CUPRINS

* *E – enunțuri*

** *R – răspunsuri, rezolvări*

I Permutări

Permutări. Transpoziții

Breviar de teorie

Noțiuni introductive

- Fie mulțimea finită $A = \{1, 2, ..., n\}$. O funcție bijectivă $\sigma : A \to A$, se numeşte *permutare* de ordin n, unde $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
- Mulțimea tuturor permutărilor de ordin n se notează cu S_n, iar card $S_n = n!$.
- Orice permutare de ordinul n, se reprezintă astfel:

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \dots & \tau(n) \end{pmatrix}.$$

- Permutarea $e_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$ se numeşte *permutare identică* de ordin n (se mai notează şi simplu cu e).
- *Exemple*:

1) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_3$, unde $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 3$, $\sigma(3) = 1$.

2) $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_4$, unde $\tau(1) = 4$, $\tau(2) = 3$, $\tau(3) = 2$, $\tau(4) = 1$.

3) $e_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in S_5$.

Compunerea permutărilor

Definiție. Considerăm permutările: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ şi $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \dots & \tau(n) \end{pmatrix}$, $\sigma, \tau \in S_n$. Atunci permutarea

$\sigma\circ\tau=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(\tau(1)) & \sigma(\tau(2)) & \dots & \sigma(\tau(n)) \end{pmatrix}$ se numește *compusa permutărilor* σ cu τ.

Observații:

1. Dacă $\sigma \in S_n$, $\tau \in S_n$, atunci $\sigma \circ \tau \in S_n$ și $\tau \circ \sigma \in S_n$
2. În general, $\sigma \circ \tau \neq \tau \circ \sigma$.
3. Prin convenție, $\sigma^2 = \sigma \circ \sigma$ și $\sigma^n = \sigma^{n-1} \circ \sigma$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

Exemplu (de compunere de permutări):

Fie permutările $\sigma, \tau \in S_4$, unde $\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, iar $\tau=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Avem $\sigma\circ\tau=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, deoarece:

$(\sigma \circ \tau)(1) = \sigma(\tau(1)) = \sigma(3) = 4$, adică $1 \to 4$,

$(\sigma \circ \tau)(2) = \sigma(\tau(2)) = \sigma(1) = 2$, adică $2 \to 2$,

$(\sigma \circ \tau)(3) = \sigma(\tau(3)) = \sigma(2) = 3$, adică $3 \to 3$,

$(\sigma \circ \tau)(4) = \sigma(\tau(4)) = \sigma(4) = 1$, adică $4 \to 1$.

Avem $\tau\circ\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, deoarece:

$(\tau \circ \sigma)(1) = \tau(\sigma(1)) = \tau(2) = 1$, adică $1 \to 1$,

$(\tau \circ \sigma)(2) = \tau(\sigma(2)) = \tau(3) = 2$, adică $2 \to 2$,

$(\tau \circ \sigma)(3) = \tau(\sigma(3)) = \tau(4) = 4$, adică $3 \to 4$,

$(\tau \circ \sigma)(4) = \tau(\sigma(4)) = \tau(1) = 3$, adică $4 \to 3$.

Proprietăți (ale compunerii permutărilor)

1. Compunerea permutărilor este asociativă, dar nu este comutativă.
2. Compunerea permutărilor admite elementul neutru $e_n=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$, adică: $\sigma \circ e_n = e_n \circ \sigma = \sigma$, pentru orice permutare $\sigma \in S_n$.

Inversa unei permutări

Propoziție. Pentru orice permutare $\sigma \in S_n$, există o unică permutare, notată σ^{-1}, astfel încât $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = e_n$.

Permutarea σ^{-1} se numeşte *inversa* permutării σ.

Exemplu:

Inversa permutării $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ este permutarea $\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

$(\tau \circ \tau^{-1})(1) = 1 \Rightarrow \tau(\tau^{-1}(1)) = 1 \Rightarrow \tau^{-1}(1) = 2$, adică $1 \to 2$,

$(\tau \circ \tau^{-1})(2) = 2 \Rightarrow \tau(\tau^{-1}(2)) = 2 \Rightarrow \tau^{-1}(2) = 3$, adică $2 \to 3$,

$(\tau \circ \tau^{-1})(3) = 3 \Rightarrow \tau(\tau^{-1}(3)) = 3 \Rightarrow \tau^{-1}(3) = 1$, adică $3 \to 1$,

$(\tau \circ \tau^{-1})(4) = 4 \Rightarrow \tau(\tau^{-1}(4)) = 4 \Rightarrow \tau^{-1}(4) = 4$, adică $4 \to 4$.

