

**ARTUR BĂLĂUCĂ**

**GABRIEL MÎRȘANU**

**MARIANA CIOBANAȘU**

**IOAN CIOBANAȘU**

# **ALGEBRĂ. GEOMETRIE**

**Clasa a VII-a**

- **Itemi cu note**
- **Modele de teste ce conțin itemi cu note și bareme de notare**
- **Teste inițiale**
- **Variante de teste pentru lucrarea scrisă semestrială**
- **Teme pentru recapitulare finală**
- **Modele de probleme rezolvate**
- **Probleme practice**
- **Chestiuni teoretice (breviare) la noțiunile din programa actuală de matematică**
- **Soluții, indicații, răspunsuri și comentarii la problemele propuse**

**EDITURA TAIDA**

**– IAȘI –**

- CUPRINS -

**ALGEBRĂ**

Bre- Enun- Solu-  
viar țuri ții

**CAPITOLUL I. RECAPITULARE ȘI COMPLETĂRI. TESTE ÎNȚIALE**

**7 8 226**

I.1.	Mulțimea $\mathbb{Z}$ . Reprezentarea pe axă. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ . Opus. Ordonare. Modulul unui număr întreg .....	7	8	226
I.2.	Operații în $\mathbb{Z}$ .....	9	11	226
I.3.	Divizibilitatea în $\mathbb{Z}$ .....	13	14	226
I.4.	Ecuatii în $\mathbb{Z}$ . Probleme .....	15	16	226
I.5.	Inecuații în $\mathbb{Z}$ .....	17	18	227
I.6.	Numere raționale .....		18	227
	Test 1 .....		18	227
	Teste inițiale. Test 2. Test 3 .....		19	227

**CAPITOLUL II. MULȚIMEA NUMERELOR REALE**

**22 23 228**

II.1.	Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural .....	22	23	228
II.2.	Algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate dintr-un număr natural; algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional pozitiv; estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional .....	25	26	229
II.3.	Scoaterea factorilor de sub radical; introducerea factorilor sub radical .....	28	29	230
II.4.	Numere iraționale, exemple; mulțimea numerelor reale; incluziunile $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ; modulul unui număr real (definiție, proprietăți); compararea și ordonarea numerelor reale; reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor prin aproximări. Partea întregă și partea fracționară a unui număr real .....	31	34	231
II.5.	Operații cu numere reale .....	37	38	232
II.5.1.	Adunarea și scăderea numerelor reale .....	37	38	232
II.5.2.	Înmulțirea și împărțirea numerelor reale. Reguli de calcul cu puteri .....	39	40	232
II.5.3.	Puteri cu exponent întreg a unui număr real .....	44	45	234
II.5.4.	Raționalizarea numitorului de forma $a\sqrt{b}$ .....	46	47	234
II.5.5.	Media aritmetică ponderată a $n$ numere reale, $n \geq 2$ .....	48	50	235
II.5.6.	Media geometrică a două numere reale pozitive .....	53	53	235
II.5.7.	Ecuatii de forma $x^2 = a$ , unde $a \in \mathbb{R}$ .....	55	56	236
	Test 4. Test 5 .....		58	237

**CAPITOLUL III. ECUAȚII ȘI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE**

**60 65 237**

III.1.	Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă; identități. Ecuatii de forma $ax + b = 0$ , unde $a, b \in \mathbb{R}$ ; mulțimea soluțiilor unei ecuații; ecuații echivalente .....	60	65	237
III.2.	Sisteme de două ecuații liniare cu două necunoscute; rezolvare prin metoda grafică, substituției și / sau prin metoda reducerii. Ecuatii de forma $ax + by + c = 0$ , unde $a, b, c$ sunt numere reale, $a \neq 0, b \neq 0$ .....	68	72	238
III.3.	Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor sau a sistemelor de ecuații liniare .....	79	80	239
	Test 6. Test 7. Test 8 .....		87	241

<b>CAPITOLUL IV. ELEMENTE DE ORGANIZARE A DATELOR</b>		90	92	241
IV.1.	Produsul cartezian a două mulțimi nevide; sistem de axe ortogonale în plan; reprezentarea într-un sistem de axe ortogonale a unor perechi de numere reale ..	90	92	241
IV.2.	Reprezentarea punctelor într-un sistem de axe ortogonale; distanța dintre două puncte din plan .....	94	95	242
IV.3.	Reprezentarea și interpretarea unor dependențe funcționale prin tabele, diagrame și grafice; poligonul frecvențelor .....	96	99	243
	Test 9 .....		103	244

