ARTUR BĂLĂUCĂ

ALGEBRĂ GEOMETRIE

1500
DE PROBLEME SEMNIFICATIVE
PENTRU
OLIMPIADE, CONCURSURI
ŞI
CENTRE DE EXCELENŢĂ

18 TEME PENTRU CENTRELE DE EXCELENŢĂ
200 DE PROBLEME REZOLVATE

CLASA A VII-A
EDIŢIA A IX-A

EDITURA TAIDA
IAŞI, 2020

CUPRINS

ALGEBRĂ

CAPITOLUL 1

MULŢIMEA NUMERELOR ÎNTREGI. DIVIZIBILITATE ÎN $\mathbb{Z}$

(Temă pentru centrul de excelență)

Reţineţi!

Un număr întreg b divide un număr întreg a dacă există un număr întreg c astfel încât $a = b \cdot c$.

Observaţii:

1. Nu există pentru orice pereche de numere întregi a şi b un număr întreg c astfel încât $a = b \cdot c$ şi urmează că relaţia b / a nu este peste tot definită în $\mathbb{Z}$.

2. Pentru orice $a \in \mathbb{Z}$ mulţimea $D_a = \{x \in \mathbb{Z} / x / a\}$ este mulţimea divizorilor lui a. Dacă $a \in \mathbb{Z}^*$, atunci divizorii lui a sunt în număr finit (cel mult $2|a|$).

Proprietăţi

1. a / a, oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}$ (*reflexivitatea*); **2**. a / b şi $b / c \Rightarrow a / c$ (*tranzitivitatea*). **3**. a / b şi $b / a \Rightarrow a = b$ sau $a = -b$, adică $|a| = |b|$; **4**. $1 / a$ şi $-1 / a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}$. **5**. $a / 1$ sau $a / -1 \Rightarrow |a| = 1$; **6**. $a / 0$, oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}$; **7**. $0 / a \Rightarrow a = 0$; **8**. $a / b \Leftrightarrow (-a) / b \Leftrightarrow a / (-b) \Leftrightarrow (-a) / (-b)$; **9**. $a / b \Rightarrow a / b \cdot c$, oricare ar fi $c \in \mathbb{Z}$. **10**. a / b_1 şi $a / b_2 \Rightarrow a / b_1 \pm b_2$; **11**. a / b_1 şi $a / b_2 \Rightarrow a / b_1c_1 + b_2c_2$, oricare ar fi $c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$; **12**. $a / b \Rightarrow ac / bc$, $c \in \mathbb{Z}$; **13**. ac / bc şi $c \neq 0 \Rightarrow a / b$; **14**. a_1 / b_1 şi $a_2 / b_2 \Rightarrow a_1a_2 / b_1b_2$; **15**. $a / b \Rightarrow b = 0$ sau $|a| \leq |b|$; **16**. a / b şi $|a| > |b| \Rightarrow b = 0$.

Cel mai mare divizor comun şi cel mai mic multiplu comun

➲ C.m.m.d.c. al numerelor întregi a şi b (notat (a,b)) este un număr întreg d care satisface condiţiile: **1)** d / a şi d / b; **2)** dacă d_1 / a şi d_1 / b, atunci d_1 / d.

➲ C.m.m.m.c. al numerelor întregi a şi b (notat $[a, b]$) este un număr întreg m care îndeplineşte condiţiile: **1)** a / m şi b / m; **2)** oricare ar fi $m_1 \in \mathbb{Z}$ cu proprietatea a / m_1 şi b / m_1, atunci m / m_1.

➲ Două numere întregi a şi b se numesc prime între ele dacă $(a, b) = 1$.

➲ Dacă a / bc şi $(a, b) = 1$, atunci a / c. **(teorema lui Gauss)**

➲ Dacă a / c, b / c şi $(a, b) = 1$, atunci ab / c.

➲ $[a,b] \cdot (a, b) = a \cdot b$.

Numere prime şi numere compuse

➲ Un număr întreg a se numeşte **număr prim** dacă mulţimea divizorilor săi are cardinalul 4.

Observaţii:

1. Condiţia revine la $a \notin \{-1, 0, 1\}$ şi $D_a = \{-1, 1, -a, a\}$.

2. Reprezentarea $n = \pm\, p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, unde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{N}^*$, $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sunt numere prime şi $0 < p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ se numeşte **descompunerea canonică** a numărului întreg n.

➲ Numărul divizorilor întregi ai unui număr întreg n ($n \neq 0$) scris sub forma:
$n = \pm p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ este egal cu $2(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1)$.

Probleme rezolvate:

1. Aflaţi numerele întregi x ştiind că: **a)** $\frac{4x-3}{x-3} \in \mathbb{Z}$; **b)** $\frac{5x-3}{3x+5} \in \mathbb{Z}$.

Rezolvare:

a) $\frac{4x-3}{x-3} \in \mathbb{Z}$ implică $x - 3 / 4x - 3$, de unde $x - 3 / 4(x - 3) + (12 - 3)$ sau $x - 3 / 4(x - 3) + 9$, **(1)** Cum $x - 3 / 4(x - 3)$ oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}$, din **(1)** rezultă $x - 3/9$, adică $x - 3 \in \{-9; -3; -1; 1; 3; 9\}$. Rezolvând ecuaţiile: $x - 3 = -9$; $x - 3 = -3$ etc. se obţine: $x \in \{-6; 0; 2; 4; 6; 12\}$.

b) $\frac{5x-3}{3x+5} \in \mathbb{Z}$ implică $3x + 5 / 5x - 3$, de unde $3x + 5 / 3(5x - 3)$ sau $3x + 5 / 15x - 9$ sau $3x + 5 / 5(3x + 5) - 9 - 25$ sau $3x + 5 / 5(3x + 5) - 34$, **(1)** Cum $3x + 5/5(3x + 5)$ oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}$ din **(1)** rezultă $3x + 5 / 34$, de unde $3x + 5 \in \{-34; -17; -2; -1; 1; 2; 17; 34\}$. Rezolvând pe rând ecuaţiile: $3x + 5 = -34$; $3x + 5 = -17$ etc. se obţine $x \in \{-13; -2; -1; 4\}$.

2. Fie șirul de numere naturale 7, 77, 777, 7777, … scrise în baza zece.
Să se arate că printre primii 2011 termeni ai șirului există cel puțin unul divizibil cu 2011.

(Concursul „Matematica, de drag", Bistrița, 2014, Rodica Coman)

Rezolvare:

Din primele 2011 numere din șirul $10^1, 10^2, 10^3, \ldots$ vor exista cel puțin două numere care vor da același rest la împărțirea cu 2011 pentru că $(10, 2011) = 1$.

Fie acestea 10^a și 10^b cu $a > b$.

