionuţ: Ion şi Ionel sunt cei mai buni prieteni, dar ei nu mă cunosc pe mine.
Ştiind că doi dintre băieţi spun adevărul şi unul minte, să se găsească cine cu cine este prieten.

Rezolvare:



Rezolvarea problemei include şi înţelegerea unor situaţii aparent evidente: doi băieţi care nu se cunosc nu pot fi prieteni şi dacă un băiat, să zicem Ion, este prieten cu Ionel, atunci vom avea şi reciproc, Ionel este prieten cu Ion. Rezolvarea „clasică“ este următoarea:
În figura alăturată, vom uni doi prieteni cu o linie dreaptă şi doi băieţi care nu se cunosc cu o linie în „zig-zag“.



Dacă Ion minte, atunci Ionel şi Ionuţ spun adevărul şi vom obţine următoarea diagramă:

EXERCIŢII ŞI PROBLEME

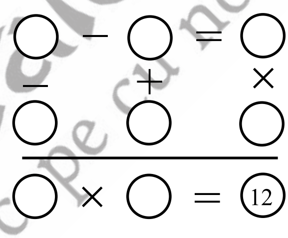
1. Din şirul de numere: 123, 32, 321, 112, 222, 312, 3, 12, 43, 233 unul trebuie eliminat. Care?

2. Exact cinci numere din şirul: 73, 28, 56, 19, 46, 55 respectă regula de alcătuire a şirului. Care este „intrusul“?

3. Se poate împărţi numărul 18 888 în aşa fel încât fiecare jumătate să fie 10 000?

4. Cum poate fi împărţit numărul 12 în două, astfel încât fiecare parte să fie 7?

5. Folosind o singură dată fiecare din cifrele 4, 3, 2, 1 scrise în ordine descrescătoare, semne de operaţii aritmetice şi, eventual parateze, alcătuiţi exerciţii prin rezolvarea cărora să obţineţi rezultatul: **a)** 7; **b)** 8; **c)** 9; **d)** 10; **e)** 42; **f)** 33.
Exemplu: $4 \cdot 3 : (2 + 1) = 4$.



6. Ce cifre trebuie puse în 8 cerculeţe legate prin operaţii aritmetice din figura alăturată pentru a obţine rezultatul 12?

7. Produsul vârstelor a 4 fraţi este 18, iar suma vârstelor lor este mai mică decât 10. (Vârstele sunt exprimate în ani întregi). Ce vârste au cei patru fraţi?

8. Se dau următoarele egalităţi: **a)** 1 2 3 = 1; **b)** 1 2 3 4 = 1; **c)** 1 2 3 4 5 = 1.
Fără a schimba ordinea cifrelor, puneţi între ele semne aritmetice (+, –, ·, :) şi, eventual, paranteze pentru a obţine egalităţi matematice.

9. Puneţi între cifrele date semne de operaţii aritmetice şi utilizaţi paranteze pentru a obţine propoziţii adevărate: **a)** 5 5 5 5 5 = 5; **b)** 5 5 5 5 = 6; **c)** 5 5 5 5 = 3.

10. Completaţi spaţiile libere dintre cifrele de mai jos cu semne de operaţii aritmetice şi, eventual, paranteze, astfel încât să obţineţi egalităţi adevărate:
a) 1 9 8 4 = 19; **b)** 1 9 8 4 = 4; **c)** 1 9 8 4 = 8.

11. Se consideră numerele: 1, 21, 321, 4 321, ..., 987 654 321. Înmulţiţi fiecare din aceste numere cu 9 şi scădeţi 1. Ce constataţi?

12. Ce număr trebuie înscris în căsuţa liberă?

45	62	79	96	

13. Completaţi locul liber:

13	24	36		63	78	94

14. Ce număr trebuie înscris în spaţiul liber?

0	3	8	15	24	

15. Ce număr trebuie înscris în spaţiul liber?

2	9	28	65	126	

SOLUŢII. REZULTATE. INDICAŢII. COMENTARII

CAPITOLUL I. NUMERE NATURALE

I.1. ***Operaţii cu numere naturale. Compararea şi ordonarea numerelor naturale***

1. B) **2. a)** $1103 \cdot 29 = 31987$; $1003 \cdot 39 = 39117$; **b)** $46 \cdot 43 = 1978$. **3.** 12, 15, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 42, 45, 51, 54, 57, 60, 63, 72, 75. **4. a)** $(8 \cdot 30 + 48) : (8 + 4)$; **b)** $8 \cdot (30 + 48 : 8 + 4)$. **5. a)** $a > 3b + 7 \Leftrightarrow 7a > 7 \cdot (3b + 7)$ etc. **6. a)** $2a \geq 4$; $3b \geq 21$; $4c \geq 40$, de unde $2a + 3b + 4c \geq 65$. **7.** 24 şi 120. **8.** 1269, 1278, 1359, 1368, 1458, 1467, 2349, 2358, 2457, 3456.