## GEOMETRIE

<b>CAPITOLUL I. TRIUNGIUL. RECAPITULARE ȘI COMPLETĂRI</b>		104	108	245
---	--	-----	-----	-----

	Test 10 .....		109	245
--	---------------	--	-----	-----

<b>CAPITOLUL II. PATRULATERUL</b>		110	111	245
-----------------------------------	--	-----	-----	-----

II.1.	Patrulaterul convex; suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex .....	110	111	245
II.2.	Paralelogramul; proprietăți; aplicații în geometria triunghiului; linia mijlocie în triunghi, centrul de greutate al unui triunghi .....	112	113	246
	A. Paralelogramul. Proprietăți .....	112	113	246
	B. Linia mijlocie în triunghi. Proprietăți .....	115	115	247
	C. Centrul de greutate al unui triunghi .....	117	117	248
II.3.	Paralelograme particulare .....	119	120	248
	A. Dreptunghiul. Proprietăți .....	119	120	249
	B. Rombul. Proprietăți .....	121	122	249
	C. Pătratul. Proprietăți .....	123	124	249
	D. Trapezul. Proprietăți .....	126	127	250
	1. Trapezul, clasificare, proprietăți; trapezul isoscel; proprietăți .....	126	127	250
	2. Linia mijlocie în trapez .....	128	129	252
II.4.	Perimetre și arii: triunghi, paralelogram, paralelograme particulare, trapez .....	130	131	252
	A. Aria triunghiului .....	130	131	252
	B. Aria patrulaterului convex .....	131	131	252
	C. Aria paralelogramului .....	132	132	253
	D. Aria dreptunghiului .....	133	133	253
	E. Aria rombului .....	134	134	253
	F. Aria pătratului .....	135	135	253
	G. Aria trapezului .....	136	136	253
	Test 11. Test 12 .....		137	253

## CAPITOLUL III. CERCUL

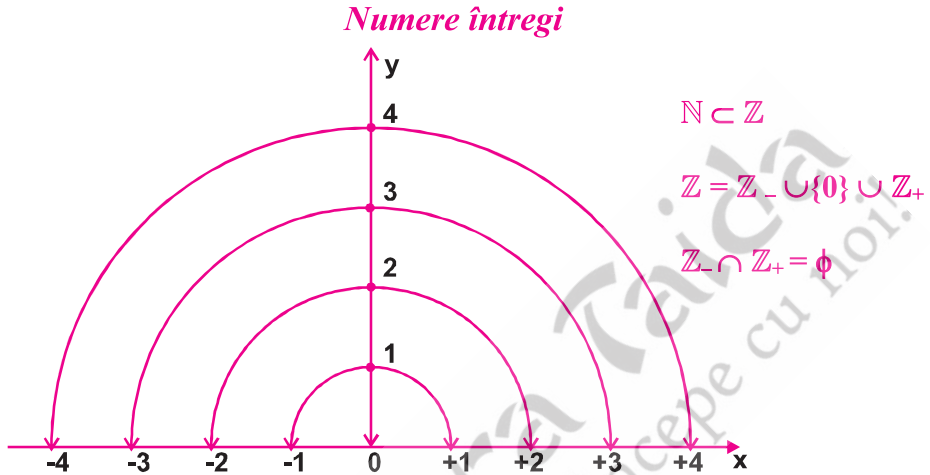
III.1.	Coarde și arce în cerc; proprietăți: la arce congruente corespund coarde congruente și reciproc, diametrul perpendicular pe o coardă; arce cuprinse între coarde paralele; coarde egal depărtate de centru .....	139	141	254
III.2.	Unghi înscris în cerc; triunghi înscris în cerc .....	143	144	256
III.3.	Tangente dintr-un punct exterior la un cerc .....	147	147	258
III.4.	Poligoane regulate înscrise într-un cerc (construcție, măsurile de unghiuri) .....	150	151	259
III.5.	Lungimea cercului și aria discului .....	152	154	260
	Test 13 .....		158	262