Din $2011 / 10^a - 10^b$ rezultă $2011 / 10^b \cdot (10^{a-b} - 1)$, adică $2011 / 10^b \cdot \underbrace{999...9}_{(a-b)\text{ cifre}}$.

Însă $(2011, 10) = 1$ și $(2011, 9) = 1$, rezultă că $2011 / \underbrace{11...1}_{(a-b)\text{ cifre}}$.

Din $2011 / \underbrace{11...1}_{(a-b)\text{ cifre}}$ și $(7, 2011) = 1$, rezultă că $2011 / \underbrace{77...7}_{(a-b)\text{ cifre}}$.

3. Determinați numerele naturale nenule x, y, z pentru care $\frac{3x}{3x+1} = \frac{2y}{2y+1} = \frac{x+4z}{z+6}$.

(Concursul „Ștefan Dârțu", Vatra Dornei, Supliment G.M. 5/2019, Ion Neață)

Rezolvare:

Deoarece $\frac{3x}{3x+1} < 1$, avem $\frac{x+4z}{z+6} < 1$, de unde $x + 3z < 6$.

Putem avea: $x = 1, z = 1$ sau $x = 2, z = 1$. $x = z = 1$ conduce la $\frac{3}{4} = \frac{2y}{2y+1} = \frac{5}{7}$, contradicție!

$x = 2$ și $z = 1$ conduce la $\frac{6}{7} = \frac{2y}{2y+1}$, de unde $14y = 12y + 6$, adică $y = 3$.

Prin urmare: $x = 2$, $y = 3$ și $z = 1$.

9. Fie numerele naturale a, b, c astfel încât: a/c^2, b/a^2 și c/b^2.
Să se arate că $a \cdot b \cdot c\ /\ (a + b + c)^{210}$, ($n/m$ se citește n divide m). ***(Artur Bălăucă)***

Rezolvare:

• dacă $a = 0$ din $a/c^2 \Rightarrow c = 0$. Din $c = 0$ și $c/b^2 \Rightarrow b = 0$. $0 \cdot 0 \cdot 0\ /\ (0 + 0 + 0)^7$, soluție.
• dacă $a = 1$ din $b/a^2 \Rightarrow b = 1$ și din $c/b^2 \Rightarrow c = 1$. $1 \cdot 1 \cdot 1\ /\ (1 + 1 + 1)^7$, soluție.
• dacă p/a, p prim atunci p/c^2, de unde p/c, iar din $c/b^2 \Rightarrow p/b$.
• analog, dacă p/b, p prim, atunci p/a și p/c iar dacă p/c, p prim $\Rightarrow p/a$ și p/b.

Urmează că numerele naturale a, b, c admit în descompunerea lor în factori primi aceiași factori primi.

Deci avem: $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, $b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}$ și $c = p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\gamma_k}$ unde $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sunt numere naturale prime ($k \in \mathbb{N}^*$) distincte două câte două.

Din $b/a^2 \Rightarrow \beta_i \le 2\alpha_i$. Din $c/b^2 \Rightarrow \gamma_i \le 2\beta_i$ și din $a/c^2 \Rightarrow \alpha_i \le 2\gamma_i$, $(\forall)\ i = \overline{1,k}$.

Este suficient să analizăm cazul: $a = p^\alpha$, $b = p^\beta$ și $c = p^\gamma$ unde p este număr prim și $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^*$.

Dacă $\alpha = \min(\alpha, \beta, \gamma)$ atunci $\alpha + \beta + \gamma \le \alpha + 2\alpha + 4\alpha = 7\alpha$ și $abc = p^{\alpha+\beta+\gamma} \le \left(p^\alpha\right)^7$.

Avem $abc = p^{\alpha+\beta+\gamma}$ și $(a + b + c)^7 = \left(p^\alpha\right)^7 \cdot \left(1 + p^{\beta-\alpha} + p^{\gamma-\alpha}\right)$.

Cum $abc/\left(p^\alpha\right)^7 \Rightarrow abc/(a + b + c)^7$.

Analog se analizează cazurile $\beta = \min(\alpha, \beta, \gamma)$ și $\gamma = \min(\alpha, \beta, \chi)$.

Avem $\alpha + \beta + \gamma \le 2\gamma + \beta + \gamma \le 4\beta + \beta + 2\beta = 7\beta$ și, respectiv, $\alpha + \beta + \gamma \le \gamma + 2\gamma + 4\gamma = 7\gamma$.

Din $a \cdot b \cdot c/(a + b + c)^7 \Rightarrow a \cdot b \cdot c/\left[(a+b+c)^7\right]^{30}$, adică $a \cdot b \cdot c/(a + b + c)^{210}$.

EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. Fie mulţimile: $A = \{x \in \mathbb{Z}\ /\ -4 \le x \le 2\}$ şi $B = \{x \in \mathbb{Z}\ /\ -5 < x < 4\}$. Determinaţi mulţimile: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

2. Fie mulţimile: $A = \{x \in \mathbb{Z}\ /\ |x| \le 3\}$ şi $B = \{x \in \mathbb{Z}^*\ /\ |x - 1| < 2\}$. Determinaţi mulţimile: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

3. Determinaţi $x \in \mathbb{Z}$ astfel încât mulţimile $A = \{1; 2\}$ şi $B = \{2x - 1; 5x - 3\}$ să fie egale.

4. Să se determine mulţimile A, B, C, D ştiind că:
(1) $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$;
(2) $C \cup D = \{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$;
(3) $(A \cap B) \times (C \cap D) = \{(2, 8), (2, 9), (3, 8), (3, 9)\}$;
(4) $(A \setminus B) \times (C \setminus D) = \{(0, 6), (0, 7), (1, 6), (1, 7)\}$.

5. Să se determine mulţimile: A, B, C ştiind că sunt satisfăcute simultan relaţiile:
(1) $(A \setminus C) \times (B \setminus C) = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (4, 2), (4, 3)\}$;
(2) $(A \setminus B) \times (C \setminus A) = \{(1, 5), (1, 6), (4, 5), (4, 6)\}$;
(3) $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, n\}$, unde $n \in \mathbb{N}$ şi $n \ge 7$.

CAPITOLUL 2

RELAŢIA DE CONGRUENŢĂ MODULO *m*
(Temă pentru centrul de excelenţă)

Reţineţi!

Două numere întregi a şi b se numesc **congruente modulo *m***, unde m este un număr întreg, dacă $m / a - b$.

Notaţie: $a \equiv b \pmod{m}$. Se citeşte „a congruent cu b modulo m”.

Observaţii:

1. Pentru $m = 0$, $m / a - b \Leftrightarrow a = b$, adică $\left(a \equiv b \pmod{0}\right) \Leftrightarrow a = b$, deci relaţia de egalitate este un caz particular al relaţiei de congruenţă (în cazul când modulo este 0).

