ARTUR BĂLĂUCĂ

GABRIEL MÎRŞANU **MARIANA CIOBANAŞU** **IOAN CIOBANAŞU**

ALGEBRĂ. GEOMETRIE

Clasa a VII-a

- Itemi cu note
- Modele de teste ce conţin itemi cu note şi bareme de notare
- Teste iniţiale
- Variante de teste pentru lucrarea scrisă semestrială
- Teme pentru recapitulare finală
- Modele de probleme rezolvate
- Probleme practice
- Chestiuni teoretice (breviare) la noțiunile din programa actuală de matematică
- Soluții, indicații, răspunsuri și comentarii la problemele propuse

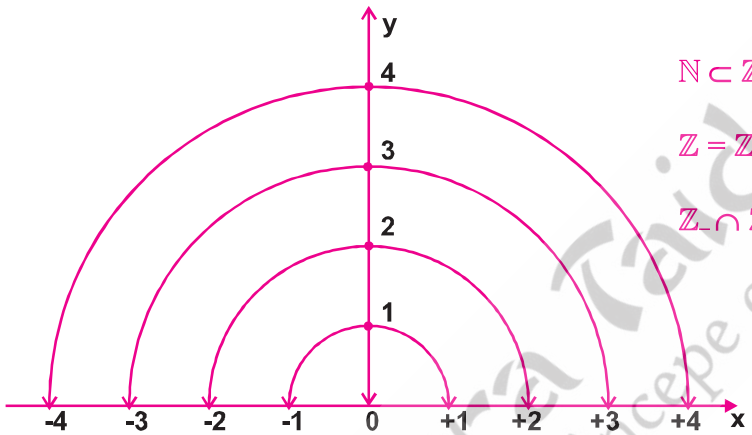
EDITURA TAIDA
– IAŞI –

– CUPRINS –

ALGEBRA
Capitolul I

RECAPITULARE ŞI COMPLETĂRI. TESTE INIŢIALE

Numere întregi



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_+$

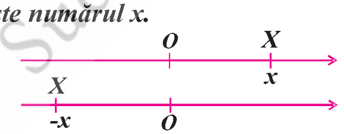
$\mathbb{Z}_- \cap \mathbb{Z}_+ = \phi$

I.1. Mulţimea $\mathbb{Z}$. Reprezentarea pe axă. $\mathbb{N}$ _ $\mathbb{Z}$. Opus. Ordonare.
Modulul unui număr întreg

Reţineţi!

Modulul unui număr întreg

Modulul unui număr întreg x este distanţa dintre originea axei numerelor şi punctul de pe axă a cărui coordonată este numărul x.



$|x| = OX$

Valoarea absolută sau modulul unui număr întreg x, notată $|x|$, se defineşte şi astfel:

$$|x| = \begin{cases} -x, \text{dacă } x < 0 \\ 0, \text{dacă } x = 0 \\ x, \text{dacă } x > 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad |x| = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \ge 0 \\ -x, \text{ dacă } x < 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad |x| = \begin{cases} x, \text{ dacă } x > 0 \\ -x, \text{ dacă } x \le 0 \end{cases}$$

Proprietăţi:

1. $|x| = \max(-x, x)$;

2. $x \le |x|$ şi $-x \le |x|$;

3. $|x| \ge 0$;

4. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

5. $|x| = |-x|$;

6. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;

7. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} (y \ne 0)$;

8. $|x + y| \le |x| + |y|$;

9. $|x| \le n, n > 0 \Leftrightarrow -n \le x \le n$.

Exerciţii rezolvate

1. Determinaţi mulţimea A = {x i $\mathbb{Z}$ / 5 < |x| ≤ 7}.

Răspuns: A = {–7; –6; +6; +7}

2. Determinaţi mulţimea B = {x i $\mathbb{Z}$ / |x| ≤ 3}.

Rezolvare: |x| ≤ 3 este echivalentă cu –3 ≤ x ≤ 3. Deci A ={–3; –2; –1; 0; 1; 2; 3}

3. Rezolvaţi în $\mathbb{Z}$ ecuaţiile: **a)** |x| = 3; **b)** |y| = –100.

Rezolvare: **a)** x i {–3; 3}; **b)** y i Ÿ pentru că |y| ≥ 0, oricare ar fi y i $\mathbb{Z}$.

4. Câte elemente are mulţimea M = {x i $\mathbb{Z}^*$ / |x| ≤ 2010}?

Răspuns: 2010 · 2 = 4020 elemente.

EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. a) Ordonaţi următoarele numere întregi reprezentându-le pe axa numerelor:
– 7; + 2; – 3; 0; – 2; 6; – 5; + 3; + 1; – 8; 9; – 9; 10;
b) Reprezentaţi pe axă opusele numerelor: –4; +5; 0; –1; 3; –3; 8; –8; 7; –5; –10; +2; –7; –6; 9. (*nota* 5)

2. Reprezentaţi pe axă numerele de mai jos şi scrieţi-le în ordine crescătoare:
a) – 4, + 2, 0,– 5, + 1, – 6; **b)** – 3, + 4, + 5, – 7, + 8; **c)** – 9, + 6, + 7, 0, – 11, + 8. (*nota* 5)

3. a) Reprezentaţi pe axa numerelor punctele: $A(-4)$; $B(-3)$; $C(-9)$; $D(+5)$; $E(-2)$; $F(-6)$; $G(-10)$; $H(+3)$; $I(-7)$. **b)** Determinaţi lungimile segmentelor: [AD]; [AF]; [DG]; [HI]. **c)** Determinaţi abscisa mijlocului segmentelor [BC]; [HD]; [FG]; [AF]. (*nota* 5)

4. Determinaţi $x \in \mathbb{Z}$ şi $y \in \mathbb{Z}$ astfel încât numerele întregi: –7, –5, –2, x, y, 3 să fie ordonate crescător. (*nota* 5)

5. Fie mulţimea: $A = \left\{\frac{23}{7};\ -2;\ 8;\ -40;\ 2{,}5;\ 0;\ \frac{1}{7};\ -8\right\}$. **a)** Scrieţi submulţimea ale cărei elemente sunt numere negative. **b)** Scrieţi submulţimea ale cărei elemente au modulul mai mare decât 2. **c)** Calculaţi suma dintre cel mai mic şi cel mai mare element al mulţimii A. (*nota* 5)

6. Determinaţi numerele întregi x şi y ştiind că mulţimile: $\{4, 6, |x|\}$ şi $\{|-6|, |y|, |-5|\}$ sunt egale. (*nota* 7)

7. Determinaţi mulţimea: A = {$x \in \mathbb{Z}$ / 7 < $|x|$ ≤ 10}. (*nota* 5)

8. Determinaţi $x \in \mathbb{Z}$ ştiind că: **a)** $|x| = 0$; **b)** $|x| = -10$; **c)** $|x| = 4$; **d)** $|-x| \le 2$; **e)** $-4 \le |x| \le 3$; **f)** $|x| < 5$; **g)** $|x|$ R 6; **h)** $|x|$ R –1. (*nota* 9)

→**Spre performanţă!**

9. Determinaţi $x \in \mathbb{Z}$ ştiind că: **a)** $|x| = 4$; **b)** $|x| = -5$; **c)** $|x-1| = |1-x|$; **d)** $|x| = 0$; **e)** $|x+2| = x+2$; **f)** $|x-1| = 1-x$; **g)** $|x-5| = 2$; **h)** $|x-4| = -7$; **i)** $|x-1| + |x-3| = 2$.

(*nota* 9)

10. Determinaţi mulţimea: $A = \{x + y \mid |x-1| = 3;\ |y+1| = 5 \text{ şi } x, y \in \mathbb{Z}\}$. (*nota* 10)

I.2. Operaţii în $\mathbb{Z}$

Reţineţi!

ADUNAREA. ***Proprietăţi:***

- oricare ar fi $a, b \in \mathbb{Z}$, avem $a + b = b + a$ (**comutativitatea**);
- oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{Z}$, avem $(a + b) + c = a + (b + c)$ (**asociativitatea**);
- $a + 0 = 0 + a = a$, 0 este **element neutru** la adunarea în $\mathbb{Z}$;
- $a + (-a) = (-a) + a = 0$, oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}$.

ÎNMULŢIREA

➲ Produsul a două numere întregi a şi b este un număr întreg notat $a \cdot b$ obţinut astfel:

- Dacă $a = 0$ sau $b = 0$, atunci $a \cdot b = 0$.
- Dacă $a > 0$ şi $b > 0$ sau $a < 0$ şi $b < 0$, atunci $a \cdot b = |a| \cdot |b|$.
- Dacă $a > 0$ şi $b < 0$ sau $a < 0$ şi $b > 0$, atunci $a \cdot b = -|a| \cdot |b|$.

***Observaţie*:** Din definiţia precedentă rezultă următoarele reguli de calcul:

$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$, oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}$;

$a \cdot (-1) = (-1) \cdot a = -a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}$;

$(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -a \cdot b$; $(-a)(-b) = a \cdot b$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{Z}^*$.

