

# CUPRINS

E\*      R\*\*

## **Capitolul I. PERMUTĂRI**

Permutări. Inversiunile unei permutări. Transpoziții	.....
Breviar de teorie .....	3
Probleme propuse .....	9 .....
<i>Teste de evaluare</i> .....	13 .....
	232

## **Capitolul II. MATRICE**

1. Noțiunea de matrice. Transpusa unei matrice. Adunarea matricelor.	.....
Înmulțirea unei matrice cu un scalar	
Breviar de teorie .....	14
Probleme propuse .....	20 .....
2. Înmulțirea a două matrice. Ridicarea matricelor la puterea $n$	
Breviar de teorie .....	24
Probleme propuse .....	30 .....
<i>Teste de evaluare</i> .....	39 .....
	232

## **Capitolul III. DETERMINANȚI**

1. Calculul determinanților	.....
Breviar de teorie .....	41
Probleme propuse .....	47 .....
2. Proprietățile determinantelor	
Breviar de teorie .....	50
Probleme propuse .....	54 .....
3. Aplicații ale determinantelor în geometria în plan	
Breviar de teorie .....	64
Probleme propuse .....	68 .....
<i>Teste de evaluare</i> .....	71 .....
	246
	253
	256

## **Capitolul IV. INVERSA UNEI MATRICE PĂTRATICE**

Breviar de teorie .....	.....
Probleme propuse .....	78 .....
<i>Teste de evaluare</i> .....	83 .....
	258
	260

## **Capitolul V. SISTEME DE ECUAȚII LINIARE**

1. Metode de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare. Metoda lui Cramer.	.....
Metoda matriceală. Metoda lui Gauss	
Breviar de teorie .....	85
Probleme propuse .....	88 .....
2. Rangul unei matrice	
Breviar de teorie .....	91
Probleme propuse .....	94 .....
3. Sisteme de ecuații liniare. Studiul compatibilității acestora	
Breviar de teorie .....	97
Probleme propuse .....	107 .....
<i>Teste de evaluare</i> .....	113 .....
	261
	262
	263
	266

\* E – enunțuri

\*\* R – răspunsuri, rezolvări

**Capitolul VI. LEGI DE COMPOZIȚIE**

1. Legi de compoziție pe o mulțime. Parte stabilă	116
Breviar de teorie .....	.....
Probleme propuse .....	119 ..... 269
2. Proprietăți ale legilor de compoziție interne	124
Breviar de teorie .....	.....
Probleme propuse .....	128 ..... 272
<i>Teste de evaluare</i> .....	134 ..... 276

**Capitolul VII. GRUPURI**

1. Monoizi. Grupuri	136
Breviar de teorie .....	.....
Probleme propuse .....	140 ..... 277
2. Grupuri finite. Subgrupuri. Ordinul unui grup finit. Ordinul unui element	146
Breviar de teorie .....	.....
Probleme propuse .....	150 ..... 282
3. Morfisme de grupuri. Izomorfisme de grupuri	155
Breviar de teorie .....	.....
Probleme propuse .....	159 ..... 285
<i>Teste de evaluare</i> .....	165 ..... 289

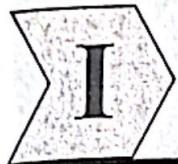
**Capitolul VIII. INELE ȘI CORPURI**

1. Inele	168
Breviar de teorie .....	.....
Probleme propuse .....	175 ..... 291
2. Corpuri	179
Breviar de teorie .....	.....
Probleme propuse .....	183 ..... 295
<i>Teste de evaluare</i> .....	186 ..... 298