2. $a \equiv b \pmod{1}$ şi $a \equiv b \pmod{-1}$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$.

3. Dacă $m \neq 0$ şi r este restul împărţirii unui număr întreg a prin m, atunci $a \equiv r \pmod{m}$ şi $a \equiv r - m \pmod{m}$.

Exemplu: $30 \equiv 8 \pmod{11}$ şi $30 \equiv -3 \pmod{11}$.

(În aplicaţiile practice, dintre numerele r şi r-m, este de preferat cel care are modulul mai mic).

Reţineţi!

Teoremă: *Două numere a şi b sunt congruente modulo m,* $m \neq 0$, *dacă şi numai dacă dau acelaşi rest la împărţirea prin m.*

Proprietăţi:

1. $a \equiv a \pmod{m}$ (**reflexivitatea**);

2. $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow b \equiv a \pmod{m}$ (**simetria**);

3. $a \equiv b \pmod{m}$ şi $b \equiv c \pmod{m} \Rightarrow a \equiv c \pmod{m}$ (**tranzitivitatea**);

4. $a \equiv b \pmod{m}$ şi $c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow a + c \equiv b + d \pmod{m}$ şi $a - c \equiv b - d \pmod{m}$.

Consecinţe:

a) $a \equiv b \pmod{m}$ şi $c \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + c \equiv b + c \pmod{m}$.

b) Un termen aflat într-un membru oarecare al unei congruenţe poate fi trecut în celălalt membru, schimbându-i-se semnul.

c) Se poate aduna sau scădea la fiecare membru al unei congruenţe orice multiplu al modulului.

5. $a \equiv b \pmod{m}$ şi $c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow ac \equiv bd \pmod{m}$.

În general $a_i \equiv b_i \pmod{m}$, $i = 1, 2, \ldots, n \Rightarrow \prod_{i=1}^{n} a_i \equiv \prod_{i=1}^{n} b_i \pmod{m}$.

Consecinţe:

a) $a \equiv b \pmod{m}$ şi $n \in \mathbb{N} \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m}$.

b) $a \equiv b \pmod{m}$ şi $c \in \mathbb{Z} \Rightarrow ac \equiv bc \pmod{m}$.

6. $a \equiv b \pmod{m}$ şi $c \in \mathbb{Z} \Rightarrow ac \equiv bc \pmod{mc}$.

7. $ac \equiv bc \pmod{m}$ şi $(c, m) = 1 \Rightarrow a \equiv b \pmod{m}$.

8. $ac \equiv bc \pmod{mc}$ şi $c \neq 0 \Rightarrow a \equiv b \pmod{m}$.

9. $a \equiv b \pmod{m_1}$, $a \equiv b \pmod{m_2}$, ... , $a \equiv b \pmod{m_k}$ şi $M = [m_1, m_2, ..., m_k] \Rightarrow$
$\Rightarrow a \equiv b \pmod{M}$.

10. $a \equiv b \pmod{m}$ şi $d/m \Rightarrow a \equiv b \pmod{d}$.

11. $a \equiv b \pmod{m}$ şi d/a, $d/m \Rightarrow d/b$.

Consecinţă: $a \equiv b \pmod{m}$ şi $m/a \Rightarrow m/b$.

Mica teoremă a lui Fermat. Dacă $a, p \in \mathbb{Z}$, p este prim (pozitiv) şi $p \nmid a$, atunci $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Demonstraţie: Considerăm următorii multipli ai lui a:

$M_1 = a$, $M_2 = 2a$, $M_3 = 3a$, ..., $M_{p-1} = (p-1)a$.

Nici unul dintre aceşti întregi nu se divide cu p.

Fie $r_1, r_2, r_3, ..., r_{p-1}$ resturile obţinute la împărţirea numerelor $M_1, M_2, M_3, ..., M_{p-1}$, prin p.

Avem congruenţele: $M_1 \equiv r_1 \pmod{p}$, $M_2 \equiv r_2 \pmod{p}$, ..., $M_{p-1} \equiv r_{p-1} \pmod{p}$. **(*)**

Oricare două din resturile $r_1, r_2, r_3, ..., r_{p-1}$ sunt distincte. Într-adevăr, dacă presupunem că există $i, j \in \{1, 2, 3, ..., p-1\}$, $i \neq j$ astfel încât $r_i = r_j$, urmează că $p/M_i - M_j \Rightarrow p/a(i-j)$.

Cum $p \nmid a$, se obţine că $p/\ i-j$, ceea ce este absurd deoarece $|i-j| < p$. Rezultă că $(r_1, r_2, r_3, ..., r_{p-1}) = \{1, 2, ..., p-1\}$. **(1)**

Înmulţind membru cu membru congruenţele **(*)**, obţinem
$M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdot ... \cdot M_{p-1} \equiv r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot ... \cdot r_{p-1} \pmod{p}$, adică $a \cdot 2a \cdot 3a \cdot ... \cdot (p-1)a \equiv r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot ... \cdot r_{p-1} \pmod{p} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a^{p-1} \cdot (p-1)! \equiv r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot ... \cdot r_{p-1} \pmod{p}$ şi, cum $r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot ... \cdot r_{p-1} = (p-1)!$ (în baza relaţiei (**1**)), rezultă că $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Teorema lui Euler. Dacă $a, m \in \mathbb{Z}$ şi $(a, m) = 1$, atunci $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$, unde $\varphi(m)$ este **funcţia lui Euler**. (numărul numerelor prime cu m mai mici decât $|m|$)

Teorema lui Wilson. Dacă p este un număr prim, atunci $(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}$.

Teorema reciprocă a lui Wilson. Dacă $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$ şi $(n-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{n}$, atunci n este număr prim.

Probleme rezolvate:

1. Să se arate că numărul $A = 3^{40} - 2^{40}$ se divide cu 5. ***(G.M. 5/1987)***

Soluţie: Conform teoremei lui Fermat avem: $3^4 \equiv 1 \pmod{5}$ şi $2^4 \equiv 1 \pmod{5}$.

$3^4 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow (3^4)^{10} \equiv 1^{10} \pmod{5} \Rightarrow 3^{40} \equiv 1 \pmod{5}$, **(1)**

$2^4 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow (2^4)^{10} \equiv 1^{10} \pmod{5} \Rightarrow 2^{40} \equiv 1 \pmod{5}$, (**2**) Scăzând membru cu membru congruenţele (**1**) şi (**2**), obţinem $3^{40} - 2^{40} \equiv 0 \pmod{5} \Leftrightarrow 5/3^{40} - 2^{40}$.

2. Să se afle cel mai mic număr natural k astfel încât numărul $A = 194^{19} \cdot 125^{14} + k$ să fie divizibil cu 7. ***(G.M. 1/1988)***

Soluţie: $194 = 7 \cdot 27 + 5 \Rightarrow 194 \equiv 5 \pmod{7} \Rightarrow 194^{19} \equiv 5^{19} \pmod{7}$, (**1**)

Aplicând teorema lui **Fermat**, avem:

$5^6 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 5^{18} \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 5^{19} \equiv 5 \pmod{7}$, (**2**).

(1) şi **(2)** $\Rightarrow 194^{19} \equiv 5 \pmod{7}$, **(3)** $125 = 7 \cdot 17 + 6 \Rightarrow 125 \equiv 6 \pmod{7} \Rightarrow 125 \equiv -1 \pmod{7} \Rightarrow$
$\Rightarrow 125^{14} \equiv (-1)^{14} \pmod{7} \Rightarrow 125^{14} \equiv 1 \pmod{7}$, (**4**).

Înmulţind membru cu membru congruenţele (**3**) şi (**4**), obţinem:

$194^{19} \cdot 125^{14} \equiv 5(\text{mod } 7)$.(**5**) $7/194^{19} \cdot 125^{14} + k \Rightarrow 194^{19} \cdot 125^{14} + k \equiv 0(\text{mod } 7) \Rightarrow$
$\Rightarrow 194^{19} \cdot 125^{14} \equiv -k(\text{mod } 7)$. (**6**); (**5**) şi (**6**) $\Rightarrow 5 \equiv -k(\text{mod } 7) \Rightarrow 5 + k \equiv 0(\text{mod } 7) \Rightarrow 7/5 + k$.
Cum cel mai mic număr natural nenul divizibil cu 7 este 7, se obţine $k = 2$.

3. Arătaţi că numărul $7^{1994} + 5^{1994} - 74$ este divizibil cu 1994.

Soluţie: $7^{996} \equiv 1(\text{mod } 997)$ (**Fermat**) $\Rightarrow (7^{996})^2 \equiv 1(\text{mod } 997) \Rightarrow 7^{1992} \equiv 1(\text{mod } 997) \Rightarrow$
$\Rightarrow 7^{1994} \equiv 49(\text{mod } 997)$, (**1**) $5^{996} \equiv 1(\text{mod } 997)$ (**Fermat**) $\Rightarrow 5^{1992} \equiv 1(\text{mod } 997) \Rightarrow$
$\Rightarrow 5^{1994} \equiv 25(\text{mod } 997)$, (**2**) Din (**1**) şi (**2**) $\Rightarrow 7^{1994} + 5^{1994} \equiv 74(\text{mod } 997)$ etc.

4. Fie $p > 3$ un număr prim. Arătaţi că numărul $7^p - 6^p - 1$ este divizibil cu 43.

(Olimpiadă Iran)

Soluţie: Cazul $p = 6k + 1$ $(k \in \mathbb{N}^*)$

Avem $7^2 \equiv 6(\text{mod } 43) \Rightarrow (7^2)^3 \equiv 6^3(\text{mod } 43)$. Însă $6^3 \equiv 1(\text{mod } 43)$, deci $7^6 \equiv 1(\text{mod } 43)$, de unde $7^{6k} \equiv 1(\text{mod } 43)$ şi $7^{6k+1} \equiv 7(\text{mod } 43)$, (**1**). Pe de altă parte: $6^3 \equiv 1(\text{mod } 43) \Rightarrow$
$\Rightarrow 6^{6k} \equiv 1(\text{mod } 43)$ şi $6^{6k+1} \equiv 6(\text{mod } 43)$, (**2**). Din (**1**) şi (**2**) rezultă $7^p - 6^p - 1 \equiv 0(\text{mod } 43)$, adică $43 / 7^p - 6^p - 1$.

Cazul $p = 6k + 5$ $(k \in \mathbb{N}^*)$

Din $7^2 \equiv 6(\text{mod } 43)$ rezultă $7^3 \equiv 42(\text{mod } 43)$. Deci $7^5 \equiv 252(\text{mod } 43)$. Însă $252 \equiv 37(\text{mod } 43)$, deci $7^5 \equiv 37(\text{mod } 43)$. Din $7^{6k} \equiv 1(\text{mod } 43)$ şi $7^5 \equiv 37(\text{mod } 43)$ rezultă că $7^{6k+5} \equiv 37(\text{mod } 43)$, (**3**). Din $6^3 \equiv 1(\text{mod } 43)$ şi $6^2 \equiv 36(\text{mod } 43)$ rezultă $6^5 \equiv 36(\text{mod } 43)$. Din $6^{6k} \equiv 1(\text{mod } 43)$ şi $6^5 \equiv 36(\text{mod } 43)$ rezultă că $6^{6k+5} \equiv 36(\text{mod } 43)$, (**4**). Din (**3**) şi (**4**) rezultă că $7^{6k+5} - 6^{6k+5} - 1 \equiv$
$\equiv (37 - 36 - 1)(\text{mod } 43)$, adică $43 / 7^p - 6^p - 1$.

EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. Să se arate că numărul $E = 1948^{18n} + 96^{14n} - 2$ este divizibil cu 19, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

2. Aflaţi restul împărţirii numărului 10^{1000} la 27.

3. Să se afle restul împărţirii numărului $a = 139^{227}$ la 15.

4. Aflaţi restul împărţirii numărului $17^{19} \cdot 19^{17}$ la 16.

5. Să se determine restul împărţirii numărului: **a)** $985 \cdot 1275 + 970$ la 9;

b) 5^{381} la 13; **c)** $4690^7 \cdot 157^8 - 151^5$ la 13; **d)** $13^{23} \cdot 27^{41}$ la 8.

6. Aflaţi restul împărţirii numărului $8^{183} + 13^{211}$ la 15.

7. Aflaţi restul împărţirii numărului 439^{72} la 13.

8. Aflaţi restul împărţirii numărului 1986^{1987} la 17.

9. Legenda spune că, la facerea lumii, Creatorul a plantat un arbore cu 7 crengi, pe fiecare creangă aflându-se câte 27 de frunze. Frunzele cresc alternativ, câte una pe fiecare creangă, astfel încât la începutul celui de-al n-lea an, numărul de frunze al arborelui este $4^{3n} + 5^{3n}$. Marele Vraci numără frunzele de pe fiecare creangă şi, dacă găseşte acelaşi număr de frunze pe fiecare, ştie că anul care tocmai a început va fi un an bun. Anul 2005 de la facerea lumii este un an bun? Care sunt anii buni?

(Concursul „Florica T. Câmpan“, Gabriel Popa, 2005)

CAPITOLUL 8

CONSTRUCŢII GEOMETRICE

(Temă pentru centrul de excelenţă)

Problemele de construcţie geometrică sunt acele probleme în care se cere să se construiască o anumită figură cu ajutoriul unor elemente date, folosind pentru aceasta anumite instrumente.

Într-o astfel de problemă se consideră date o serie de elemente geometrice (puncte, drepte, semidrepte, segmente, unghiuri, triunghiuri, cercuri arce de cerc, lungimi, măsuri de unghiuri sau arce) care alcătuiesc o familie $\mathcal{D}$ şi se cer determinate anumite necunoscute geometrice $\mathcal{X}$ astfel încât pentru elementele din $\mathcal{D} \cup \mathcal{X}$ să fie satisfăcute anumite proprietăţi $\mathcal{P}$.

Problema necesită desenarea elementeloe lui $\mathcal{X}$ folosind anumite instrumente precizate de regulă în enunţul problemei.

În teoria clasică a construcţiilor geometrice instrumentele permise sunt doar *rigla negradată şi compasul.*

Restricţia tradiţională la riglă şi compas provine din antichitate, cu toate că grecii au recurs uneori şi la alte instrumente.

Dar astfel de construcţii nu erau apreciate, nu erau considerate construcţii geometrice veritabile şi erau admise numai dacă rigla şi compasul s-au dovedit insuficiente.

Construcţiile geometrice au constituit partea principală a matematicii greceşti şi grecii acordau o deosebită importanţă studierii lor; construţiile geometrice au servit la început pentru demonstrarea existenţei unor noţiuni abstracte ca: mijlocul unui segment, bisectoarea unui unghi, perpendiculara într-un punct pe o dreaptă etc. Preocupările pentru construcţii geometrice au luat un avânt puternic etc. Multe dintre problemele actuale de rezolvare a problemelor de construcţie au apărut încă în Academia lui Platon (427-347 î.Chr.). Geometrii din şcoala lui Platon, încercând să rezolve problemele geometrice doar cu rigla şi compasul, respingeau orice soluţii care ar fi folosit alte instrumente.

Dar tot în antichitate au apărut unele probleme care nu au putut fi rezolvate numai cu rigla şi compasul, cum ar fi *construcţia unor poligoane regulate (cu 7 laturi, cu 9, 11, 13, 14, 18 laturi etc.)* sau *cele trei probleme celebre ale antichităţii a* căror rezolvare (cu rigla şi compasul) a fost căutată în zadar:

1. *Problema duplicării cubului (problema delică) care cere construirea muchiei unui cub al cărui volum să fie egal cu dublul volumului unui cub dat.*

2. *Problema trisecţiunii unghiului în care se cere să se împartă un unghi dat în trei unghiuri congruente.*

3. *Problema cvadraturii cercului care cere construirea unui pătrat care să aibă aceeaşi arie ca şi un cerc dat.*

De-abia în secolul XIX s-a demonstrat că aceste probleme nu sunt rezolvabile cu rigla şi compasul. În matematica modernă s-au stabilit care construcţii sunt posibile cu rigla şi compasul şi care nu.

Atunci când în enunţul unei probleme nu se fac precizări privind instrumentele de construcţie, se subînţelege că instrumentele permise pentru rezolvarea problemei sunt *rigla* şi *compasul*.

Altă abordare: Pe latura BC se consideră punctul P astfel încât semidreapta AM este bisectoarea $\sphericalangle BAP$. Rez ultă imediat că AN este bisectoarea $\sphericalangle PAC$. Aplicând teorema bisectoarei în ΔBAP şi ΔPAC se obține $\frac{MB}{MP}=\frac{AB}{AP}$ și $\frac{NC}{NP}=\frac{AC}{AP}$, de unde:

$$\frac{AB}{AP}=\frac{MB}{MP}=\frac{NC}{NP}=\frac{MB+NC}{MP+NP}=\frac{MB+NC}{MN}>1,$$

deci $MN < MB + NC$.

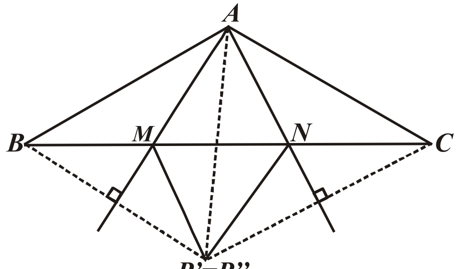


Fig. 94

Aplicând teorema articulației în perechile de triunghiuri (ΔABM, ΔABP) și (ΔANC și ΔABN) se obține $MB < MC = MN + NC$ și, respectiv, $NC < BN = MB + MN$.

EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. Să se construiască numai cu rigla şi compasul un unghi de 56°15'.

2. Având un unghi cu măsura de 7°, să se construiască, folosind numai rigla negradată şi compasul, un unghi cu măsura de 4°. ***(Artur Bălăucă)***

3. Există un triunghi ale cărui laturi să aibă lungimile: $\frac{a}{\sqrt{2}-1}, \frac{a}{\sqrt{3}-1}, \frac{a}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ ($a > 0$, $a \in \mathbb{R}$). În cazul în care există să se construiască triunghiul. ***(Artur Bălăucă)***

4. Să se construiască triunghiul ΔABC ştiind că lungimea laturii $BC = a$, a înălţimii $AD = h$ ($D \in BC$) şi a medianei $BE = m$ (E pe latura AC). Discuţie.
(G.M. 7/1982, Nistor Budescu)

5. Să se construiască un paralelogram cunoscând un unghi ascuţit şi distanţele de la punctul de intersecţie al diagonalelor la cele două laturi ale unghiului ascuţit.
(G.M. 5/1979, D. Mârzan)

6. Fie AB un segment oarecare şi O un punct exterior dreptei AB. Să se construiască numai cu rigla şi compasul paralela la AB prin punctul O şi apoi să se construiască simetrica acestei drepte faţă de AB. ***(G.M. 2-3/1982, Luis Funar)***

7. Fiind date: o dreaptă a, un punct A situat la distanţa d de dreapta a ($d \neq 0$) şi un segment de lungime r, să se construiască un cerc $\mathscr{C}$ de rază r care să conţină punctul A şi să fie tangent dreptei d.

8. Fiind date două puncte distincte A, B şi o dreaptă d să se construiască un cerc $\mathscr{C}$ care să conţină punctele A, B şi să fie tangent dreptei d.