<b>CAPITOLUL IV. ASEMĂNAREA TRIUNGHURIILOR</b>		<b>160 161 263</b>
IV.1.	Segmente proporționale; teorema paralelelor echidistante; împărțirea unui segment în părți proporționale cu numere / segmente date .....	160 161 263
IV.2.	Teorema lui Thales .....	163 165 263
IV.3.	Teorema reciprocă a teoremei lui Thales .....	166 167 264
IV.4.	Triunghiuri asemenea .....	168 169 265
IV.5.	Teorema fundamentală a asemănării (t.f.a.). Aplicații; aproximarea în situații practice a distanțelor folosind asemănarea .....	170 172 266
IV.6.	Criterii de asemănare a triunghiurilor. Aplicații. Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea; aproximarea în situații practice a distanțelor folosind asemănarea .....	176 178 268
	Test 14 .....	181 269
<b>CAPITOLUL V. RELAȚII METRICE ÎN TRIUNGHIIUL DREPTUNGHIC</b>		<b>183 183 269</b>
V.1.	Proiecții ortogonale pe o dreaptă .....	183 183 269
V.2.	Teorema înălțimii .....	184 185 269
V.3.	Teorema catetei .....	187 187 270
V.4.	Teorema lui Pitagora .....	189 190 271
V.5.	Teorema reciprocă a teoremei lui Pitagora .....	196 197 274
	Test 15 .....	199 275
V.6.	Noțiuni de trigonometrie în triunghiul dreptunghic: sinusul, cosinusul, tangenta și cotangenta unui unghi ascuțit .....	200 202 275
V.7.	Rezolvarea triunghiului dreptunghic; aplicații: aproximarea în situații practice a distanțelor folosind relații metrice .....	203 204 276
	Test 16 .....	207 277
V.8.	Calculul elementelor (latură, apotemă, perimetru, arie) în triunghiul echilateral, în pătrat și în hexagonul regulat; aproximarea în situații practice a distanțelor folosind relații metrice .....	208 209 277
<b>CAPITOLUL VI. VARIANTE DE SUBIECTE PENTRU LUCRAREA SCRISĂ SEMESTRIALĂ</b>		<b>211</b>
	Semestrul I .....	211
	Semestrul al II-lea .....	213
<b>CAPITOLUL VII. TEME PENTRU RECAPITULARE FINALĂ</b>		<b>216</b>
<b>REZULTATE, INDICAȚII ȘI SOLUȚII</b>		<b>226</b>
<b>BIBLIOGRAFIE</b>		<b>286</b>

# ALGEBRA

## Capitolul I

### RECAPITULARE ȘI COMPLETĂRI. TESTE ÎNȚIALE



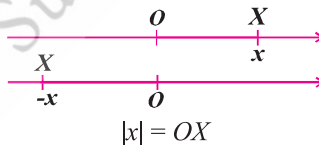
#### I.1. Mulțimea $\mathbb{Z}$ . Reprezentarea pe axă. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ . Opus. Ordonare.

#### Modulul unui număr întreg

##### Rețineți!

##### Modulul unui număr întreg

Modulul unui număr întreg  $x$  este distanța dintre originea axei numerelor și punctul de pe axă a cărui coordonată este numărul  $x$ .



Valoarea absolută sau modulul unui număr întreg  $x$ , notată  $|x|$ , se definește și astfel:

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{dacă } x < 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \\ x, & \text{dacă } x > 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad |x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad |x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x > 0 \\ -x, & \text{dacă } x \leq 0 \end{cases}$$

##### Proprietăți:

1.  $|x| = \max(-x, x)$ ;
2.  $x \leq |x|$  și  $-x \leq |x|$ ;
3.  $|x| \geq 0$ ;
4.  $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ;
5.  $|x| = |-x|$ ;
6.  $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ ;
7.  $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$  ( $y \neq 0$ );
8.  $|x + y| \leq |x| + |y|$ ;
9.  $|x| \leq n, n > 0 \Leftrightarrow -n \leq x \leq n$ .