**Capitolul IX. POLINOAME**

1. Polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ. Operații cu polinoame.	
Teorema împărțirii cu rest	
Breviar de teorie .....	.....
Probleme propuse .....	187 ..... 300
2. Divizibilitatea polinoamelor. Rădăcini multiple. Descompunerea polinoamelor.	
Cel mai mare divizor comun al unor polinoame. Cel mai mic multiplu comun	
al unor polinoame	
Breviar de teorie .....	.....
Probleme propuse .....	196 ..... 303
3. Relațiile lui François Viète. Ecuații algebrice cu coeficienți în $\mathbb{Z}$ , $\mathbb{Q}$ , $\mathbb{R}$ , $\mathbb{C}$	
Ecuații bipătrate. Ecuații reciproce	
Breviar de teorie .....	.....
Probleme propuse .....	209 ..... 306
<i>Teste de evaluare</i> .....	226 ..... 313

Promotori ai matematicii .....	315
Bibliografie selectivă .....	318



# Permutări

## Permutări. Transpoziții

### Breviar de teorie

#### Noțiuni introductive

- Fie mulțimea finită  $A = \{1, 2, \dots, n\}$ . O funcție bijectivă  $\sigma : A \rightarrow A$ , se numește *permutare* de ordin  $n$ , unde  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ .
- Mulțimea tuturor permutărilor de ordin  $n$  se notează cu  $S_n$ , iar  $\text{card } S_n = n!$ .
- Orice permutare de ordinul  $n$ , se reprezintă astfel:

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \dots & \tau(n) \end{pmatrix}.$$

- Permutarea  $e_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$  se numește *permutare identică* de ordin  $n$  (se mai notează și simplu cu  $e$ ).
- *Exemple:*

$$1) \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_3, \text{ unde } \sigma(1) = 2, \sigma(2) = 3, \sigma(3) = 1.$$

$$2) \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_4, \text{ unde } \tau(1) = 4, \tau(2) = 3, \tau(3) = 2, \tau(4) = 1.$$

$$3) e_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in S_5.$$

#### Componerea permutărilor

*Definiție.* Considerăm permutările:  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$  și  $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \dots & \tau(n) \end{pmatrix}, \sigma, \tau \in S_n$ . Atunci permutarea

$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(\tau(1)) & \sigma(\tau(2)) & \dots & \sigma(\tau(n)) \end{pmatrix}$  se numește compusa permutărilor  $\sigma$  cu  $\tau$ .

*Observații:*

1. Dacă  $\sigma \in S_n$ ,  $\tau \in S_n$ , atunci  $\sigma \circ \tau \in S_n$  și  $\tau \circ \sigma \in S_n$
2. În general,  $\sigma \circ \tau \neq \tau \circ \sigma$ .
3. Prin convenție,  $\sigma^2 = \sigma \circ \sigma$  și  $\sigma^n = \sigma^{n-1} \circ \sigma$ , oricare ar fi  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ .

*Exemplu* (de compunere de permutări):

Fie permutările  $\sigma, \tau \in S_4$ , unde  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ , iar  $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ .

Avem  $\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ , deoarece:

$$(\sigma \circ \tau)(1) = \sigma(\tau(1)) = \sigma(3) = 4, \text{ adică } 1 \rightarrow 4,$$

$$(\sigma \circ \tau)(2) = \sigma(\tau(2)) = \sigma(1) = 2, \text{ adică } 2 \rightarrow 2,$$

$$(\sigma \circ \tau)(3) = \sigma(\tau(3)) = \sigma(2) = 3, \text{ adică } 3 \rightarrow 3,$$

$$(\sigma \circ \tau)(4) = \sigma(\tau(4)) = \sigma(4) = 1, \text{ adică } 4 \rightarrow 1.$$

Avem  $\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ , deoarece:

$$(\tau \circ \sigma)(1) = \tau(\sigma(1)) = \tau(2) = 1, \text{ adică } 1 \rightarrow 1,$$

$$(\tau \circ \sigma)(2) = \tau(\sigma(2)) = \tau(3) = 2, \text{ adică } 2 \rightarrow 2,$$

$$(\tau \circ \sigma)(3) = \tau(\sigma(3)) = \tau(4) = 4, \text{ adică } 3 \rightarrow 4,$$

$$(\tau \circ \sigma)(4) = \tau(\sigma(4)) = \tau(1) = 3, \text{ adică } 4 \rightarrow 3.$$

*Proprietăți* (ale compunerii permutărilor)

1. Compunerea permutărilor este asociativă, dar nu este comutativă.

2. Compunerea permutărilor admite elementul neutru  $e_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ , adică:  $\sigma \circ e_n = e_n \circ \sigma = \sigma$ , pentru orice permutare  $\sigma \in S_n$ .