INDICAŢII. SOLUŢII. RĂSPUNSURI. COMENTARII

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I. Mulțimea numerelor întregi. Divizibilitate în Z

1. A = {–4, –3, –2, – 1, 1, 2}, B = {–4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3}. **2.** A = {–3, –2, –1, 0, 1, 2, 3}, B = {1, 2}. **3.** x = 1. **4.** A = {0, 1, 2, 3}, B = {2, 3, 4, 5}, C = {6, 7, 8, 9}, D = {8, 9, 10, 11}. **5.** A = {1, 2, 3, 4, 5}, B = {2, 3, n}, C = {5, 6, n}. **6. b)** $(a, b, c) \in (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 3, 1), (2, 1, 3), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}$. **7. a)** $3p + 1 = 5k + 2$, de unde $3p = 5k + 1$. Atunci $p = M_5 + 2$ iar $k = M_3 + 1$ şi $3p + 1 = 5k + 2 = M_{15} + 7 = 15m + 7$ ($m \in \mathbb{N}$). $1000 \le 15m + 7 \le 2000 \Rightarrow 67 \le m \le 132$. Sunt 66 de numere. **b)** Conform principiului includerii şi al excluderii avem: $n|A \cup B \cup C| = n|A| + n|B| + n|C| - (n|A \cap B| + n|B \cap C| + n|C \cap A|) + n|A \cap B \cap C|$, $n|X|$ reprezentând numărul elementelor mulţimii X (*cardinalul*). Atunci $n|M| = n|A| + n|B| + n|C|$. $S|A| = S|B| = S|C| = s \in \mathbb{N}^*$, $S|X|$ reprezintă suma elementelor mulţimii X. Din relaţiile de mai sus $S|M| = 3s$, dar $S|M| = 1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ etc. Deci $3s = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Se analizează cazurile: $n = 3k$; $n = 3k + 1$ şi $n = 3k + 2$ ($k \in \mathbb{N}^*$), de unde rezultă că $n \in \{3, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 14, ...\}$. Dacă $n \in \{3, 5, 6, 8\}$ cum n este minim, verifică $n = 8$ şi avem: A = {4; 8}; B = {5; 7} şi C = {1; 2; 3; 6}. **8.** A = {–5}, B = {–8, 12}. **9.** x_0 şi $2000 - x_0$ sunt soluţii ale ecuaţiei date. Soluţia ecuaţiei fiind unică avem $2000 - x_0 = x_0$, de unde $x_0 = 1000$, $m = 1001000$. **10.** Termenii şirului $\{a_n\}$ sunt numere naturale de forma $4k + 2$, $k \in \mathbb{N}$, iar termenii şirului $\{b_n\}$ sunt numere naturale de forma $4k$ ($k \in \mathbb{N}$). **11.** Dacă $n = 2k$, atunci N = k, iar dacă $n = 2k + 1$ atunci N = $-k$. **12.** $x \in \mathbb{Z}$; $y, z \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow$ $\Rightarrow \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 2001 - x \in \mathbb{Z}$. $y, z \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow |y| \ge 1, |z| \ge 1 \Rightarrow \dfrac{1}{|z|} \le 1, \dfrac{1}{|y|} \le 1 \Rightarrow -2 \le \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} \le 2 \Rightarrow \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

$\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 2 \Rightarrow y = \dfrac{z}{2z-1} \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow y = z = 1,\ x = 1999$. $\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1 \Rightarrow y = \dfrac{z}{z-1} \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow y = z = 2,\ x = 2000$. $\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 0 \Rightarrow y = -z \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow y = k, z = -k, x = 2001, k \in \mathbb{Z}^*$. $\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = -1 \Rightarrow y = -\dfrac{z}{z+1} \in \mathbb{Z}^*$; $y = z = -2$, $x = 2002$. $\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = -2 \Rightarrow y = -\dfrac{-z}{2z+1} \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow y = z = -1,\ x = 2003$. **13. a)** 0, 0, 1 în această ordine. **b)** 2, 0, 0, 1 în această ordine. **14. a)** U(n) = 5; **b)** $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot ... \cdot 49 = (4 \cdot 0 + 1) \cdot (4 \cdot 1 - 1) \cdot (4 \cdot 1 + 1) \cdot (4 \cdot 2 - 1) \cdot (4 \cdot 2 + 1) \cdot ... \cdot (4 \cdot 12 - 1)(4 \cdot 12 + 1) = (M_4 + 1) \cdot (4 \cdot 1 - 1) \cdot (4 \cdot 2 - 1) \cdot ... \cdot ... \cdot (4 \cdot 12 - 1) = M_4 + 1$. Dar $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot 49 = M_{25}$ şi ultimele două cifre ale numărului $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot 49$ sunt 2 şi 5 în această ordine, deci penultima cifră a lui n este 7. **c)** $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot 49 = (8 \cdot 0 + 1) \cdot (8 \cdot 0 + 3) \cdot (8 \cdot 0 + 5) \cdot (8 \cdot 0 + 7) \cdot (8 \cdot 1 + 1) \cdot (8 \cdot 1 + 3) \cdot ... \cdot (8 \cdot 5 + 1) \cdot (8 \cdot 5 + 3) \cdot (8 \cdot 5 + 5) \cdot (8 \cdot 5 + 7) \cdot (8 \cdot 6 + 1) = M_8 + 1$, pentru că $(M_8 + 1) \cdot (M_8 + 3) \cdot (M_8 + 5) \cdot (M_8 + 7) = M_8 + 105 = M_8 + 1$, dar $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot 49 = M_{125}$. Deci $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot 49$ are ultimele trei cifre 6, 2, 5 în această ordine, iar n are antepenultima cifră 3. **15.** 5^8 are ultimele 5 cifre 9, 0, 6, 2, 5 în această ordine. 5^{8k}, unde $k \in \mathbb{N}^*$, are ultimele 5 cifre tot 9, 0, 6, 2, 5 în această ordine. $5^5 \cdot 5^{8k}$ ($k \in \mathbb{N}^*$) are ultimele 5 cifre 0, 3, 1, 2, 5 în această ordine. **16.** $p = n^2 - n + 5n - 5 = n(n - 1) + 5(n - 1) = (n - 1)(n + 5)$. Dacă p este prim, e necesar ca $n - 1 \in \{\pm 1\}$ sau $n + 5 \in \{\pm 1\}$. Se obţine $n \in \{-6, -4, 0, 2\}$. **17.** Avem: $n^2 + 18n + 64 = (n + 9)^2 - 17 = m^2$ ($m \in \mathbb{Z}$) $\Leftrightarrow (n + 9 - m)(n + 9 + m) = 17 = (-17) \cdot (-1) = (-1) \cdot (-17) = 17 \cdot 1$. În final se obţine $n \in \{-18, 0\}$. **18.** Avem $(n - 2)^2 + (n - 1)^2 + n^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2 = 5n^2 + 10 = 5(n^2 + 2)$. Dacă numărul $5(n^2 + 2)$ este pătrat perfect atunci în mod necesar $5 / n^2 + 2$. Dar $U(n^2 + 2) \in \{1, 2, 3, 6, 7, 9\}$, deci $5 \nmid n^2 + 2$. **19.** Presupunem că $a_i < 0$ şi $a_j < 0$, oricare ar fi $i \ne j$ (i fixat). Fie două inegalităţi consecutive ce nu-l conţin pe a_i. Din $a_k(a_{k-1} - a_k + a_{k+1}) < 0$ şi $a_{k+1}(a_k - a_{k+1} + a_{k+2}) < 0$, rezultă $a_{k+1} + a_{k+2} < 0$, absurd pentru că $a_k > 0$, $a_{k+1} > 0$. Dacă două numere a_i şi a_p sunt negative iar restul, $a_j > 0$, $i \ne j$, $i \ne p$. Se procedează analog. Deci sunt cel puţin trei numere negative. Pentru a arăta că există cel puţin trei numere pozitive se procedează la fel. **20.** Orice număr natural prim p ($p > 3$) are una din formele:

