CUPRINS

$\mathbb{R}$ ŞI $\mathbb{R}^n$ 9
Marginile unei mulţimi 9
Spaţiul vectorial $\mathbb{R}^n$ 13

ELEMENTE DE TOPOLOGIE 15
Analiza topologică a unei mulţimi 15
Conexitate 22
Compacitate 21

CONVERGENŢĂ 27
Definiţia şirului convergent 27
Şiruri Cauchy 29
Subşiruri 31
Teorema convergenţei monotone 33
Trecerea la limită în inegalităţi 37
Lema lui Stolz-Cesaro 41
Limita superioară şi inferioară a unui şir de numere reale 48
Diverse 53
Şiruri de funcţii 57
Definiţia seriei convergente 63
Termenul general al unei serii convergente tinde la 0 63
Criteriul lui Cauchy pentru serii 64
Criterii de comparaţie 64
Criteriul de condensare al lui Cauchy 69
Criteriul raportului şi criteriul radicalului 69
Criteriul Raabe-Duhamel 70
Criteriul lui Gauss 71
Criteriul Abel-Dirichlet şi Criteriul lui Leibniz 72
Gruparea termenilor unei serii 73
Serii absolut convergente şi serii semiconvergente 74
Diverse 76

CONTINUITATE 77
Caracterizarea continuităţii cu ajutorul şirurilor 77
Funcţii cu proprietatea lui Darboux 81
Funcţiile continue au proprietatea lui Darboux 81
Teorema de permanenţă a conexităţii pentru funcţii continue 84
Funcţii uniform continue 85
Teorema de transport a continuităţii prin convergenţa uniformă 90

Teorema lui Dini 91
Definiţia cu $\varepsilon - \delta$ a limitei unei funcţii 94
Definiţia cu şiruri a limitei unei funcţii 94
Funcţii monotone 97
Diverse 98

DERIVABILITATE 101
Definiţia funcţiei derivabile 101
Derivabilitatea inversei unei funcţii 105
Teorema lui Fermat 107
Teorema lui Rolle 107
Teorema lui Lagrange 109
Consecinţele Teoremei lui Lagrange 113
Teorema lui Darboux 115
Şiruri de funcţii derivabile 116
Formula lui Taylor 118
Regula lui l'Hospital 123

DIFERENŢIABILITATE 125
Derivata după o direcţie (vector) şi derivatele parţiale 125
Funcţii diferenţiabile 126
Teorema de diferenţiabilitate a funcţiilor compuse 130
Derivate parţiale de ordin superior 131
Formula lui Taylor-cazul multidimensional 133
Teorema de injectivitate locală 133
Teorema aplicaţiei deschise 134
Teorema funcţiilor implicite 136
Teorema lui Fermat-cazul multidimensional 138
Puncte de extrem pentru funcţii de mai multe variabile 138
Puncte de extrem cu legături 142

INTEGRABILITATE 144
Sume Riemann 144
Formula Leibniz-Newton 147
Sume Darboux 148
Criteriul lui Lebesgue de integrabilitate Riemann 149
Lema de evaluare a modulului unei integrale Riemann-Stieltjes 152
Teorema de permutare a limitei cu integrala 155
Calculul unor integrale Riemann-Stieltjes 157
Teorema de integrare prin părţi pentru integrala Riemann 161
Teorema de schimbare de variabilă pentru integrala Riemann 162

Teorema de medie 163
Teorema fundamentală a calculului integral 165
Formula lui Wallis 166
Funcţii cu variaţie mărginită 167
Calculul unor integrale improprii cu ajutorul definiţiei 172
Funcţiile Beta şi Gama 174

SERII DE FUNCŢII 177
Mulţimea de convergenţă a unei serii de funcţii 177
Serii de puteri 179