### Exerciții rezolvate

1. Determinați mulțimea  $A = \{x \in \mathbb{Z} / 5 < |x| \leq 7\}$ .

**Răspuns:**  $A = \{-7; -6; +6; +7\}$

2. Determinați mulțimea  $B = \{x \in \mathbb{Z} / |x| \leq 3\}$ .

**Rezolvare:**  $|x| \leq 3$  este echivalentă cu  $-3 \leq x \leq 3$ . Deci  $A = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$

3. Rezolvați în  $\mathbb{Z}$  ecuațiile: **a)**  $|x| = 3$ ; **b)**  $|y| = -100$ .

**Rezolvare:** **a)**  $x \in \{-3; 3\}$ ; **b)**  $y \in \emptyset$  pentru că  $|y| \geq 0$ , oricare ar fi  $y \in \mathbb{Z}$ .

4. Câte elemente are mulțimea  $M = \{x \in \mathbb{Z}^* / |x| \leq 2010\}$ ?

**Răspuns:**  $2010 \cdot 2 = 4020$  elemente.

### EXERCITIILE ȘI PROBLEME

1. **a)** Ordonăți următoarele numere întregi reprezentându-le pe axa numerelor:

$-7; +2; -3; 0; -2; 6; -5; +3; +1; -8; 9; -9; 10$ ;

**b)** Reprezentați pe axă opusele numerelor:  $-4; +5; 0; -1; 3; -3; 8; -8; 7; -5; -10; +2; -7; -6; 9$ .  
(nota 5)

2. Reprezentați pe axă numerele de mai jos și scrieți-le în ordine crescătoare:

**a)**  $-4, +2, 0, -5, +1, -6$ ; **b)**  $-3, +4, +5, -7, +8$ ; **c)**  $-9, +6, +7, 0, -11, +8$ . (nota 5)

3. **a)** Reprezentați pe axa numerelor punctele:  $A(-4); B(-3); C(-9); D(+5); E(-2); F(-6); G(-10); H(+3); I(-7)$ . **b)** Determinați lungimile segmentelor:  $[AD]; [AF]; [DG]; [HI]$ .

**c)** Determinați abscisa mijlocului segmentelor  $[BC]; [HD]; [FG]; [AF]$ . (nota 5)

4. Determinați  $x \in \mathbb{Z}$  și  $y \in \mathbb{Z}$  astfel încât numerele întregi:  $-7, -5, -2, x, y, 3$  să fie ordonate crescător.  
(nota 5)

5. Fie mulțimea:  $A = \left\{ \frac{23}{7}; -2; 8; -40; 2,5; 0; \frac{1}{7}; -8 \right\}$ . **a)** Scrieți submulțimea ale

cărei elemente sunt numere negative. **b)** Scrieți submulțimea ale cărei elemente au modulul mai mare decât 2. **c)** Calculați suma dintre cel mai mic și cel mai mare element al mulțimii A.  
(nota 5)

6. Determinați numerele întregi  $x$  și  $y$  știind că mulțimile:  $\{4, 6, |x|\}$  și  $\{|-6|, |y|, |-5|\}$  sunt egale.  
(nota 7)

7. Determinați mulțimea:  $A = \{x \in \mathbb{Z} / 7 < |x| \leq 10\}$ .  
(nota 5)

8. Determinați  $x \in \mathbb{Z}$  știind că: **a)**  $|x| = 0$ ; **b)**  $|x| = -10$ ; **c)**  $|x| = 4$ ; **d)**  $|-x| \leq 2$ ;

**e)**  $-4 \leq |x| \leq 3$ ; **f)**  $|x| < 5$ ; **g)**  $|x| \in \mathbb{R}$ ; **h)**  $|x| \in \mathbb{R} - 1$ .  
(nota 9)

→Spre performanță!

9. Determinați  $x \in \mathbb{Z}$  știind că: **a)**  $|x|=4$ ; **b)**  $|x|=-5$ ; **c)**  $|x-1|=|1-x|$ ; **d)**  $|x|=0$ ;  
**e)**  $|x+2|=x+2$ ; **f)**  $|x-1|=1-x$ ; **g)**  $|x-5|=2$ ; **h)**  $|x-4|=-7$ ; **i)**  $|x-1|+|x-3|=2$ .  
(nota 9)

10. Determinați mulțimea:  $A = \{x + y \mid |x-1|=3; |y+1|=5 \text{ și } x, y \in \mathbb{Z}\}$ . (nota 10)

## I.2. Operații în $\mathbb{Z}$

**Rețineți!**

**ADUNAREA. Proprietăți:**

- oricare ar fi  $a, b \in \mathbb{Z}$ , avem  $a + b = b + a$  (**comutativitatea**);
- oricare ar fi  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ , avem  $(a + b) + c = a + (b + c)$  (**asociativitatea**);
- $a + 0 = 0 + a = a$ , 0 este **element neutru** la adunarea în  $\mathbb{Z}$ ;
- $a + (-a) = (-a) + a = 0$ , oricare ar fi  $a \in \mathbb{Z}$ .