### Inversa unei permutări

*Propoziție.* Pentru orice permutare  $\sigma \in S_n$ , există o unică permutare, notată  $\sigma^{-1}$ , astfel încât  $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = e_n$ .

Permutarea  $\sigma^{-1}$  se numește *inversa* permutării  $\sigma$ .

*Exemplu:*

Inversa permutării  $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$  este permutarea  $\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ .

$$(\tau \circ \tau^{-1})(1) = 1 \Rightarrow \tau(\tau^{-1}(1)) = 1 \Rightarrow \tau^{-1}(1) = 2, \text{ adică } 1 \rightarrow 2,$$

$$(\tau \circ \tau^{-1})(2) = 2 \Rightarrow \tau(\tau^{-1}(2)) = 2 \Rightarrow \tau^{-1}(2) = 3, \text{ adică } 2 \rightarrow 3,$$

$$(\tau \circ \tau^{-1})(3) = 3 \Rightarrow \tau(\tau^{-1}(3)) = 3 \Rightarrow \tau^{-1}(3) = 1, \text{ adică } 3 \rightarrow 1,$$

$$(\tau \circ \tau^{-1})(4) = 4 \Rightarrow \tau(\tau^{-1}(4)) = 4 \Rightarrow \tau^{-1}(4) = 4, \text{ adică } 4 \rightarrow 4.$$

$$(\tau^{-1} \circ \tau)(1) = 1 \Rightarrow \tau^{-1}(\tau(1)) = 1 \Rightarrow \tau^{-1}(3) = 1, \text{ adică } 3 \rightarrow 1,$$

$$(\tau^{-1} \circ \tau)(2) = 2 \Rightarrow \tau^{-1}(\tau(2)) = 2 \Rightarrow \tau^{-1}(1) = 2, \text{ adică } 1 \rightarrow 2,$$

$$(\tau^{-1} \circ \tau)(3) = 3 \Rightarrow \tau^{-1}(\tau(3)) = 3 \Rightarrow \tau^{-1}(2) = 3, \text{ adică } 2 \rightarrow 3,$$

$$(\tau^{-1} \circ \tau)(4) = 4 \Rightarrow \tau^{-1}(\tau(4)) = 4 \Rightarrow \tau^{-1}(4) = 4, \text{ adică } 4 \rightarrow 4.$$

### Inversiunile unei permutări. Semnul unei permutări

- Dacă  $\sigma \in S_n$  este o permutare de ordin  $n$ , atunci o pereche ordonată  $(i, j)$  din mulțimea  $M = \{(i, j) | 1 \leq i < j \leq n\}$  cu proprietatea  $i < j$  și  $\sigma(i) > \sigma(j)$ , se numește *inversiune* a permutării  $\sigma$ .

Mai putem spune că o *inversiune în permutarea*  $\sigma$  este o pereche de numere naturale  $(\sigma(i), \sigma(j))$  situată pe linia a două a tabloului, având proprietatea  $i < j$  și  $\sigma(i) > \sigma(j)$ .

- Numărul inversiunilor permutării  $\sigma$  se notează  $m(\sigma)$ .

Numărul  $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)}$  se numește *signatura (semnul)* permutării  $\sigma$ .

- Dacă  $\varepsilon(\sigma) = 1$ , atunci permutarea se numește *pară*.

- Dacă  $\varepsilon(\sigma) = -1$ , atunci permutarea se numește *impară*.