BIBLIOGRAFIE 181

Marginile unei mulţimi

1. *Să se determine:*
i) $\inf\{\frac{m}{1+m+n} \mid m,n \in \mathbb{N}\}$ *şi* $\sup\{\frac{m}{1+m+n} \mid m,n \in \mathbb{N}\}$;
ii) $\inf\{\frac{m}{n} \mid m,n \in \mathbb{N},\, m<2n\}$ *şi* $\sup\{\frac{m}{n} \mid m,n \in \mathbb{N}, m<2n\}$;
iii) $\inf\{\sqrt{n}-[\sqrt{n}] \mid n \in \mathbb{N}\}$ *şi* $\sup\{\sqrt{n}-[\sqrt{n}] \mid n \in \mathbb{N}\}$.
Soluţie.

i) Deoarece $0 \leq \frac{m}{1+m+n}$ pentru orice $m,n \in \mathbb{N}$, concluzionăm că 0 este minorant pentru mulţimea $\{\frac{m}{1+m+n} \mid m,n \in \mathbb{N}\}$. Dacă, prin reducere la absurd, există $x>0$ minorant al mulţimii $\{\frac{m}{1+m+n} \mid m,n \in \mathbb{N}\}$, deducem că $x<\frac{1}{n+2}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, i.e. $n<\frac{1}{x}-2$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Prin urmare, mulţimea $\mathbb{N}$ este mărginită, ceea ce constituie o contradicţie.

Aşadar $\inf\{\frac{m}{1+m+n} \mid m,n \in \mathbb{N}\}=0$.

Deoarece $\frac{m}{1+m+n} \leq 1$ pentru orice $m,n \in \mathbb{N}$, tragem concluzia că 1 este majorant pentru mulţimea $\{\frac{m}{1+m+n} \mid m,n \in \mathbb{N}\}$. Dacă, prin reducere la absurd, există $x<1$ majorant al mulţimii $\{\frac{m}{1+m+n} \mid m,n \in \mathbb{N}\}$, deducem că $\frac{n}{n+2}<x$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, i.e. $n<\frac{2x}{1-x}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Prin urmare, mulţimea $\mathbb{N}$ este mărginită, ceea ce constituie o contradicţie.

Aşadar $\sup\{\frac{m}{1+m+n} \mid m,n \in \mathbb{N}\}=1$.

ii) Deoarece $0 \leq \frac{m}{n}$ pentru orice $m,n \in \mathbb{N}$, $m<2n$, concluzionăm că 0 este minorant pentru mulţimea $\{\frac{m}{n} \mid m,n \in \mathbb{N},\, m<2n\}$. Dacă, prin reducere la absurd, există $x>0$ minorant al mulţimii $\{\frac{m}{n} \mid m,n \in \mathbb{N},\, m<2n\}$, deducem că $x<\frac{1}{n}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, i.e. $n<\frac{1}{x}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Prin urmare, mulţimea $\mathbb{N}$ este mărginită, ceea ce constituie o contradicţie.

Aşadar $\inf\{\frac{m}{n} \mid m,n \in \mathbb{N}, m<2n\}=0$.

Deoarece $\frac{m}{n} \leq 2$ pentru orice $m,n \in \mathbb{N}$, $m<2n$, tragem concluzia că 2 este majorant pentru mulţimea $\{\frac{m}{n} \mid m,n \in \mathbb{N},\, m<2n\}$. Dacă, prin reducere la absurd, există $x<2$ majorant al mulţimii $\{\frac{m}{n} \mid m,n \in \mathbb{N},\, m<2n\}$, deducem că $\frac{2n-1}{n}<x$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, i.e. $n<\frac{1}{2-x}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Prin urmare, mulţimea $\mathbb{N}$ este mărginită, ceea ce constituie o contradicţie.

Aşadar $\sup\{\frac{m}{n} \mid m,n \in \mathbb{N}, m<2n\}=2$.

iii) Deoarece $0=\sqrt{1}-[\sqrt{1}] \leq \sqrt{n}-[\sqrt{n}]$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, concluzionăm că 0 este un minorant pentru mulţimea $\{\sqrt{n}-[\sqrt{n}] \mid n \in \mathbb{N}\}$ care face parte din mulţime, deci

$\inf\{\sqrt{n}-[\sqrt{n}] \mid n \in \mathbb{N}\}=\min\{\sqrt{n}-[\sqrt{n}] \mid n \in \mathbb{N}\}=0$.