**ÎNMULȚIREA**

☞ Produsul a două numere întregi  $a$  și  $b$  este un număr întreg notat  $a \cdot b$  obținut astfel:

- Dacă  $a = 0$  sau  $b = 0$ , atunci  $a \cdot b = 0$ .
- Dacă  $a > 0$  și  $b > 0$  sau  $a < 0$  și  $b < 0$ , atunci  $a \cdot b = |a| \cdot |b|$ .
- Dacă  $a > 0$  și  $b < 0$  sau  $a < 0$  și  $b > 0$ , atunci  $a \cdot b = -|a| \cdot |b|$ .

**Observație:** Din definiția precedentă rezultă următoarele reguli de calcul:

$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ , oricare ar fi  $a \in \mathbb{Z}$ ;

$a \cdot (-1) = (-1) \cdot a = -a$ , oricare ar fi  $a \in \mathbb{Z}$ ;

$(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -a \cdot b$ ;  $(-a)(-b) = a \cdot b$ , oricare ar fi  $a, b \in \mathbb{Z}^*$ .

**Proprietăți:**

- oricare ar fi  $a, b \in \mathbb{Z}$ , avem:  $a \cdot b = b \cdot a$  (**comutativitatea**);
- oricare ar fi  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ , avem:  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$  (**asociativitatea**);
- oricare ar fi  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  avem:  $a(b + c) = ab + ac$ ;  $a \cdot (b - c) = ab - ac$   
(**distributivitatea față de adunare și scădere**);
- oricare ar fi  $a \in \mathbb{Z}$  avem  $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ , 1 este **element neutru** la înmulțirea în  $\mathbb{Z}$ .

**ÎMPĂRȚIREA**

☞ Dacă  $a$  și  $b$  sunt două numere întregi cu  $b \neq 0$ , câtul dintre  $a$  și  $b$ , notat  $a : b$  sau  $\frac{a}{b}$ , este un număr întreg  $c$ , dacă el există, astfel încât  $a = b \cdot c$ .

# Capitolul II

## PATRULATERUL

### II.1. Patrulaterul convex; suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex.

#### Rețineți!

- Un poligon cu patru laturi se numește **patrulater**.
- Un patrulater este **convex**, dacă oricare ar fi o latură a sa, vârfurile patrulaterului nesituate pe ea se găsesc de aceeași parte a dreptei-suport a laturii respective. (**figura 53 a**)
- Patrulaterul din **figura b**) nu este convex. El este **neconvex (concav)** deoarece vârfurile  $A$  și  $D$  sunt situate de o parte și de alta a dreptei  $BC$ . (**fig. 53 b**)

#### Ce elemente are un patrulater convex?

- Punctele  $A, B, C$  și  $D$  se numesc **vârfurile** patrulaterului. (**fig. 54**)
- Segmentele  $[AB]; [BC]; [CD]$  și  $[AD]$  se numesc **laturile** patrulaterului.
- Segmentele  $[AC]$  și  $[BD]$  se numesc **diagonalele** patrulaterului.
- Un patrulater convex cu diagonalele perpendiculare se numește patrulater **ortodiagonal**. (**fig. 55**)
- Laturile  $[AB]$  și  $[CD]$ , respectiv  $[AD]$  și  $[BC]$  se numesc **laturi opuse**.
- Laturile  $[AB]$  și  $[BC]$  se numesc **laturi consecutive**.

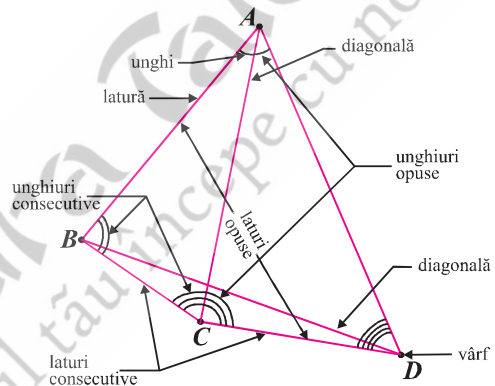
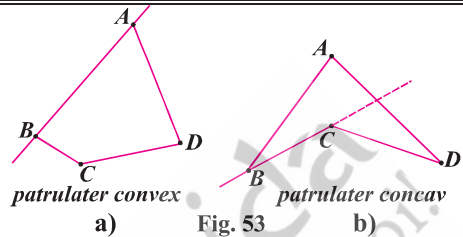


Fig. 54

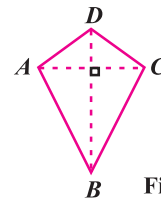


Fig. 55

- $r A, r B, r C$  și  $r D$  se numesc **unghiurile patrulaterului**.
- $r A$  și  $r C$ , respectiv  $r B$  și  $r D$  se numesc **unghiuri opuse**.
- $r A$  și  $r B$  se numesc **unghiuri consecutive**.
- Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este egală cu  $360^\circ$ .  
 $m(r A) + m(r B) + m(r C) + m(r D) = 360^\circ$ .

#### Probleme rezolvate

1. Calculați măsurile unghiurilor unui patrulater convex știind că ele sunt direct proporționale, respectiv, cu numerele 2; 5; 11 și 12.

**Rezolvare:** Notăm cu  $a, b, c$  și  $d$  măsurile unghiurilor.

$$\text{Avem: } \frac{a}{2} = \frac{b}{5} = \frac{c}{11} = \frac{d}{12} = \frac{a+b+c+d}{2+5+11+12} = \frac{360^\circ}{30} = 12^\circ.$$

Din  $\frac{a}{2} = 12^\circ$  rezultă  $a = 24^\circ$ ;  $\frac{b}{5} = 12^\circ$  rezultă  $b = 60^\circ$ ;  $\frac{c}{11} = 12^\circ$  rezultă  $c = 132^\circ$ ;  $\frac{d}{12} = 12^\circ$  rezultă  $d = 144^\circ$ .



2. În patrulaterul convex  $ABCD$  măsura unghiului  $\sphericalangle A$  este media aritmetică a măsurilor celorlalte trei unghiuri, iar măsurile unghiurilor  $\sphericalangle B$ ,  $\sphericalangle C$  și  $\sphericalangle D$  sunt direct proporționale cu numerele 2; 3 și, respectiv, 4. Aflați măsurile unghiurilor patrulaterului  $ABCD$ .

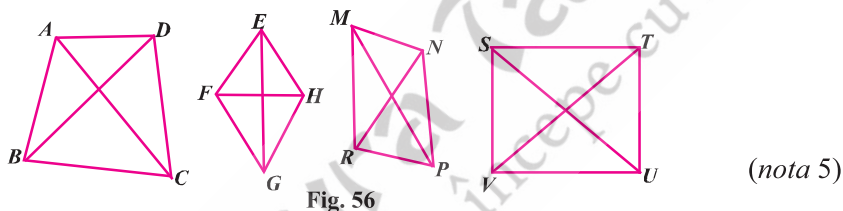
**Rezolvare:** Din  $m(\sphericalangle A) = \frac{1}{3} \cdot [m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C) + m(\sphericalangle D)]$  avem:

$m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C) + m(\sphericalangle D) = 3E m(\sphericalangle A)$  și cum  $m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C) + m(\sphericalangle D) = 360^\circ$  rezultă  $4Em(\sphericalangle A) = 360^\circ$ , deci  $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$  și  $m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C) + m(\sphericalangle D) = 270^\circ$ .

Cum  $\frac{m(\sphericalangle B)}{2} = \frac{m(\sphericalangle C)}{3} = \frac{m(\sphericalangle D)}{4} = \frac{m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C) + m(\sphericalangle D)}{2+3+4} = \frac{270^\circ}{9} = 30^\circ$ , avem  $m(\sphericalangle B) = 60^\circ$ ,  $m(\sphericalangle C) = 90^\circ$ ,  $m(\sphericalangle D) = 120^\circ$ .

### EXERCIȚII ȘI PROBLEME

1. În patrulateralele din **figura 56**, numiți: perechile de laturi opuse; perechile de unghiuri opuse; câte două perechi de vârfuri consecutive; diagonalele.