GEOMETRIE

CAPITOLUL I. Triunghiul

1. $\sphericalangle C = 60°$. **2.** Dacă am avea $b \neq c$, atunci ar rezulta că $|b - c| \geq 1$ şi în acest caz triunghiul nu există. **3.** Fie M şi N mijloacele laturilor AB şi, respectiv, AC ale unui triunghi ΔABC, I punctul de intersecţie a bisectoarelor triunghiului şi $P \in AI \cap BC$. În ipoteza $I \in MN$ se obţine $AI \equiv IP$. Acum triunghiul ΔABP admite BI ca mediană şi bisectoare, deci $AB \equiv BP$. Analog ar urma $AC \equiv CP$ şi s-ar obţine $AB + AC = BC$, absurd. **4.** $\sphericalangle A = 45°$. Ducem $BF \perp AC$, $F \in AC$. $\sphericalangle ABF = 45° \Rightarrow \Delta ABF$ este isoscel $\Rightarrow AF \equiv BF \Rightarrow$ $\Rightarrow AF \equiv FD \Rightarrow \Delta AFD$ este isoscel cu $\sphericalangle AFD = 150°$ şi $\sphericalangle FAD = \sphericalangle FDA = 15°$. Se obţine $\sphericalangle DAE = 7°30'$.

5. $\sphericalangle CEM \equiv \sphericalangle CME \Rightarrow CM \equiv CE$ (**fig. 139**) $MN = \dfrac{CE}{2} \Rightarrow MC = 2 \cdot MN$. **6. a)** Se arată că segmentul MP este linie mijlocie în ΔACD şi că $NC \perp BD$; **b)** ΔBCE este isoscel. (**fig. 140**)

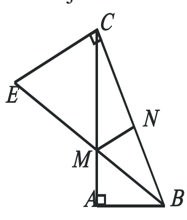


Fig. 139

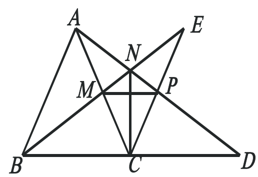


Fig. 140

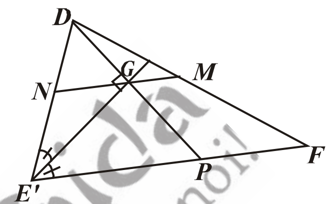


Fig. 141

7. Utilizând teorema liniei mijlocii sau (**t.f.a.**) se arată T şi S sunt mijloacele segmentelor PN, respectiv PM, etc. **8. a)** Fie $DG \cap EF = \{P\}$ (**fig. 141**). ΔDEP este isoscel. De ce? Deci segmentul EG este mediană în ΔDEP şi cum $DM \equiv MF$ rezultă că GM este linie mijlocie în ΔDPF şi urmează că $GM \parallel EF$. **b)** Şi NG este linie mijlocie în ΔDEP. Finalizaţi cu axioma paralelelor. **9.** Rezolvând în $\mathbb{N}^*$ ecuaţia $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$ ştiind că $a + b + c$ este impar se obţine soluţia unică $a = b = c$. Deci triunghiul este echilateral. **10.** Fie P pe segmentul BC cu $\sphericalangle BAP = 60°$. (**fig. 142**) Avem: $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 40°$. $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CDA = 70°$. $\sphericalangle BDF = \sphericalangle B = 40°$. $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BAC - \sphericalangle CAD = 100° - 70° \Rightarrow \sphericalangle BAD = 30°$. $DF \parallel AC$ şi AD - secantă implică $\sphericalangle ADF = \sphericalangle CAD = 70°$, deci $\sphericalangle AFD = 70°$. În ΔDAF: $\sphericalangle FAD = 30°$ şi $\sphericalangle ADF =$ $= \sphericalangle CAD = 70°$ (alterne interne). În ΔBAP: $\sphericalangle B = 40°$ şi $\sphericalangle BAP = 60°$ implică $\sphericalangle APB = 80°$. În ΔAPD: $\sphericalangle APD = 80°$ şi $\sphericalangle PAD = 30°$ implică $\sphericalangle PDA = 70°$. Comparăm ΔPAD cu ΔFAD ele au: $\sphericalangle PAD = \sphericalangle FAD = 30°$, $\sphericalangle PDA = \sphericalangle FDA = 70°$ şi $AD \equiv AD$. Deci $\Delta PAD \equiv \Delta FAD$ de unde $AP \equiv AF$ şi $\sphericalangle PAF = 60°$. Prin urmare, ΔPAF este echilateral. ΔPAC: $\sphericalangle PAC = \sphericalangle PCA = 40° \Rightarrow PA \equiv PC$, însă $PA \equiv PF$ deci $PC \equiv PF$, dar $\sphericalangle FPC = 100° + 60° = 160° \Rightarrow$ $\Rightarrow \sphericalangle PCF = 10°$. **11.** Avem: $\sphericalangle ABC = \dfrac{180° - 80°}{2} = 50°$ şi $\sphericalangle ABP = \sphericalangle ABC - \sphericalangle CBP = 20°$, iar $\sphericalangle APB = 180° - (20° + 80°) = 80°$, de unde $AB \equiv BP$. Dar $BD \equiv AC \equiv AB$, deci şi ΔBDP este isoscel, iar $\sphericalangle BDP = \dfrac{180° - \mathrm{m}(\sphericalangle PBD)}{2} = 75°$ şi $\sphericalangle ADB = \dfrac{180° - 50°}{2} = 65°$; $\sphericalangle ADP = 75° - \sphericalangle ADB = 10°$ şi în final: $\sphericalangle DAP = 80° - 65° = 15°$ şi $\sphericalangle APD = 155°$. **(fig. 143)**