- Oricare ar fi permutarea  $\sigma \in S_n$ ,  $n \geq 2$ , avem:

$$0 \leq m(\sigma) \leq \frac{n(n-1)}{2}.$$

*Proprietate.* Dacă  $\sigma_1 \in S_n$ ,  $\sigma_2 \in S_n$ , atunci  $\varepsilon(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \varepsilon(\sigma_1) \cdot \varepsilon(\sigma_2)$ .

*Exemplu:*

Să se determine semnul permutării  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ .

4. Să se scrie următoarele permutări ca un produs de transpoziții:

$$a) \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad b) \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

*Rezolvare.*

$$a) \text{Cum } \sigma(1) = 3 \neq 1, \text{ atunci considerăm transpoziția } \tau_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Efectuăm compunerea } \sigma' = \tau_{13} \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Cum } \sigma'(2) = 5 \neq 2, \text{ considerăm transpoziția } \tau_{25} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Efectuăm}$$

$$\text{compunerea } \sigma'' = \tau_{25} \circ \sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \tau_{45}.$$

Cum  $\tau_{45} = \tau_{25} \circ \sigma' = \tau_{25} \circ \tau_{13} \circ \sigma$ , pentru a determina permutarea  $\sigma$ , amplificăm egalitatea la stânga cu  $\tau_{25}^{-1} = \tau_{25}$ , apoi cu  $\tau_{13}^{-1} = \tau_{13}$ , astfel am obținut  $\sigma = \tau_{13} \circ \tau_{25} \circ \tau_{45}$ .

$$b) \text{Cum } \sigma(1) = 3 \neq 1, \text{ atunci considerăm transpoziția } \tau_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Efectuăm compunerea } \sigma' = \tau_{13} \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Cum } \sigma'(2) = 3 \neq 2, \text{ considerăm transpoziția } \tau_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}. \text{ Efectuăm}$$

$$\text{compunerea } \sigma'' = \tau_{23} \circ \sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Cum } \sigma''(4) = 5 \neq 4, \text{ considerăm transpoziția } \tau_{45} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}. \text{ Efectuăm}$$

$$\text{compunerea } \sigma''' = \tau_{45} \circ \sigma'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = e.$$

Deci  $e = \tau_{45} \circ \sigma'' = \tau_{45} \circ \tau_{23} \circ \sigma' = \tau_{45} \circ \tau_{23} \circ \tau_{13} \circ \sigma$ , de unde  $\sigma = \tau_{13} \circ \tau_{32} \circ \tau_{45}$ .

## Probleme propuse

1. Dacă  $S_n$  reprezintă mulțimea permutărilor de ordin  $n$ , să se determine  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n \geq 2$ , în următoarele cazuri:

a)  $\text{card } S_n = 24$ ;    b)  $\text{card } S_n = 720$ ;    c)  $\text{card } S_n = 120$ .

2. Să se calculeze  $\sigma_1 \circ \sigma_2$  și  $\sigma_2 \circ \sigma_1$ , în cazurile următoare:

a)  $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  și  $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ;

b)  $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$  și  $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ;

c)  $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$  și  $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ ;

d)  $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$  și  $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ .

3. Să se calculeze  $\sigma^2$ ,  $\sigma^3$ ,  $\sigma^4$  și  $\sigma^{2012}$  în cazurile următoare:

a)  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ;    b)  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ;

c)  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ;    d)  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ .

4. Arătați că pentru orice  $\sigma \in S_n$ , există  $p \in \mathbb{N}^*$ , astfel încât  $\sigma^p = e$ , unde  $e$  este permutarea identică din  $S_n$ , oricare ar fi  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ .

5. Să se determine cel mai mic număr natural  $n \in \mathbb{N}^*$ , astfel încât  $\sigma^n = e$ , în fiecare dintre cazurile următoare:

a)  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ;    b)  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ;    c)  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ .

6. Să se calculeze inversele următoarelor permutări:

a)  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ;    b)  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ;