

CUPRINS

PARTEA I

CAPITOLUL I	pag.
ȘIRURI DE NUMERE REALE.....	5
§ 1. Noțiunea de șir.....	5
§ 2. Șiruri convergente.....	10
§ 3. Șiruri cu limite infinite.....	25
§ 4. Operații cu șiruri care au limite infinite.....	28
§ 5. Limite uzuale.....	30
§ 6. Șiruri recurente de ordinul I.....	38
§ 7. Șiruri recurente de ordinul al II-lea.....	39
§ 8. Aplicații în calculul matriceal.....	42
CAPITOLUL II	
LIMITE DE FUNCȚII.....	47
§ 1. Limita unei funcții într-un punct.....	47
§ 2. Limita laterale.....	48
§ 3. Operații cu limite de funcții.....	50
§ 4. Limitele funcțiilor elementare uzuale.....	51
§ 5. Asimptote la graficele unor funcții.....	64
CAPITOLUL III	
FUNCȚII CONTINUE.....	69
§ 1. Funcție continuă într-un punct.....	69
§ 2. Operații cu funcții continue.....	70
§ 3. Funcții continue pe intervale.....	77
CAPITOLUL IV	
DERIVATE - FUNCȚII DERIVABILE.....	82
§ 1. Derivata unei funcții într-un punct.....	82
§ 2. Operații cu funcții derivabile.....	85
§ 3. Interpretarea geometrică a derivatei.....	91
§ 4. Derivata funcției inverse.....	96
§ 5. Derivate de ordin superior.....	98
CAPITOLUL V	
STUDIUL FUNCȚIILOR CU AJUTORUL DERIVATELOR	103
§ 1. Funcții derivabile pe intervale. Rezultate remarcabile.....	103

§ 2. Funcții convexe – Funcții concave.....	119
§ 3. Reprezentarea grafică a funcțiilor.....	125
§ 4. Rezolvarea grafică a unor ecuații.....	134
§ 5. Probleme de optimizare.....	139

CAPITOLUL VI

TESTE RECAPITULATIVE.....	146
Enunțuri.....	146
Soluții.....	169

TESTE RECAPITULATIVE

Nr. crt.	Enunțuri pag.	Soluții pag.	Nr. crt.	Enunțuri pag.	Soluții pag.
I	146	169	XVI	157	199
II	147	171	XVII	158	200
III	147	173	XVIII	159	203
IV	148	175	XIX	159	205
V	149	177	XX	160	207
VI	150	178	XXI	161	209
VII	150	179	XXII	162	212
VIII	151	182	XXIII	162	213
IX	152	184	XXIV	163	214
X	153	186	XXV	164	216
XI	153	188	XXVI	165	218
XII	154	190	XXVII	165	220
XIII	154	193	XXVIII	166	223
XIV	155	196	XXIX	167	225
XV	156	197	XXX	168	227

TEST GRILĂ.....	229
------------------------	------------

PARTEA a II - a

CAPITOLUL I	pag.
INTEGRALA NEDEFINITĂ.....	233
§ 1. Primitive.....	233
§ 2. Integrarea prin părți.....	243
§ 3. Integrarea prin schimbare de variabilă.....	246
§ 4. Integrarea funcțiilor raționale.....	249
§ 5. Alte procedee pentru determinarea primitivelor.....	255
CAPITOLUL II	
INTEGRALA DEFINITĂ.....	261
§ 1. Diviziuni – Sume Riemann – Funcții integrabile.....	261
§ 2. Operații cu funcții integrabile.....	263
§ 3. Integrarea funcțiilor continue.....	270
§ 4. Integrarea prin părți.....	281
§ 5. Integrarea prin schimbare de variabilă.....	286
§ 6. Rezultate remarcabile.....	292
CAPITOLUL III	
APLICAȚII ALE INTEGRALEI DEFINITE.....	295
§ 1. Calculul limitelor unor șiruri cu ajutorul integralelor definite.....	295
§ 2. Aria unei suprafețe.....	297
§ 3. Volumul unui corp de rotație.....	300
§ 4. Lungimea graficului unei funcții.....	306
§ 5. Aria unei suprafețe de rotație.....	307
§ 6. Centre de greutate.....	311
§ 7. Calculul aproximativ al integralei definite.....	315
CAPITOLUL IV	
TESTE RECAPITULATIVE.....	317
Enunțuri.....	317
Soluții.....	333
CAPITOLUL V	
PROBLEME DE SINTEZĂ.....	369
Enunțuri.....	369
Soluții.....	372

TESTE RECAPITULATIVE

Nr. crt.	Enunțuri pag.	Soluții pag.	Nr. crt.	Enunțuri pag.	Soluții pag.
I	317	333	XIII	324	350
II	317	334	XIV	324	352
III	318	335	XV	325	353
IV	318	337	XVI	326	355
V	319	338	XVII	326	356
VI	319	339	XVIII	327	358
VII	320	341	XIX	328	360
VIII	321	342	XX	328	361
IX	321	344	XXI	329	363
X	322	345	XXII	330	364
XI	322	347	XXIII	331	366
XII	323	348	XXIV	331	367

BIBLIOGRAFIE SELECTIVĂ

1. Nicolescu, M.; Dinculeanu, N.; Marcus, S. - *ANALIZĂ MATEMATICĂ* – vol I Editura Didactică și Pedagogică, București, 1971.
2. Dinculeanu, N.; Radu, E. - *ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ*- Manual pentru clasa a XI-a- vol I - Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979.
3. Gussi, Gh.; Stănășilă, O.; Stoica, T. - *MATEMATICĂ - ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ*- Manual pentru clasa a XI-a- Editura Didactică și Pedagogică, București, 1997.
4. Boboc, N.; Colojoară, I. - *MATEMATICĂ - ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ* - Manual pentru clasa a XII-a- Editura Didactică și Pedagogică, București, 1994.
5. Nicolescu, C.; Nicolescu, M. - *ANALIZĂ MATEMATICĂ*- Exerciții și probleme pentru elevii claselor a XI-a și a XII-a - Editura Universal Pan, București, 2000.
6. Mihai I.; Maftai, I.; Pârșan, L.; Mihai, A.; Nicolescu, C. - *MATEMATICĂ M1* (Partea I – Algebră, partea II-a, Analiză matematică), Manual pentru clasa a XI-a – Editura Didactică și Pedagogică, București, 2006.
7. Mihai, I.; Maftai, I.; Popescu, G.; Pârșan, L.; Mihai, A.; Haivas, M.; Nicolescu, C. - *MATEMATICĂ M1* (Partea I – Algebră, partea II-a, Analiză matematică), Manual pentru clasa a XII-a – Editura Didactică și Pedagogică, București, 2007.

PROGRESIA ARITMETICĂ

▣ Definiție

Spunem că un șir $(a_n)_{n \geq 1}$ este o **progresie aritmetică**, dacă sunt cunoscute: **primul termen** $a_1 \neq 0$ și un număr real r , $r \neq 0$, denumit **rație**, astfel încât orice termen, începând cu al doilea, se obține din cel precedent, adăugând rația.

$$\boxed{a_n = a_{n-1} + r, \text{ oricare ar fi } n \geq 2} \quad (\text{relația de recurență})$$

Termenul general al progresiei aritmetice este dat de formula:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)r, \text{ oricare ar fi } n \geq 1}$$

Suma primilor n termeni ai progresiei aritmetice este:

$$S_n = \underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_n}_{n \text{ termeni}} = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

EXEMPLE:

- $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ (suma primelor n numere naturale);
- $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$ (suma primelor n numere naturale impare);
- Se deduc și următoarele rezultate, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\text{a) } 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$\text{b) } 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4};$$

$$\text{c) } 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Formulele pot fi verificate cu ușurință folosind metoda inducției matematice.

◆ Teoremă

Un șir $(a_n)_{n \geq 1}$ constituie o **progresie aritmetică**, dacă și numai dacă are loc **relația de recurență**:

$$\boxed{a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}}, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}^*.$$

Considerăm cunoscuți termenii diferiți a_1, a_2 .

§ 2. FUNCȚII CONVEXE. FUNCȚII CONCAVE

Definiție

Fie I un interval și funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Spunem că funcția f este **convexă** pe I , dacă oricare ar fi punctele $x_1, x_2 \in I$, cu $x_1 < x_2$ și oricare ar fi $t \in [0, 1]$, are loc **inegalitatea**:

$$f[(1-t)x_1 + tx_2] \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2), \text{ (fig. I-34).}$$

Definiție

Spunem că funcția f este **concavă** pe I , dacă oricare ar fi punctele $x_1, x_2 \in I$, cu $x_1 < x_2$ și oricare ar fi $t \in [0, 1]$, are loc **inegalitatea**:

$$f[(1-t)x_1 + tx_2] \geq (1-t)f(x_1) + tf(x_2), \text{ (fig. I-35).}$$

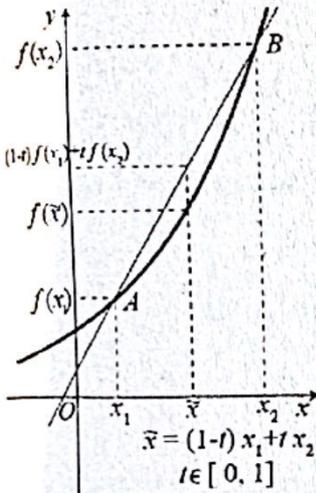


Fig. I-34

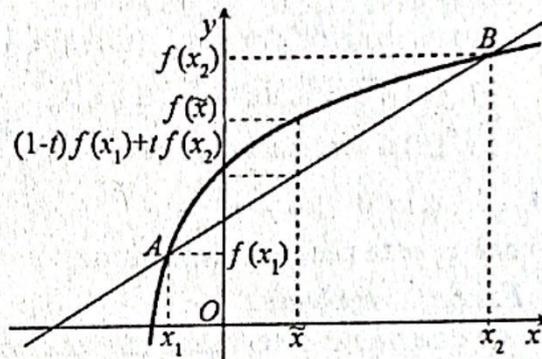


Fig. I-35

Teoremă

Fie I un interval și funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, de două ori derivabilă pe acest interval. Funcția este convexă (concavă) pe I dacă și numai dacă $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$), oricare ar fi $x \in I$.

Definiție

Considerăm funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ și $(a, b) \subset I$. Spunem că $x_0 \in (a, b)$ este un **punct de inflexiune** pentru funcția f , dacă sunt îndeplinite condițiile:

- i) funcția f este continuă pe (a, b) ;
- ii) funcția are derivată în punctul x_0 ;
- iii) pe intervalul $(a, x_0]$ funcția este convexă și pe intervalul $[x_0, b)$

funcția este concavă sau invers, (fig. I-36 a, b, c, d).

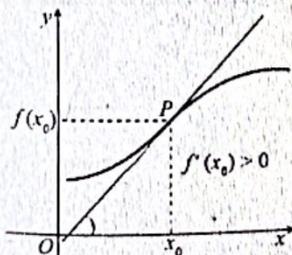


Fig. I-36 a

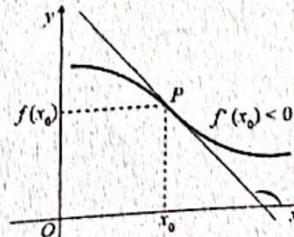


Fig. I-36 b