2. Lungimile laturilor unui patrulater convex, exprimate în cm, sunt patru numere naturale consecutive. Aflați aceste lungimi știind că perimetrul patrulaterului este de 62 cm. (nota 5)

3. Construiți patrulaterul convex  $ABCD$  știind că:  $AB = 5$  cm,  $BC = 4$  cm,  $AC = 6$  cm,  $m(\sphericalangle ACD) = 50^\circ$ ,  $m(\sphericalangle CAD) = 45^\circ$ . (nota 5)

4. Construiți patrulaterul convex  $ABCD$  cunoscând:  $AC = AD = 4$  cm,  $m(\sphericalangle ABC) = 90^\circ$ ,  $m(\sphericalangle BAC) = 30^\circ$ ,  $m(\sphericalangle BCD) = 120^\circ$ . (nota 5)

5. Desenați un patrulater convex  $ABCD$  cu:  $m(\sphericalangle A) = 75^\circ$ ,  $m(\sphericalangle B) = 90^\circ$ ,  $m(\sphericalangle C) = 115^\circ$ . Determinați  $m(\sphericalangle D)$ . (nota 5)

6. Determinați măsurile unghiurilor unui patrulater convex, știind că acestea sunt direct proporționale cu numerele 2, 3, 4, 6. (nota 7)

7. Există un patrulater convex ale cărui unghiuri au măsurile invers proporționale cu numerele 2, 3, 4, 6? (nota 7)

8. Stabiliți valoarea logică a fiecăreia din următoarele propoziții:

$p_1$ : În orice patrulater convex cel puțin un unghi are măsura mai mare sau egală cu  $90^\circ$ .

$p_2$ : Dacă un patrulater convex nu are nici un unghi obtuz, atunci cel puțin unul dintre unghiurile sale este ascuțit.

$p_3$ : Dacă un patrulater convex nu are nici un unghi ascuțit, atunci toate unghiurile acestuia sunt drepte.

$p_4$ : În orice patrulater convex, cel mult 3 unghiuri sunt obtuze. (nota 9)

## REZULTATE, INDICAȚII, SOLUȚII, COMENTARIU

### ALGEBRĂ

#### Capitolul I. RECAPITULARE ȘI COMPLETĂRI. TESTE ÎNIȚIALE

##### I.1. Mulțimea $\mathbb{Z}$ . Reprezentarea pe axă. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ . Opus. Ordonare. Modulul unui număr întreg

1. **a)**  $-9; -8; -7; -5; -3; -2; 0; 1; 2; 3; 6; 9; 10$ . **3. b)**  $AD = 9; AF = 2; DG = 15; HI = 10$ ; **c)**  $-6; +4; -8; -5$ . **4.**  $x = -1 \quad 1 \quad y \in \{0, 1, 2\}; x = 0 \quad 1 \quad y \in \{1, 2\}; x = 1 \quad 1 \quad y = 2$ . **5. a)**  $\{-40; -8; -2\}$ ; **b)**  $\{\frac{23}{7}; -40; -8; 2,5; 8\}$ ; **c)**  $-32$ . **6.**  $x \in \{-5, 5\}$  și  $y \in \{-4, 4\}$ . **7.**  $A = \{\pm 8; \pm 9; \pm 10\}$ . **8. a)**  $0$ ; **b)** nu există; **c)**  $x \in \{-4, 4\}$ ; **d)**  $x \in \{\pm 1; \pm 2; 0\}$ ; **e)**  $x \in \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3\}$ ; **f)**  $x \in \{\pm 4; \pm 3; \pm 2; \pm 1; 0\}$ . **9. a)**  $x \in \{-4, 4\}$ ; **b)** nu există; **c)**  $x \in \mathbb{Z}$ ; **d)**  $x = 0$ ; **e)**  $x \in \mathbb{N} \cup \{-2; -1\}$ ; **f)**  $x \in \mathbb{Z}_- \cup \{0, 1\}$ ; **g)**  $x \in \{3, 7\}$ ; **h)** nu există; **i)**  $x \in \{1, 2, 3\}$ . **10.**  $A = \{\pm 2, \pm 8\}$ .