***Proprietăţi*:**

- oricare ar fi $a, b \in \mathbb{Z}$, avem: $a \cdot b = b \cdot a$ (**comutativitatea**);
- oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{Z}$, avem: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (**asociativitatea**);
- oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{Z}$ avem: $a(b + c) = ab + ac$; $a \cdot (b - c) = ab - ac$ (**distributivitatea faţă de adunare şi scădere**);
- oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}$ avem $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$, 1 este **element neutru** la înmulţirea în $\mathbb{Z}$.

ÎMPĂRŢIREA

➲ Dacă a şi b sunt două numere întregi cu $b \neq 0$, câtul dintre a şi b, notat $a : b$ sau $\frac{a}{b}$, este un număr întreg c, dacă el există, astfel încât $a = b \cdot c$.

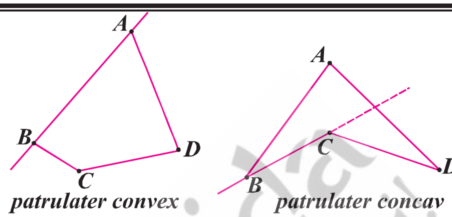
Capitolul II

PATRULATERUL

II.1. Patrulaterul convex; suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex.

Reţineţi!

➲Un poligon cu patru laturi se numeşte **patrulater**.
➲ Un patrulater este **convex**, dacă oricare ar fi o latură a sa, vârfurile patrulaterului nesituate pe ea se găsesc de aceeaşi parte a dreptei-suport a laturii respective. **(figura 53 a))**
➲ Patrulaterul din **figura b)** nu este convex. El este **neconvex (concav)** deoarece vârfurile A şi D sunt situate de o parte şi de alta a dreptei BC. **(fig. 53 b))**



a) Fig. 53 b)

Ce elemente are un patrulater convex?
➲ Punctele A, B, C şi D se numesc **vârfurile** patrulaterului. **(fig. 54)**
➲ Segmentele $[AB]$; $[BC]$; $[CD]$ şi $[AD]$ se numesc **laturile** patrulaterului.
➲ Segmentele $[AC]$ şi $[BD]$ se numesc **diagonalele** patrulaterului.
➲ Un patrulater convex cu cu diagonalele perpendiculare se numeşte patrulater **ortodiagonal**. **(fig. 55)**
➲Laturile $[AB]$ şi $[CD]$, respectiv $[AD]$ şi $[BC]$ se numesc **laturi opuse**.
➲ Laturile $[AB]$ şi $[BC]$ se numesc **laturi consecutive**.

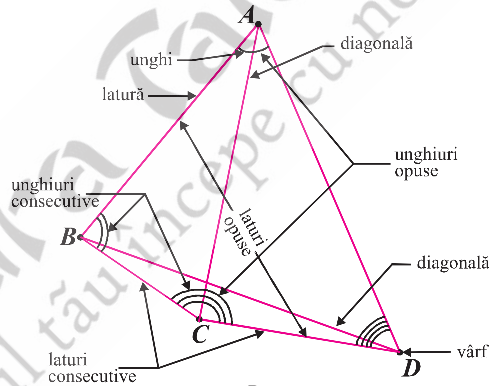


Fig. 54

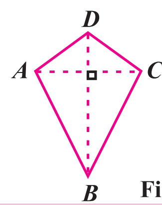


Fig. 55

➲ $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$ şi $\sphericalangle D$ se numesc **unghiurile patrulaterului**.
➲ $\sphericalangle A$ şi $\sphericalangle C$, respectiv $\sphericalangle B$ şi $\sphericalangle D$ se numesc **unghiuri opuse**.
➲ $\sphericalangle A$ şi $\sphericalangle B$ se numesc **unghiuri consecutive**.
➲ Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este egală cu 360°.
$m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C) + m(\sphericalangle D) = 360°$.

Probleme rezolvate

1. Calculaţi măsurile unghiurilor unui patrulater convex ştiind că ele sunt direct proporţionale, respectiv, cu numerele 2; 5; 11 şi 12.
Rezolvare: Notăm cu a,b,c şi d măsurile unghiurilor.

Avem: $\frac{a}{2}=\frac{b}{5}=\frac{c}{11}=\frac{d}{12}=\frac{a+b+c+d}{2+5+11+12}=\frac{360°}{30}=12°$.

Din $\frac{a}{2}=12°$ rezultă $a = 24°$; $\frac{b}{5}=12°$ rezultă $b = 60°$; $\frac{c}{11}=12°$ rezultă $c = 132°$; $\frac{d}{12}=12°$ rezultă $d = 144°$.