9. 1111125; 11133; 11222 etc. **10. a)** Numerele sunt de forma $\overline{ab5}$, unde $1 \leq a \leq 9$ şi $0 \leq b \leq 9$. Sunt $9 \cdot 10 = 90$ de numere de forma $\overline{ab5}$. **b)** $a = 1 \Rightarrow b$ ia valorile $0, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9$, deci sunt 8 numere de forma $\overline{ab5}$ care au cifra sutelor 1 şi $a \neq b \neq 5 \neq a$. Rezultă că sunt $8 \cdot 8 = 64$ de numere care satisfac condiţiile din enunţ. **11.** D). **12.** E). **13.** $3\underbrace{999...9}_{222\,cifre}$.

14. $(5n + 1) + (5n + 6) + (5n + 11) + ... + (5n + 46) = 5n \cdot 10 + (5 \cdot 0 + 1) + (5 \cdot 1 + 1) + ... + ... + (5 \cdot 9 + 1) = 50n + 5(1 + 2 + ... + 9) + 10 = 50n + 235 = 1235 \Rightarrow n = 20$. Numerele sunt: 101, 106, 111, ... , 146. **15.** De la pagina 1 la pagina 99 de 10 ori ca cifră a unităţilor şi de 10 ori ca cifră a zecilor. De la pagina 100 la 199 tot de 20 de ori ş.a.m.d. De la pagina 800 la 899 de 100 de ori ca cifră a sutelor, de 10 ori ca cifră a zecilor şi de 10 ori ca cifră a unităţilor etc. **16.** 294 ori. **17.** 1250 pagini. **18.** 180 de ori, respectiv 280 de ori.

19. a) $1 + 18 \cdot 2 + 180 \cdot 3 + 202 \cdot 4 = 1385$ de cifre; **b)** $\underbrace{510152025...152}_{1000\text{ cifre}}51530$.

20. a) 375 de cifre; **b)** 1. **21. a)** $1 \cdot 9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 900 + 4 \cdot 1002 = 6897$ cifre. **b)** Numărul 1234567891011 ... 702703 are 2001 cifre, iar cea de pe locul 2001 este 3. **c)** Suma cifrelor lui a este egală cu: $2\,[(1 + 2 + ... + 9) + 20\,(1 + 2 + ... + 9) + 180\,(1 + 2 + ... + 9)] + \underbrace{(1 + 1 + ... + 1)}_{1000\ termeni} + (2 + 2 + 1) = M_3$. **22.** Trebuie să se afle câte numere de forma $\overline{abcdedcba}$, unde $a \neq 0$, există; e, b, c, d iau valorile 0, 1, 2, ..., 9. Există 90000 de numere.

23. $\underbrace{66...6}_{333\ ori} \cdot \underbrace{33...3}_{666\ ori} = \underbrace{999...9}_{666\ ori} \cdot \underbrace{22...2}_{333\ ori} = (10^{666} - 1) \cdot \underbrace{22...2}_{333\ ori} = \underbrace{22...2}_{333\ ori}\,\underbrace{00...0}_{666\ ori} - \underbrace{22...2}_{333\ ori} = \underbrace{22...2}_{332\ ori}\,\underbrace{199...9}_{333\ ori}\,\underbrace{77...7}_{332\ ori}8$. **24.** Pentru că numărul rămas după suprimarea celor 100 de cifre să fie cel mai mare, primele cifre ale sale trebuie să fie cât mai mari posibile. Putem face ca el să înceapă cu 5 de 9, aceştia provenind de la 9, 19, 29, 39 şi 49. Pentru aceasta trebuie să ştergem $8 + 19 + 19 + 19 + 19 = 84$ cifre. Următoarea cifră nu mai poate fi 9, pentru că ar trebui să mai ştergem 19 cifre: 5, 0, 5, 1, 5, 2, ..., 8, 5. Deci am suprima în total $84 + 19 = 103$ cifre. Cel mai apropiat 8 dintre cifrele rămase se obţine suprimând 17 cifre, nu este posibil pentru că am avea $84 + 17 = 101 > 100$. Vom face ca următoarea cifră să fie 7 ştergând încă 15 dintre cifre. Am suprimat $84 + 15 = 99$ cifre. Mai ştergem pe 5 din 58. Numărul căutat este 99999785960...99100. **25.** Fie $x = \overline{6a_k a_{k-1}...a_2 a_1} = 6 \cdot 10^k + \overline{a_k a_{k-1}...a_2 a_1} = 25 \cdot \overline{a_k a_{k-1}...a_2 a_1} \Rightarrow \overline{a_k a_{k-1}...a_2 a_1} = \dfrac{6 \cdot 10^k}{24} = \dfrac{10^k}{4}$, număr natural $\Rightarrow k \geq 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow \overline{a_k a_{k-1}...a_2 a_1} = 25 \cdot 10^{k-2} = 25\underbrace{00...0}_{(k-2)\ ori} \Rightarrow x = 625\underbrace{00...0}_{(k-2)\ ori}$, unde $k \geq 2$.