$(\tau^{-1} \circ \tau)(1) = 1 \Rightarrow \tau^{-1}(\tau(1)) = 1 \Rightarrow \tau^{-1}(3) = 1$, adică $3 \to 1$,

$(\tau^{-1} \circ \tau)(2) = 2 \Rightarrow \tau^{-1}(\tau(2)) = 2 \Rightarrow \tau^{-1}(1) = 2$, adică $1 \to 2$,

$(\tau^{-1} \circ \tau)(3) = 3 \Rightarrow \tau^{-1}(\tau(3)) = 3 \Rightarrow \tau^{-1}(2) = 3$, adică $2 \to 3$,

$(\tau^{-1} \circ \tau)(4) = 4 \Rightarrow \tau^{-1}(\tau(4)) = 4 \Rightarrow \tau^{-1}(4) = 4$, adică $4 \to 4$.

Inversiunile unei permutări. Semnul unei permutări

- Dacă $\sigma \in S_n$ este o permutare de ordin n, atunci o pereche ordonată (i, j) din mulțimea $M = \{(i, j) | 1 \le i < j \le n\}$ cu proprietatea $i < j$ şi $\sigma(i) > \sigma(j)$, se numeşte *inversiune* a permutării σ.

  Mai putem spune că *o inversiune în permutarea* σ este o pereche de numere naturale $(\sigma(i), \sigma(j))$ situată pe linia a doua a tabloului, având proprietatea $i < j$ şi $\sigma(i) > \sigma(j)$.

- Numărul inversiunilor permutării σ se notează $m(\sigma)$.

  Numărul $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)}$ se numeşte *signatura* (*semnul*) permutării σ.

  - Dacă $\varepsilon(\sigma) = 1$, atunci permutarea se numeşte *pară*.
  - Dacă $\varepsilon(\sigma) = -1$, atunci permutarea se numeşte *impară*.

- Oricare ar fi permutarea $\sigma \in S_n$, $n \ge 2$, avem:

$$0 \le m(\sigma) \le \frac{n(n-1)}{2}.$$

Proprietate. Dacă $\sigma_1 \in S_n$, $\sigma_2 \in S_n$, atunci $\varepsilon(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \varepsilon(\sigma_1) \cdot \varepsilon(\sigma_2)$.

Exemplu:

Să se determine semnul permutării $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Să se scrie următoarele permutări ca un produs de transpoziții:

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Rezolvare.

a) Cum $\sigma(1) = 3 \neq 1$, atunci considerăm transpoziția $\tau_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Efectuăm compunerea $\sigma' = \tau_{13} \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Cum $\sigma'(2) = 5 \neq 2$, considerăm transpoziția $\tau_{25} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. Efectuăm compunerea $\sigma'' = \tau_{25} \circ \sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \tau_{45}$.

Cum $\tau_{45} = \tau_{25} \circ \sigma' = \tau_{25} \circ \tau_{13} \circ \sigma$, pentru a determina permutarea σ, amplificăm egalitatea la stânga cu $\tau_{25}^{-1} = \tau_{25}$, apoi cu $\tau_{13}^{-1} = \tau_{13}$, astfel am obținut $\sigma = \tau_{13} \circ \tau_{25} \circ \tau_{45}$.

b) Cum $\sigma(1) = 3 \neq 1$, atunci considerăm transpoziția $\tau_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Efectuăm compunerea $\sigma' = \tau_{13} \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Cum $\sigma'(2) = 3 \neq 2$, considerăm transpoziția $\tau_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Efectuăm compunerea $\sigma'' = \tau_{23} \circ \sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Cum $\sigma''(4) = 5 \neq 4$, considerăm transpoziția $\tau_{45} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. Efectuăm compunerea $\sigma''' = \tau_{45} \circ \sigma'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = e$.

Deci $e = \tau_{45} \circ \sigma'' = \tau_{45} \circ \tau_{23} \circ \sigma' = \tau_{45} \circ \tau_{23} \circ \tau_{13} \circ \sigma$, de unde $\sigma = \tau_{13} \circ \tau_{32} \circ \tau_{45}$.

Probleme propuse

1. Dacă S_n reprezintă mulțimea permutărilor de ordin n, să se determine $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, în următoarele cazuri:

a) card $S_n = 24$; b) card $S_n = 720$; c) card $S_n = 120$.

2. Să se calculeze $\sigma_1 \circ \sigma_2$ și $\sigma_2 \circ \sigma_1$, în cazurile următoare:

a) $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ și $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

b) $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ și $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

c) $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ și $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$;

d) $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ și $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

3. Să se calculeze σ^2, σ^3, σ^4 și σ^{2012} în cazurile următoare:

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

c) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; d) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Arătați că pentru orice $\sigma \in S_n$, există $p \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\sigma^p = e$, unde e este permutarea identică din S_n, oricare ar fi $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

5. Să se determine cel mai mic număr natural $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\sigma^n = e$, în fiecare dintre cazurile următoare:

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; c) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Să se calculeze inversele următoarelor permutări:

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;