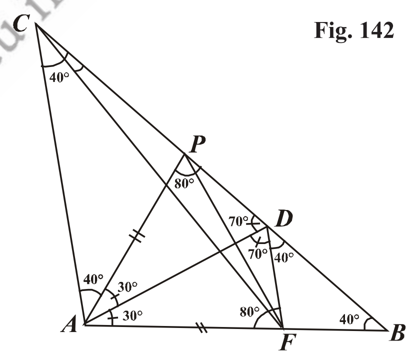


Fig. 142

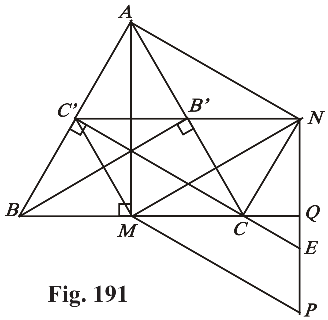
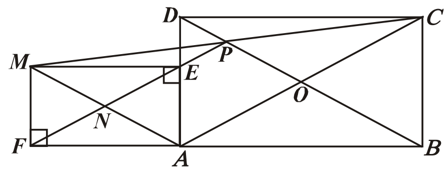


Fig. 191

Fig. 192



OP este linie mijlocie în ΔMAC, deci $MA \parallel PO$. Din $MA \parallel BD$ rezultă $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle DAM \equiv \sphericalangle DAC$, $\sphericalangle MAF = \sphericalangle OAB = \sphericalangle NFA = \sphericalangle OBA = 90° - \sphericalangle DAM$, de unde rezultă $FE \parallel AC$ etc; **b)** Segmentul *NP* este linie mijlocie în ΔMAC, deci $NP \parallel AC$ şi cum $EF \parallel AC$ rezultă *F*, *E*, *P* coliniare (axioma paralelelor). **86. a)** Se aplică teorema liniei mijlocii şi faptul că diagonalele unui dreptunghi sunt congruente. **b)** Fie $\{E\} = QN \cap PB$. Se arată că $\Delta ENS \sim \Delta BMS$ (**t.f.a.**). $EN = \dfrac{PC}{2} = \dfrac{MB}{2}$ etc. **87.** Deoarece punctul de intersecţie al diagonalelor este egal depărtat de laturile patrulaterului, atunci diagonalele sunt bisectoarele unghiurilor patrulaterului şi din congruenţe de triunghiuri rezultă că patrulaterul este romb. **88. a)** $\sphericalangle AGE = \sphericalangle DGC = \sphericalangle AEG = 90° - \dfrac{1}{2} \cdot \sphericalangle C \Rightarrow \Delta AEG$ este isoscel $\Rightarrow AE \equiv AG$. **(1) b)** Punctul *E* este egal depărtat de laturile ΔACB, deci $AE \equiv EF$. **(2)** Din **(1)** şi **(2)** rezultă că $AG \equiv EF$ şi, cum $EF \perp BC$, $AG \perp BC$ mai avem că $AG \parallel EF$ etc. **89.** Patrulaterul *CODE* devine romb dacă *O* este mijlocul segmentului *AB*. **90.** „⇒" Semidreapta *AF* bisectoare şi înălţime în $\Delta NAE \Rightarrow AN \equiv AE$ **(1)** $AN \parallel DM \Rightarrow$ $\Rightarrow \sphericalangle NAM = \sphericalangle EMA$ (alterne interne) $\Rightarrow \sphericalangle MAE = \sphericalangle AME$ şi deci ΔAEM este isoscel de unde $AE \equiv EM$. Conform relaţiei **(1)** avem $AN \equiv EM$ şi pentru că $AN \parallel EM$, patrulaterul *AEMN* devine romb, de unde $MN \parallel AE$. „⇐" $MN \parallel AE \Rightarrow AEMN$ este paralelogram, însă semidreapta *AF* bisectoare implică *AEMN* este romb, deci $\sphericalangle AFE = 90°$. **91.** Fie patrulaterul *ABCD* cu laturile consecutive *AD*, *DC* şi *BC* congruente. Dacă $AB \equiv AD$, atunci *ABCD* este romb. Dacă $AB \neq AD$, atunci considerând faptul că patrulaterul *ABCD* are două unghiuri alăturate suplementare rezultă $AB \parallel DC$. Reciproca nu este adevărată. **92.** Utilizaţi teorema *liniei mijlocii* în triunghi şi faptul că diagonalele unui paralelogram se înjumătăţesc. **93. a)** Dacă $AB \parallel CD$, se notează $AC \cap MN = \{E\}$ şi se demonstrează că segmentele *ME* şi *NE* sunt linii mijlocii în ΔADC şi, respectiv, ΔABC. Reciproc, se consideră *E* mijlocul segmentului *AC* şi se foloseşte că segmentele *ME* şi *NE* sunt linii mijlocii, după care se pune în evidenţă că *M, E, N* sunt coliniare din relaţia $ME + EN = MN$. **b)** $AB \parallel CD$, $AD \equiv BC \Rightarrow ABCD$ trapez isoscel. Se consideră *P, Q* mijloacele lui *AB* respectiv, *CD* de unde, *PQ* înălţime în trapez. $\mathcal{A}_{ABCD} = MN^2$ şi $MN = \dfrac{AB + CD}{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow MN \equiv PQ$, deci *MNPQ* este dreptunghi de unde, $MP \perp PN$ şi $AC \perp BD$. **94. a)** $\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle BDC$ implică ΔOCD isoscel, de unde $OC \equiv OD$, **(1)**. Deoarece $AB \parallel CD$ avem că $\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle BAC$ şi $\sphericalangle BDC \equiv$ $\equiv \sphericalangle ABD$ (alterne interne). Cum $\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle BDC$, rezultă că ΔOAB este isoscel şi $OA \equiv OB$, **(2)** Din **(1)** şi **(2)**, rezultă că $OC + OA = OD + OB$ şi atunci $AC = BD$ iar trapezul *ABCD* va fi isoscel. **(fig. 193)** **b)** În ΔABC, *BO* şi *AE* ($AD' \cap BC = \{E\}$) sunt înălţimi, de unde rezultă că *D'* este ortocentrul lui şi, deci, $CD' \perp AB$. Cum segmentul $AB \parallel CD$, rezultă că $CD' \perp CD$, adică $\Delta CDD'$ este dreptunghic în *C*. Cum *CO* este mediana corespunzătoare ipotenuzei *DD'*, avem $CO = \dfrac{DD'}{2} = DO$, căci *D'* este simetricul lui *D* faţă de *O*. Din $CO = DO$ rezultă că ΔOCD este isoscel şi $\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle BDC$, de unde conform punctului **a)**, *ABCD* este trapez isoscel.

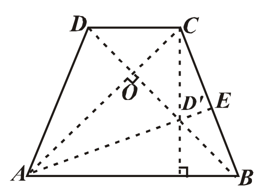


Fig. 193