Deoarece $\sqrt{n}-[\sqrt{n}]<1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, tragem concluzia că 1 este majorant pentru mulţimea $\{\sqrt{n}-[\sqrt{n}] \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dacă, prin reducere la absurd, există $x < 1$ majorant al mulţimii $\{\sqrt{n} - [\sqrt{n}] \mid n \in \mathbb{N}\}$, deducem că $\sqrt{n^2+2n} - [\sqrt{n^2+2n}] < x$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, i.e. $n < \frac{x^2}{2(1-x)}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Prin urmare, mulţimea $\mathbb{N}$ este mărginită, ceea ce constituie o contradicţie.

Aşadar $\sup\{\sqrt{n} - [\sqrt{n}] \mid n \in \mathbb{N}\} = 1$.

2. *Fie A, B două submulţimi mărginite ale lui $\mathbb{R}$ cu proprietatea că pentru orice $a \in A$ există $b \in B$ astfel încât $a \leq b$. Să se arate că $\sup A \leq \sup B$.*

Soluţie. Să presupunem, prin reducere la absurd, că $\sup B < \sup A$. Atunci $\sup B$ nu este majorant pentru mulţimea A, deci există $a \in A$ astfel încât $\sup B < a$. Însă, conform ipotezei, există $b \in B$ având proprietatea că $a \leq b$, de unde obţinem contradicţia următoare: $b \leq \sup B < a \leq b$. Aşadar $\sup A \leq \sup B$.

3. *Să se arate că inegalitatea* $\inf A \leq \inf B \leq \sup B \leq \sup A$ *este valabilă pentru orice $\emptyset \neq B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$, A mărginită.*

Soluţie. Deoarece $x \leq \sup A$ pentru orice $x \in A$ şi $B \subseteq A$, deducem că $\sup A$ este majorant pentru B, deci, cum $\sup B$ este cel mai mic majorant al lui B, obţinem că $\sup B \leq \sup A$.

Similar se arată că $\inf A \leq \inf B$.

4. *Să se arate că dacă A şi B sunt submulţimi mărginite ale lui $\mathbb{R}$, atunci* $\min\{\inf A, \inf B\} = \inf(A \cup B) \leq \sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

Soluţie. Conform exerciţiului precedent $\sup A \leq \sup(A \cup B)$ şi $\sup B \leq \sup(A \cup B)$, deci $\max\{\sup A, \sup B\} \leq \sup(A \cup B)$. Să presupunem, prin reducere la absurd, că $\max\{\sup A, \sup B\} < \sup(A \cup B)$. Atunci, cum $\sup(A \cup B)$ este cel mai mic majorant al lui $A \cup B$, deducem că $\max\{\sup A, \sup B\}$ nu este majorant al mulţimii $A \cup B$, deci există $x_0 \in A \cup B$ astfel încât $\max\{\sup A, \sup B\} < x_0$. Fără pierderea generalităţii, putem presupune că $x_0 \in A$, ceea ce conduce la următoarea contradicţie: $x_0 \leq \sup A \leq \max\{\sup A, \sup B\} < x_0$.

Aşadar $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

Similar se arată că $\min\{\inf A, \inf B\} = \inf(A \cup B)$.

5. *Pentru X şi Y două mulţimi nevide şi $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită, fie $f_1 : X \to \mathbb{R}$ şi $f_2 : Y \to \mathbb{R}$ date de* $f_1(x) = \sup\{f(x,y) \mid y \in Y\}$ *pentru orice $x \in X$ şi* $f_2(y) = \sup\{f(x,y) \mid x \in X\}$ *pentru orice $y \in Y$. Să se arate că*

$$\sup\{f(x,y) \mid x \in X, y \in Y\} = \sup\{f_1(x) \mid x \in X\} = \sup\{f_2(y) \mid y \in Y\},$$

i.e.