2. În patrulaterul convex *ABCD* măsura unghiului $\sphericalangle A$ este media aritmetică a măsurilor celorlalte trei unghiuri, iar măsurile unghiurilor $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$ şi $\sphericalangle D$ sunt direct proporţionale cu numerele 2; 3 şi, respectiv, 4. Aflaţi măsurile unghiurilor patrulaterului *ABCD*.

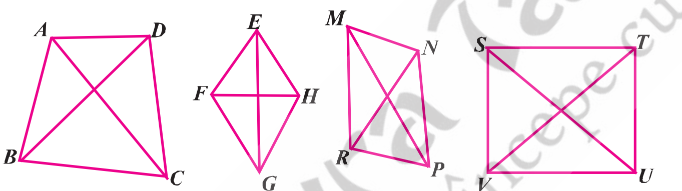
Rezolvare: Din $m(\sphericalangle A) = \frac{1}{3} \cdot [m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C) + m(\sphericalangle D)]$ avem:

$m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C) + m(\sphericalangle D) = 3 \cdot m(\sphericalangle A)$ şi cum $m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C) + m(\sphericalangle D) = 360°$ rezultă $4 \cdot m(\sphericalangle A) = 360°$, deci $m(\sphericalangle A) = 90°$ şi $m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C) + m(\sphericalangle D) = 270°$.

Cum $\frac{m(\sphericalangle B)}{2} = \frac{m(\sphericalangle C)}{3} = \frac{m(\sphericalangle D)}{4} = \frac{m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C) + m(\sphericalangle D)}{2+3+4} = \frac{270°}{9} = 30°$, avem $m(\sphericalangle B) =$ $= 60°$, $m(\sphericalangle C) = 90°$, $m(\sphericalangle D) = 120°$.

EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. În patrulaterele din **figura 56**, numiţi: perechile de laturi opuse; perechile de unghiuri opuse; câte două perechi de vârfuri consecutive; diagonalele.



(*nota* 5)

Fig. 56

2. Lungimile laturilor unui patrulater convex, exprimate în cm, sunt patru numere naturale consecutive. Aflaţi aceste lungimi ştiind că perimetrul patrulaterului este de 62 cm. (*nota* 5)

3. Construiţi patrulaterul convex *ABCD* ştiind că: $AB = 5$ cm, $BC = 4$ cm, $AC = 6$ cm, $m(\sphericalangle ACD) = 50°$, $m(\sphericalangle CAD) = 45°$. (*nota* 5)

4. Construiţi patrulaterul convex *ABCD* cunoscând: $AC = AD = 4$ cm, $m(\sphericalangle ABC) = 90°$, $m(\sphericalangle BAC) = 30°$, $m(\sphericalangle BCD) = 120°$. (*nota* 5)

5. Desenaţi un patrulater convex *ABCD* cu: $m(\sphericalangle A) = 75°$, $m(\sphericalangle B) = 90°$, $m(\sphericalangle C) = 115°$. Determinaţi $m(\sphericalangle D)$. (*nota* 5)

6. Determinaţi măsurile unghiurilor unui patrulater convex, ştiind că acestea sunt direct proporţionale cu numerele 2, 3, 4, 6. (*nota* 7)

7. Există un patrulater convex ale cărui unghiuri au măsurile invers proporţionale cu numerele 2, 3, 4, 6? (*nota* 7)

8. Stabiliţi valoarea logică a fiecăreia din următoarele propoziţii:
p_1: În orice patrulater convex cel puţin un unghi are măsura mai mare sau egală cu 90°.
p_2: Dacă un patrulater convex nu are nici un unghi obtuz, atunci cel puţin unul dintre unghiurile sale este ascuţit.
p_3: Dacă un patrulater convex nu are nici un unghi ascuţit, atunci toate unghiurile acestuia sunt drepte.
p_4: În orice patrulater convex, cel mult 3 unghiuri sunt obtuze. (*nota* 9)

REZULTATE, INDICAŢII, SOLUŢII, COMENTARII

ALGEBRĂ

Capitolul I. RECAPITULARE ȘI COMPLETĂRI. TESTE INIȚIALE

I.1. Mulţimea ℤ. Reprezentarea pe axă. ℕ ⊂ ℤ. Opus. Ordonare. Modulul unui număr întreg

1. a) –9; –8; –7; –5; –3; –2; 0; 1; 2; 3; 6; 9; 10. **3. b)** *AD* = 9; *AF* = 2; *DG* = 15; *HI* = 10; **c)** –6; +4; –8; –5. **4.** *x* = –1 1 *y* ∈ {0, 1, 2}; *x* = 0 1 *y* ∈{1, 2}; *x* = 1 1 *y* = 2. **5. a)** {–40; –8; –2}; **b)**{ $\frac{23}{7}$; –40; –8; 2,5; 8}; **c)** –32. **6.** *x* ∈ {–5, 5} şi *y* ∈{–4, 4}. **7.** A = {±8; ±9; ±10}. **8. a)** 0; **b)** nu există; **c)** *x* ∈ {–4, 4}; **d)** *x* ∈ {±1; ±2; 0}; **e)** *x* ∈ {0; ±1; ±2; ±3}; **f)** *x* ∈ {±4; ±3; ±2; ±1; 0}. **9. a)** *x* ∈ {–4, 4}; **b)** nu există; **c)** *x* ∈ ℤ; **d)** *x* = 0; **e)** *x* ∈ ℕ ∪ {–2; –1}; **f)** *x* ∈ $\mathbb{Z}_-$ ∪ {0, 1}; **g)** *x* ∈ {3, 7}; **h)** nu există; **i)** *x* ∈ {1, 2, 3}. **10.** A = {±2, ±8}.

I.2. Operaţii în ℤ **1.** –921. **3. a)** –7; **b)** 0. **4. a)** 4; **b)** –16; **c)** –213; **d)** –9; **e)** –5. **5. a)** –3; **b)** 6; **c)** 8; **d)** 1; **e)** 53; **f)** 2; **g)** –176; **h)** 15; **i)** 7; **j)** 4; **k)** –1; **l)** 5; **m)** –15; **n)** 1 703. **6. a)** 18; **b)** 8; **c)** 12; **d)** –4; **e)** 15; **f)** 10; **g)** 16. **7. a)** –2000; **b)** –2000; **c)** 1001. **8. a)** –17 = (–1)(+17) = (+1) (–17); –12 = (–12)(+1) = (+12)(–1) = (–3)(+4) = (–4)(+3) = (–2)(+6) = (–6)(+2) etc. **9.** 12 = 1E1E1E1E2E6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 6 = 1E1E1E1E1E3E4 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 3 = $= \underbrace{1+1+...+1}_{19\,\text{termeni}} + (-3) + (-4) = \underbrace{1\cdot 1\cdot ...\cdot 1}_{19\,\text{factori}}\cdot(-3)(-4) = (-3) + 4 + \left(\underbrace{1+1+...+1}_{12\,\text{termeni}}\right) + (-1)$ etc. Căutaţi şi alte soluţii. **10. a)** 15; **b)** 90; **c)** 0; **d)** –7; **e)** +95; **f)** –69. **11. a)** –28; **b)** –84; **c)** 385; **d)** 0; **e)** –118; **f)** 6; **g)** –260. **12. a)** 50 = 8 · 6 + 2; **b)** –40 = (–7)(–6) + 2 etc. **14. a)** –8; **b)** –1243; **c)** –30; **d)** –50; **e)** 900; **f)** –863; **g)** 190; **h)** –123. **15. 1.** *a* = –2. **2. a)** 12 345 000; **b)** 583 000; **c)** 0. **16. a)** 1; **b)** –1998; **c)** 0. **17.** 9; –1; 8; –125; –32; –198. **18. a)** –14; **b)** –33; **c)** 72; **d)** –1001. **20. a)** $(-2)^{11}$; **b)** $(-7)^7$; **c)** 9^6; **d)** 2; **e)** 3^{20}; **f)** 12^{12}; **g)** 1; **h)** $(-6)^{13}$; **i)** $25^2 = 5^4$; **j)** 19^{10}. **21. a)** 0; **b)** 1; **c)** 27; **d)** –39; **e)** 8 dacă *n* = par şi –8 dacă *n* = impar.

I.3. Divizibilitatea în ℤ **1. a)** {±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±8}; **b)** $\mathcal{D}_{-12} = \mathcal{D}_{12}$; **c)** $\mathcal{M}_{35}$; **d)** {±1,±2,±3,±6}. **2. a)** 9 876; –9 876; **b)** 9 876; –9 876; **c)+e)** 9 875; –9875; **d)** 9 876; –9 876. **3. a)** (*x* + 1)(*y* + + 1) = 7 ⇒ (*x*, *y*)∈{(0, 6), (6, 0)}. Numerele sunt 2^6 şi 3^6 adică 64 şi 729. **b)** (*x* + 1)(*y* + + 1) = 18 etc. **4.** A = {–3, 4}. **5.** A = {±8, ±4, ±2, ±1}; B = {–1, 0, 2, 3}. **6. a)** *x* ∈{–6, –3, –2, –1}; **b)** *x* ∈ {–11, –1, 1, 3, 5, 7, 9, 19}; **e)** *x* – 1 / *x* ⇒ *x* – 1 / (*x* – 1) +1 ⇒ *x* – 1 / 1 ⇒ 1 *x* – 1 ∈ {–1, 1} etc; **f)** *x* + 1 / 3*x* – 1 ⇒ *x* + 1 / 3(*x* + 1) – 4 ⇒ *x* + 1 / 4 etc; **g)** *x* g {–6, 6}. **7. b)** 359 şi –361. **8. a)** (*x*, *y*) ∈ {(–17, 4), (–1, –12), (1, 22), (17, 6)}; **b)** (*x*, *y*) ∈ {(–13, –4), (–1, 8), (1, –18), (13, –6)}. **c)** (*x*, *y*) ∈ {(–19, 0), (–12, –1), (–7, –6), (–6, –13), (–4, 15), (–3, 8), (2, 3), (9, 2)}. **d)** *xy* + *x* + *y* = 8 ⇔ *xy* + *x* + *y* + 1 = 9 ⇔ *x*(*y* + 1) + (*y* + 1) = 9 ⇔ (*x* + 1)(*y* + 1) = = 9 = (–9)(–1) = (–1)E(–9) = (–3)(–3) = 3 · 3 etc. **e)** *x* ∈ {2, –3}; **f)** *x* g {–3, 4}; **g)** *x* g {–2, 8}.

I.4. Ecuaţii în ℤ. Probleme **1. a)** ∅; **b)** –4; **c)** 5; **d)** ∅; **e)** ∅; **f)** ∅; **g)** 5. **2. a)** 8; **b)** –3; **c)** 7; **d)** –9; **e)** –49; **f)** –50; **g)** 4; **h)** –7. **3. a)** 0; **b)** ∅; **c)** 4; **d)** 3; **e)** 2; **f)** –7; **g)** 1; **h)** 1; **i)** 1; **j)** –5 şi 5; **k)** 0; **l)** –4 şi 4; **m)** –5 şi 5; **n)** –4 şi 4. **4. a)** (*x* – 3)*y* = 31 = (–31)(–1) = (–1)(–31) = 1 · 31 = 31 · 1; (*x*, *y*) ∈ {(–28, –1), (2, –31), (4, 31), (34, 1)}; **b)** (*x*, *y*) ∈ {(–7, 3), (–1, 9), (1, –5), (7, 1)}; **c)** (*x*, *y*) ∈ g {(–3, –11), (–8, –6), (–4, –8), (–5, –7), (4, –4), (–1, 1), (0, –2), (1, –3)}; **d)** *xy* – *x* – *y* = 20 ⇔ ⇔ *xy* – *x* – *y* + 1 = 21 ⇔ *x*(*y* – 1) – (*y* – 1) = 21 ⇔ (*x* – 1)(*y* – 1) = 21 = (–21)(–1) =

C. Centrul de greutate al unui triunghi.

1. $AC = 2AE = 8$ cm; $BG = 2GE = 6$ cm; $BE = 9$ cm. **2.** DE este linie mijlocie în ΔABC, deci $DE = \dfrac{AB}{2} = 5$ cm. G este centru de greutate, prin urmare, $GE = \dfrac{AG}{2} = 4$ cm, iar $GD = \dfrac{1}{3}BD = 3$ cm. $\mathcal{P}_{\Delta GED} = 12$ cm. **3.** Prin vârfurile triunghiului MNP se construiesc paralelele la laturile opuse. **4.** Se aplică teorema liniei mijlocii şi teorema reciprocă a liniei mijlocii în triunghi. **a)** $PE = \dfrac{1}{2}FC = BF$ şi rezultă că patrulaterul $BFEP$ este paralelogram. **b)** Patrulaterul $BFEP$ este paralelogram deci $BF = PE$ etc.; $\dfrac{1}{2} = \dfrac{BF}{FC}$. **5.** Fie punctul M mijlocul laturii $[AC]$. Atunci $G \in (BM)$ şi $\dfrac{BG}{GM} = 2$. Se aplică teorema lui Thales în ΔBMA, etc. $AB = 9$ cm, $AD = 3$ cm, $BE = 8$ cm, $BC = 12$ cm. **6.** $AB = 18$ cm, $BC = 12$ cm, $AC = 15$ cm. **7.** Punctele P şi Q sunt centrele de greutate ale triunghiurilor ABD şi, respectiv, ACD, deci $\dfrac{AP}{PM} = \dfrac{2}{1} = \dfrac{AQ}{QN}$ etc. **8.** Se arată că $BEDF$ este paralelogram şi rezultă că $BF \parallel DE$. Fie $\{M\} = AC \cap BF$ şi $\{N\} = AC \cap DE$. Din $[AF] \equiv [FD]$ şi $FM \parallel DN$, rezultă $[AM] \equiv [MN]$. Analog, $[MN] \equiv [NC]$ (**figura 239**). **9.** Se arată că patrulaterul $BMCG$ este paralelogram şi rezultă $BM \parallel GC$ **(1)**. În ΔAMN, GC este linie mijlocie, deci $MN \parallel GC$ **(2)**. Din **(1)** şi **(2)** rezultă că punctele B, M, N sunt coliniare (axioma lui Euclid). **10.** În triunghiul ABC, $[BO]$, $[CM]$ şi $[AN]$ sunt mediane. Cum $P \in CM \cap BO$, rezultă că $P \in AN$. **11. a)** $\Delta DMA \equiv \Delta EMB$ $(U.L.U) \Rightarrow [DM] \equiv [ME]$ **(1)** şi $[AD] \equiv [BE]$ **(2)**; **b)** din **(1)** şi $[AD] \equiv [BC]$ se obţine $[BE] \equiv [BC]$ (se poate utiliza şi reciproca teoremei liniei mijlocii); **c)** dreptele DB, CM, EN conţin medianele triunghiului ECD, deci sunt concurente (**figura 240**). **12.** În ΔABC, $[BO]$ este mediană. Se arată că $OM = \dfrac{BM}{2}$ şi rezultă că M este centrul de greutate al triunghiului ABC, de unde se deduce că P este mijlocul segmentului $[AB]$. Analog, Q este mijlocul segmentului $[DC]$ etc.

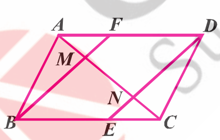


Fig. 239

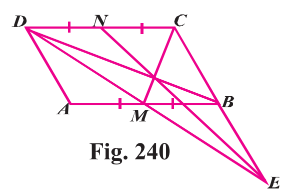


Fig. 240

II.3. Paralelograme particulare.

A. Dreptunghiul. Proprietăţi.

1. b) Se construieşte triunghiul dreptunghic ABC (cazul I.C.) etc. **c)** $AD = 4$ cm; $AB = 2$ cm. Se construieşte triunghiul dreptunghic ABD (C.C.) etc. **2.** Un patrulater convex este dreptunghi dacă şi numai dacă diagonalele sale sunt congruente şi au acelaşi mijloc etc. **3. a)** 42 cm; **b)** 90°; **c)** 30 cm. **4.** Dreptunghi. **5.** Propoziţia este adevărată. Se demonstrează prin reducere la absurd. **6.** Dreptunghi. **7.** Fie un paralelogram $ABCD$ şi m mediatoarea comună a două laturi ale acestuia. Dacă presupunem că m este mediatoarea laturii $[AB]$, atunci ea este şi mediatoarea laturii $[CD]$. Dacă notăm cu M şi N mijloacele laturilor $[AB]$ şi $[CD]$, atunci $MN \parallel BC$ şi rezultă $m(\sphericalangle B) = 90°$, condiţie suficientă pentru ca $ABCD$ să fie dreptunghi. **8.** $\Delta ADM \equiv \Delta BCM$ (L.L.L.) $\Rightarrow \sphericalangle D \equiv \sphericalangle C$ etc. **9.** $\Delta ADN \equiv \Delta BCM$ (L.L.L.) $\Rightarrow \sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$ etc.

10. a) $[AC] \equiv [DB]$; se construieşte mai întâi ΔABD (I.U.) **b)** $m(\sphericalangle DOC) = 50°$; se construieşte ΔODC isoscel cu baza $DC = 3$ cm şi $m(\sphericalangle O) = 50°$. **11.** Se arată că $[BD] \equiv [AC]$.

12. Fie M mijlocul segmentului $[AO]$. Atunci $EM = \frac{AO}{2}$, $FM = \frac{AO}{2}$ şi rezultă $EM + FM = AO = \frac{AC}{2}$ şi, cum $EF = \frac{AC}{2}$, rezultă că $M \in (EF)$. Rezultă că diagonalele patrulaterului $AEOF$ au acelaşi mijloc M. **13.** $ANMP$ este paralelogram, deci avem: $[NP] \equiv [AM] \Leftrightarrow m(\sphericalangle A) = 90°$. **14.** Dreptunghi. **15.** Fie $\{O\} = AC \cap BD$, $AE \perp BD$, $E \in BD$, $DF \perp AC$, $F \in AC$. Atunci în ΔAOD, înălţimile din A şi D sunt congruente, deci $[AO] \equiv [OD]$ etc.

16. a) Presupunem că $AB > AD$. Fie M, N, P, Q cele patru puncte de intersecţie (**fig. 241**). Se arată că $MNPQ$ are trei unghiuri drepte. **b)** Se consideră $E \in AM \cap CD$ şi $F \in CP \cap AB$, se arată că $AECF$ este paralelogram, M este mijlocul lui $[AE]$ şi P este mijlocul lui $[CF]$ etc.

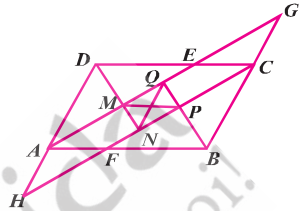


Fig. 241

B. Rombul. Proprietăţi.

1. a) Se aplică definiţia rombului; **b)** Triunghiul ABC este isoscel deoarece mediana BO este inclusă în bisectoarea $(BD$. Deci $(AB) \equiv (BC)$, iar $ABCD$ este paralelogram, rezultă (conform definiţiei) că $ABCD$ este romb. **d)** $(AB) \equiv (CD)$ şi $AB \parallel CD$ rezultă că $ABCD$ este paralelogram, apoi se aplică definiţia rombului. **2. a)** Se construieşte triunghiul isoscel ABC (L.L.L.) sau triunghiul dreptunghic AOB, unde $\{O\} = AC \cap BD$ ş.a.m.d.; **b)** Se construieşte triunghiul dreptunghic AOB etc. **3. a) i)** 5,2 m; **ii)** 16 m; **b)** 80°; **c)** 90°; **d)** $AC = 6$ cm; **e)** 8 cm. **4.** Se arată că $BC = 5$ cm etc. **5. a)** $m(\sphericalangle A) = 80°$; $AB = 3$ cm; **b)** Se construieşte ΔABD echilateral; **c)** Se construieşte triunghiul isoscel ABC cu $AC = 6$ cm şi $AB = BC = 4$ cm, apoi se determină vârful D; **d)** $[AC]$ şi $[BD]$ au acelaşi mijloc şi $AC \perp BD$; **e)** Se construieşte ΔABD isoscel cu baza $BD = 3$ cm şi unghiurile alăturate bazei de câte 55°. **6.** Se arată că $m(\sphericalangle BAO) = 30°$, $m(\sphericalangle AOB) = 90°$ şi rezultă $AB = 6$ cm. $\mathcal{P}_{ABCD} = 24$ cm. **7.** $MANB$ este paralelogram cu $[MA] \equiv [MB]$. **8.** Da (Se arată că $[AB] \equiv [AD]$, $[BC] \equiv [CD]$, $[AB] \equiv [BC]$).
9. Se arată că $[OE] \equiv [OF] \Leftrightarrow [AB] \equiv [AD] \Leftrightarrow ABCD$ este romb $\Leftrightarrow AC \perp BD$. **10.** Se arată că $[OM] \equiv [ON] \Leftrightarrow \sphericalangle MAO \equiv \sphericalangle NAO \Leftrightarrow ABCD$ este romb $\Leftrightarrow AC \perp BD$. **11.** $APMN$ este romb, deci $(AM$ este bisectoarea unghiului BAC. **12.** Se arată că $\Delta MAC \equiv \Delta NAC$ (U.L.U.) şi se obţine $[MA] \equiv [NA]$ şi $[MC] \equiv [NC]$, de unde se deduce că AC este mediatoarea segmentului MN etc.
13. Se arată că diagonalele patrulaterului $MNPQ$ este paralelogram şi cum $PQ \perp MN$ rezultă că $PMQN$ se înjumătăţesc şi sunt perpendiculare. **14.** O fiind centrul de simetrie al paralelogramului, avem $[OM] \equiv [ON]$ şi $[OP] \equiv [OQ]$ şi cum $PQ \perp MN$ rezultă patrulaterul $PMQN$ este romb. **15.** Romb. **16.** Presupunem că $[AB] \equiv [CD]$. Dacă BD este axă de simetrie a patrulaterului $ABCD$, atunci $[AB] \equiv [BC]$ şi $[AD] \equiv [DC]$ şi rezultă că $ABCD$ este romb, deci are cel puţin încă o axă de simetrie.

C. Pătratul. Proprietăţi.

1. a) A; **b)** F; **c)** F; **d)** A; **e)** A; **f)** A; **g)** A; **h)** F; **i)** A; **j)** F. **2. a)** Construiţi triunghiul dreptunghic isoscel ABC (I.U.) etc. **3.** $ABCD$ este romb cu un unghi drept. **4.** Se arată că patrulaterul $AMDN$ este dreptunghi şi $(ND) \equiv (DM)$ (proprietatea punctelor de pe bisectoarea unui unghi) etc.