26. a) 4, 6, 8, 10, ..., 200; **b)** 99; **c)** 10098.

$+\left(3^3\right)^{2n+4} = \left(3^4\right)^{n+2}\cdot 3^{259}$; $3^{6n+12}+3^{6n+12}+3^{6n+12} = 3^{4n+8}\cdot 3^{259}$; $3\cdot 3^{6n+12} = 3^{4n+267}$; $3^{6n+13} = 3^{4n+267}$. Rezultă că $6n + 13 = 4n + 267$, de unde se obţine $n = 127$. $n = 127 = 4 \cdot 31 + 3 = M_4 + 3$. $U(2^n) = U(2^3) = 8$; $U(3^n) = U(3^3) = 7$; $U(4^n) = U(4^3) = 4$; $U(7^n) = U(7^3) = 3$; $U(a) = U(8 + 7 + 4 + 3) = 2$, deci a este de forma $M_{10} + 2$, de unde rezultă că restul împărţirii numărului a la 5 este 2.

104. $\mathrm{A} = \dfrac{2^{10}\left(1+2+...+2^{10}\right)}{2^{40}\left(1+2+...+2^{10}\right)} = \dfrac{2^{10}}{2^{10}\cdot 2^{30}} = \dfrac{1}{2^{30}}$. $\mathrm{B} = \dfrac{3^{30}\left(1+3+...+3^{10}\right)}{3^{50}\left(1+3+...+3^{10}\right)} = \dfrac{3^{30}}{3^{30}\cdot 3^{20}} = \dfrac{1}{3^{20}}$.

$2^{30} = 8^{10} < 3^{20} = 9^{10}$. Atunci A > B. **105.** Avem: $100a + 10b + c + 10a + b + a = 2^d + 6 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 111a + 11b + c = 2^d + 6$. Deoarece $a \geq 1$ rezultă $d \geq 7$. $d = 7 \Rightarrow 111a + 11b + c = 134$ şi cum $a \geq 1 \Rightarrow a = 1$ şi $11b + c = 23$, de unde $b = 2$ şi $c = 1$, soluţie. $d = 8 \Rightarrow 111a + 11b + c =$ $= 262$. Cum $11b + c \leq 108$ rezultă $a = 2$ şi $11b + c = 40$, de unde $b = 3$ şi $c = 7$, soluţie. $d = 9 \Rightarrow 111a + 11b + c = 518$. Cum $11b + c \leq 108$ rezultă $a = 4$ şi $11b + c = 74$, de unde $b = 6$ şi $c = 8$, soluţie. În concluzie: $a = 1$; $b = 2$; $c = 1$; $d = 7$ sau $a = 2$; $b = 3$; $c = 7$; $d = 8$ sau $a = 4$; $b = 6$; $c = 8$; $d = 9$. **106. a)** Resturile sunt: 1, 2, 3, 4, 0, 1. Produsul $= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 =$ $= 24$. **b)** Resturile împărţirii unor numere naturale consecutive la 5 sunt termeni consecutivi ai şirului: 1, 2, 3, 4, 0, 1, 2, 3, 4, 0, 1, ... Produsul resturilor nenule ale împărţirii la 5 a n numere naturale consecutive nenule este egal cu $3^{20} \cdot 4^{31} = 3^{20} \cdot 2^{62} = 24^{20} \cdot 2^2$. Produsul termenilor din secvenţa (1, 2, 3, 4) este egală cu 24.
Putem avea cazurile: $4,0,/\underbrace{1,2,3,4,0,1,2,3,4,0,...,1,2,3,4,0}_{19 \text{ secvenţe } (1,\,2,\,3,\,4,\,0)},/1,2,3,4 \;\rightarrow n = 101$.