$$\sup_{x,y} f(x,y) = \sup_x \sup_y f(x,y) = \sup_y \sup_x f(x,y).$$

Soluţie. Fie $S = \sup\{f(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}$. Deoarece $f(x,y) \leq S$ pentru orice $x \in X$ şi orice $y \in Y$, deducem că $f_1(x) = \sup\{f(x,y) \mid y \in Y\} \leq S$ pentru orice $x \in X$, de unde $\sup\{f_1(x) \mid x \in X\} \leq S$. Să presupunem, prin reducere la absurd, că $\sup\{f_1(x) \mid x \in X\} < S$. Atunci, cum S este cel mai mic majorant al mulţimii $\{f(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}$, deducem că $\sup\{f_1(x) \mid x \in X\}$ nu este majorant al acestei mulţimi, deci există $x_0 \in X$ şi $y_0 \in Y$ astfel încât $\sup\{f_1(x) \mid x \in X\} < f(x_0, y_0)$. Atunci obţinem următoarea contradicţie: $f(x_0,y_0) \leq \sup\{f(x_0,y) \mid y \in Y\} = f_1(x_0) \leq \sup\{f_1(x) \mid x \in X\} < f(x_0,y_0)$.

Aşadar $\sup\{f(x,y) \mid x \in X, y \in Y\} = \sup\{f_1(x) \mid x \in X\}$.

Similar se arată că $\sup\{f(x,y) \mid x \in X, y \in Y\} = \sup\{f_2(y) \mid y \in Y\}$.

6. *Pentru X şi Y două mulţimi nevide şi $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită, fie $f_1 : X \to \mathbb{R}$ şi $g_2 : X \to \mathbb{R}$ date de $f_1(x) = \sup\{f(x,y) \mid y \in Y\}$ pentru orice $x \in X$ şi $g_2(y) = \inf\{f(x,y) \mid x \in X\}$ pentru orice $y \in Y$. Să se arate că*

$$\sup\{g_2(y) \mid y \in Y\} \leq \inf\{f_1(x) \mid x \in X\},$$

i.e.

$$\sup_y \inf_x f(x,y) \leq \inf_x \sup_y f(x,y).$$

Să se arate că inegalitatea poate fi strictă.

Soluţie. Să presupunem, prin reducere la absurd, că $\inf\{f_1(x) \mid x \in X\} < \sup\{g_2(y) \mid y \in Y\}$.

Atunci, cum $\sup\{g_2(y) \mid y \in Y\}$ este cel mai mic majorant al mulţimii $\{g_2(y) \mid y \in Y\}$, deducem că $\inf\{f_1(x) \mid x \in X\}$ nu este majorant al acestei mulţimi, deci există $y_0 \in Y$ astfel încât $\inf\{f_1(x) \mid x \in X\} < g_2(y_0)$. Cum $\inf\{f_1(x) \mid x \in X\}$ este cel mai mare minorant al mulţimii $\{f_1(x) \mid x \in X\}$, deducem că $g_2(y_0)$ nu este minorant al acestei mulţimi, deci există $x_0 \in X$ astfel încât $f_1(x_0) < g_2(y_0)$. Obţinem astfel următoarea contradicţie: $f(x_0,y_0) \leq f_1(x_0) = \sup\{f(x_0,y) \mid y \in Y\} < g_2(y_0) = \inf\{f(x,y_0) \mid x \in X\} \leq f(x_0,y_0)$.

Pentru a ne convinge că inegalitatea poate fi strictă, putem considera funcţia $f : X \times X \to \mathbb{R}$ dată de $f(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$, unde X este o mulţime care are cel puţin două elemente, pentru care $\sup\{g_2(y) \mid y \in Y\} = 0 < 1 = \inf\{f_1(x) \mid x \in X\}$.

7. *Să se arate că într-un corp ordonat (i.e. un corp comutativ K împreună cu o relaţie de ordine compatibilă cu structura algebrică a sa – mai precis astfel încât: i) pentru orice $x, y, z, t \in K$ cu proprietatea că $x \leq y$ şi $t \geq 0$, rezultă că $x + z \leq y + z$ şi $xt \leq yt$; ii) pentru orice $x \in K$ avem*

$x \geq 0$ *sau* $x \leq 0$*) arhimedeean (i.e. pentru orice* $x, y \in K$*,* $y > 0$*, există* $n \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $x < ny$*), Principiul intervalelor nevide închise incluse implică Axioma lui Cantor.*

Soluţie. Fie A o submulţime nevidă şi majorată a lui K, b_1 un majorant al său şi a_1 un element care nu este majorant al lui A (dacă A are un unic element x, alegem $a_1 = x - 1$; în caz contrar, există două elemente x şi y din A, $x < y$ şi alegem $a_1 = x$).

În continuare vom defini un interval $[a_2, b_2]$ inclus în $[a_1, b_1]$ astfel:

$$[a_2, b_2] = \begin{cases} [a_1, \frac{a_1+b_1}{2}], & \frac{a_1+b_1}{2} \text{ este majorant al lui } A \\ [\frac{a_1+b_1}{2}, b_1], & \frac{a_1+b_1}{2} \text{nu este majorant al lui } A \end{cases}.$$

Inductiv vom obţine un şir $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ de intervale nevide închise incluse astfel încât a_n nu este majorant al lui A, iar b_n este majorant al lui A, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Să observăm că lungimea intervalului $[a_n, b_n]$ (adică $b_n - a_n$) este lungimea lui $[a_1, b_1]$ (adică $b_1 - a_1$) înmulţită cu $\frac{1}{2^n}$. Cu alte cuvinte

$$b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}, \tag{1}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Conform Principiului intervalelor nevide închise incluse, avem

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

Vom arăta că $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$ are un unic element.

Într-adevăr, dacă ar exista $x, y \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$, $x < y$, atunci, având în vedere faptul că K este un corp arhimedeean, există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $b_1 - a_1 < n_0(y - x)$. Cum $x, y \in [a_{n_0}, b_{n_0}]$, deducem că $y - x < b_{n_0} - a_{n_0} \overset{(1)}{=} \frac{b_1 - a_1}{2^{n_0 - 1}} \leq \frac{b_1 - a_1}{n_0}$, deci $n_0(y - x) < b_1 - a_1$, ceea ce constituie o contradicţie.

Aşadar există $x \in K$ cu proprietatea că

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{x\}.$$

Afirmaţia 1. *x este majorant al lui A.*

Justificarea afirmaţiei 1. Dacă presupunem, prin reducere la absurd, că x nu este majorant al lui A, atunci există $a \in A$ astfel încât $x < a$. Având în vedere faptul că K este un corp arhimedeean, există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $b_1 - a_1 < n_0(a - x)$, de unde $b_{n_0} - x \leq b_{n_0} - a_{n_0} \overset{(1)}{=} \frac{b_1 - a_1}{2^{n_0 - 1}} \leq \frac{b_1 - a_1}{n_0} < a - x$, deci $b_{n_0} < a$, ceea ce contrazice faptul că b_{n_0} este majorant al lui A.

Afirmaţia 2. *x este cel mai mic majorant al lui A.*

Justificarea afirmaţiei 2. Dacă presupunem, prin reducere la absurd, că x nu este cel mai mic majorant al lui A, atunci există $M \in K$ astfel încât $M < x$ şi M este majorant al lui A. Având în vedere faptul că K este un corp arhimedeean, există $n_0 \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $b_1 - a_1 < n_0(x - M)$, de unde $x - a_{n_0} \leq b_{n_0} - a_{n_0} \overset{(1)}{=} \frac{b_1 - a_1}{2^{n_0 - 1}} \leq \frac{b_1 - a_1}{n_0} < x - M$, deci $M < a_{n_0}$. Prin urmare $u \leq M < a_{n_0}$ pentru orice $u \in A$, ceea ce conduce la contradicţia că a_{n_0} este majorant al lui A.

Din cele două afirmaţii deducem că x este marginea superioară a mulţimii A.

Spaţiul vectorial $\mathbb{R}^n$

1. *Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dată de $f(x) = \|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|$ pentru orice $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, este o normă care nu satisface identitatea paralelogramului.*

Soluţie. Se verifică imediat că f este o normă.

Pentru $n = 2$, $x = (1, 0)$ şi $y = (0, 1)$, avem $\|x\|_1 = \|y\|_1 = 1$, $\|x + y\|_1 = \|x - y\|_1 = 2$, deci identitatea paralelogramului nu este satisfăcută.

2. *Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dată de $f(x) = \|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|\}$ pentru orice $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, este o normă care nu satisface identitatea paralelogramului.*

Soluţie. Se verifică imediat că f este o normă.

Pentru $n=2$, $x=(1, 1)$ şi $y=(1, 0)$, avem $\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = 1$, $\|x+y\|_\infty = 2$ şi $\|x - y\|_\infty = 1$, deci identitatea paralelogramului nu este satisfăcută.

3. *Să se arate că există a şi b numere reale strict pozitive astfel încât $a\|x\|_1 \leq \|x\| \leq b\|x\|_1$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$.*

Soluţie. Conform inegalităţii Cauchy-Buniakovski-Schwarz, avem

$$|x_1| + |x_2| + ... + |x_n| \leq \sqrt{n}\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2},$$

i.e. $\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_1 \leq \|x\|$ şi $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} \leq |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|$, i.e. $\|x\| \leq \|x\|_1$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$, deci putem alege $a = \frac{1}{\sqrt{n}}$ şi $b = 1$.

4. *Să se arate că există a şi b numere reale strict pozitive astfel încât $a\|x\|_1 \leq \|x\|_\infty \leq b\|x\|_1$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$.*

Soluţie. Avem $|x_1| + |x_2| + ... + |x_n| \leq n\max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|\}$, i.e. $\frac{1}{n}\|x\|_1 \leq \|x\|_\infty$ şi $\max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|\} \leq |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|$, i.e. $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$, deci putem alege $a = \frac{1}{n}$ şi $b = 1$.

5. *Este adevărat că $|x \cdot y| \leq \|x\|_1 \|y\|_1$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^n$? Dar că $|x \cdot y| \leq \|x\|_\infty \|y\|_\infty$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^n$?*

Soluţie. Pe de o parte avem

$$|x \cdot y| = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| |y_i| \leq \max\{|y_1|, |y_2|, ..., |y_n|\} \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |y_i| \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

i.e. $|x \cdot y| \leq \|x\|_1 \|y\|_1$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Pe de altă parte, pentru $x = y = (1, 1, ..., 1)$, avem $|x \cdot y| = n$ şi $\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = 1$, deci inegalitatea $|x \cdot y| \leq \|x\|_\infty \|y\|_\infty$ este falsă.

6. *Dacă $x, y \in \mathbb{R}^n$, este adevărat că $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ dacă şi numai dacă există $c \geq 0$ astfel încât $x = cy$ sau $y = cx$?*

Soluţie. Avem

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \|y\| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2x \cdot y = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \|y\| \Leftrightarrow x \cdot y = \|x\| \|y\|.$$

Dacă x şi y sunt nenuli, atunci ultima egalitate are loc dacă şi numai dacă există $c > 0$ astfel încât $x = cy$.

7. *Dacă $x, y \in \mathbb{R}^n$, este adevărat că $\|x + y\|_\infty = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ dacă şi numai dacă există $c \geq 0$ astfel încât $x = cy$ sau $y = cx$?*

Soluţie. Dacă există $c \geq 0$ astfel încât $x = cy$, atunci

$$\|x + y\|_\infty = \|x + cx\|_\infty = (1 + c)\|x\|_\infty = \|x\|_\infty + c\|x\|_\infty =$$

$$= \|x\|_\infty + \|cx\|_\infty = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Similar se arată că dacă există $c \geq 0$ astfel încât $y = cx$, atunci $\|x + y\|_\infty = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$.

Pentru $n = 2$, $x = (1, 0)$ şi $y = (1, -1)$, avem $\|x + y\|_\infty = \|(2, 0)\|_\infty = 2 = 1 + 1 = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$, dar nu există $c \geq 0$ astfel încât $x = cy$ sau $y = cx$.

8. *Să se arate că dacă $x, y \in \mathbb{R}^n$, atunci $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ dacă şi numai dacă $x \cdot y = 0$.*

Soluţie. Avem $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Leftrightarrow \|x\|^2 + \|y\|^2 + x \cdot y + y \cdot x = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Leftrightarrow 2x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x \cdot y = 0$.

ELEMENTE DE TOPOLOGIE

Analiza topologică a unei mulţimi

1. *Pentru o submulţime A a lui $\mathbb{R}^n$, fie $\overline{A}$ intersecţia tuturor submulţimilor închise ale lui $\mathbb{R}^n$ care conţin pe A. $\overline{A}$ se numeşte închiderea (sau aderenţa) lui A şi este cea mai mică (în sensul incluziunii) mulţime închisă care conţine pe A.*

Să se arate că:

i) $\overline{A}$ este o mulţime închisă.

ii) $A \subseteq \overline{A}$.

iiii) A este închisă dacă şi numai dacă $A = \overline{A}$.

iv) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

v) $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid B(x,r) \cap A\} \neq \emptyset$, pentru orice $r > 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V \cap A \neq \emptyset$, pentru orice vecinătate V a lui $x\}$.

vi) Dacă $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n$, atunci $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

vii) Dacă $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, atunci $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$.

viii) Dacă $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, atunci $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. Este adevărat că dacă $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, atunci $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cap B}$?

Soluţie.

i) Deoarece $\overline{A}$ este o intersecţie de mulţimi închise, ea este o mulţime închisă.

ii) Este imediat că $A \subseteq \bigcap\limits_{A \subseteq F,\ F \text{ închisă}} F = \overline{A}$.

iii) "$\Rightarrow$" Dacă mulţimea A este închisă, atunci $\bigcap\limits_{A \subseteq F,\ F \text{ închisă}} F \subseteq A$, deci $\overline{A} \subseteq A$. Prin urmare $\overline{A} = A$.

"$\Leftarrow$" Dacă $\overline{A} = A$, cum $\overline{A}$ este mulţime închisă, deducem că A este închisă.

iv) Decurge din i) şi iii).

v) Vom demonstra incluziunea $\subseteq$.

Fie $x_0 \in \bigcap\limits_{A \subseteq F,\ F \text{ închisă}} F$. Să presupunem, prin reducere la absurd, că $x_0 \notin \{x \in \mathbb{R}^n \mid V \cap A \neq \emptyset$ pentru orice vecinătate V a lui $x\}$. Atunci există $V_0 \in \mathcal{V}_{x_0}$ astfel încât $V_0 \cap A = \emptyset$. Deoarece $V_0 \in \mathcal{V}_{x_0}$, există $r_0 > 0$ cu proprietatea că $B(x_0, r_0) \subseteq V_0$, deci $B(x_0, r_0) \cap A = \emptyset$, i.e. $A \subseteq \mathbb{R}^n - B(x_0, r_0) \overset{not}{=} F_0$. Drept urmare, cum F_0 este închisă, obţinem $x_0 \in \bigcap\limits_{A \subseteq F,\ F \text{ închisă}} F \subseteq F_0$, i.e. $x_0 \notin B(x_0, r_0)$, ceea ce constituie o contradicţie.

Acum vom demonstra incluziunea $\supseteq$.

Fie $x_0 \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid V \cap A \neq \emptyset$, pentru orice vecinătate V a lui $x\}$. Să presupunem, prin reducere la absurd, că $x_0 \notin \bigcap\limits_{A \subseteq F,\ F \text{ închisă}} F$. Atunci există F_0 mulţime închisă astfel încât $A \subseteq F_0$ şi $x_0 \notin F_0$. Prin urmare