$4,0,/\underbrace{1,2,3,4,0,1,2,3,4,0,...,1,2,3,4,0}_{20 \text{ secvenţe } (1,\,2,\,3,\,4,\,0)}, \;\rightarrow n = 102$.

$4,0,/\underbrace{1,2,3,4,0,1,2,3,4,0,...,1,2,3,4,0}_{20 \text{ secvenţe } (1,\,2,\,3,\,4,\,0)},/1 \;\rightarrow n = 103$. Deci $n \in \{101; 102; 103\}$.

107. a) Fie $\overline{abc}$ cel mai mic dintre numerele date. Avem $a + b + c = 3(a + b + 1) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow c = 2a + 2b + 3 = 9 \Leftrightarrow a + b = 3 \Rightarrow (a, b)$ ia valorile: (1, 2), (2, 1), (3, 0). Numerele sunt: (129, 130), (219, 220), (309, 310); **b)** $a = 2^{\left(3^3\right)^{31}} = 2^{27^{31}}$ şi $b = 3^{\left(2^5\right)^{31}} = 3^{32^{31}}$ etc.

I.5. *Ultima cifră. Pătrate perfecte. Cuburi perfecte*

1. $1 = 2^1 - 1$; $3 = 2^2 - 1$; $7 = 2^3 - 1$; $15 = 2^4 - 1$; $31 = 2^5 - 1$ ... Numărul de pe locul 2002 este $2^{2002} - 1$ şi are ultima cifră 3. **2. a)** $a \cdot b = 2^{37} \cdot 3^9 \cdot 5^{20} = 2^{17} \cdot 3^9 \cdot (2 \cdot 5)^{20}$, deci $a \cdot b$ se termină în 20 de zerouri. **b)** $\mathrm{U}(2^{17}) = 2$; $\mathrm{U}(3^9) = 3$, ultima cifră nenulă a produsului $a \cdot b$ este 6. **3.** $\mathrm{U}(A) = 4$; $\mathrm{U}(B) = 9$. **4.** 9. **5. a)** Se analizează cazurile: $n = 4k$, $n = 4k + 1$, $n = 4k + 2$, $n = 4k + 3$, unde k număr natural. **b)** $n = 1$ conduce la $\mathrm{U}(a) = 5$. $n = 2$ conduce la $\mathrm{U}(a) = 8$. n ia valorile 3 şi 4, conduce la $\mathrm{U}(a) = 0$. $n \geq 5$ implică $\mathrm{U}(a) = \mathrm{U}\left(2004^{n^2}\right)$ etc. **6.** $16 + 9 = 25$ şi $16 + 15 < 36$, rezultă că 16 nu poate avea decât un singur vecin, deci el este pe poziţia 1 sau 16. O aşezare este: 16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, 6, 10, 15, 1, 8.
7. a) Numărul $a = (1 + 3 + 3^2 + 3^3) + 3^4\cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3) + \ldots + 3^{2004}\cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3)$ şi dând factor comun $a = 40 + 3^4 \cdot 40 + \ldots + 3^{2004} \cdot 40 = 40 \cdot (1 + 3^4 + 3^8 + \ldots + 3^{2004})$ **(1)**. $\mathrm{U}(3^{4k}) = 1$, unde k este număr natural nenul. Deci $\mathrm{U}(1 + 3^4 + 3^8 + \ldots + 3^{2004}) =$ $= \mathrm{U}(\underbrace{1+1+1+...+1}_{502 \text{ termeni}}) = \mathrm{U}(502) = 2$. $a = 40(10q + 2)$, q este număr natural nenul. Deci $a = 400q + 80$ etc.; **b)** $1 + 3^4 + 3^8 + \ldots + 3^{2004} = (1 + 3^4) + 3^8(1 + 3^4) + 3^{16}(1 + 3^4) + \ldots +$ $+ \ldots + 3^{2000}(1 + 3^4) = 82(1 + 3^8 + 3^{16} + \ldots + 3^{2000})$. Cum 41/82, rezultă că $41/a$ (din **(1)**).