I.2. Operații în  $\mathbb{Z}$  1.  $-921$ . **3. a)**  $-7$ ; **b)**  $0$ . **4. a)**  $4$ ; **b)**  $-16$ ; **c)**  $-213$ ; **d)**  $-9$ ; **e)**  $-5$ . **5. a)**  $-3$ ; **b)**  $6$ ; **c)**  $8$ ;

**d)**  $1$ ; **e)**  $53$ ; **f)**  $2$ ; **g)**  $-176$ ; **h)**  $15$ ; **i)**  $7$ ; **j)**  $4$ ; **k)**  $-1$ ; **l)**  $5$ ; **m)**  $-15$ ; **n)**  $1\ 703$ . **6. a)**  $18$ ; **b)**  $8$ ; **c)**  $12$ ; **d)**  $-4$ ; **e)**  $15$ ; **f)**  $10$ ; **g)**  $16$ . **7. a)**  $-2000$ ; **b)**  $-2000$ ; **c)**  $1001$ . **8. a)**  $-17 = (-1)(+17) = (+1)(-17)$ ;  
 $-12 = (-12)(+1) = (+12)(-1) = (-3)(+4) = (-4)(+3) = (-2)(+6) = (-6)(+2)$  etc.  
**9.**  $12 = 1E1E1E1E2E6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 6 = 1E1E1E1E1E3E4 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 3 =$

$= \frac{1+1+\dots+1}{19\text{termeni}} + (-3) + (-4) = \frac{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}{19\text{factori}} \cdot (-3)(-4) = (-3) + 4 + \left( \frac{1+1+\dots+1}{12\text{termeni}} \right) + (-1)$  etc. Căutați și

alte soluții. **10. a)**  $15$ ; **b)**  $90$ ; **c)**  $0$ ; **d)**  $-7$ ; **e)**  $+95$ ; **f)**  $-69$ . **11. a)**  $-28$ ; **b)**  $-84$ ; **c)**  $385$ ; **d)**  $0$ ; **e)**  $-118$ ; **f)**  $6$ ; **g)**  $-260$ . **12. a)**  $50 = 8 \cdot 6 + 2$ ; **b)**  $-40 = (-7)(-6) + 2$  etc. **14. a)**  $-8$ ; **b)**  $-1243$ ; **c)**  $-30$ ; **d)**  $-50$ ; **e)**  $900$ ; **f)**  $-863$ ; **g)**  $190$ ; **h)**  $-123$ . **15. 1.**  $a = -2$ . **2. a)**  $12\ 345\ 000$ ; **b)**  $583\ 000$ ; **c)**  $0$ . **16. a)**  $1$ ; **b)**  $-1998$ ; **c)**  $0$ . **17.**  $9; -1; 8; -125; -32; -198$ . **18. a)**  $-14$ ; **b)**  $-33$ ; **c)**  $72$ ; **d)**  $-1001$ . **20. a)**  $(-2)^{11}$ ; **b)**  $(-7)^7$ ; **c)**  $9^6$ ; **d)**  $2$ ; **e)**  $3^{20}$ ; **f)**  $12^{12}$ ; **g)**  $1$ ; **h)**  $(-6)^{13}$ ; **i)**  $25^2 = 5^4$ ; **j)**  $19^{10}$ . **21. a)**  $0$ ; **b)**  $1$ ; **c)**  $27$ ; **d)**  $-39$ ; **e)**  $8$  dacă  $n = \text{par}$  și  $-8$  dacă  $n = \text{impar}$ .

I.3. Divizibilitatea în  $\mathbb{Z}$  1. **a)**  $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8\}$ ; **b)**  $\mathcal{D}_{-12} = \mathcal{D}_{12}$ ; **c)**  $\mathcal{M}_{35}$ ; **d)**  $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$ .

**2. a)**  $9\ 876; -9\ 876$ ; **b)**  $9\ 876; -9\ 876$ ; **c)+e)**  $9\ 875; -9875$ ; **d)**  $9\ 876; -9\ 876$ . **3. a)**  $(x+1)(y+1) = 7 \Rightarrow (x, y) \in \{(0, 6), (6, 0)\}$ . Numerele sunt  $2^6$  și  $3^6$  adică  $64$  și  $729$ . **b)**  $(x+1)(y+1) = 18$  etc. **4.**  $A = \{-3, 4\}$ . **5.**  $A = \{\pm 8, \pm 4, \pm 2, \pm 1\}$ ;  $B = \{-1, 0, 2, 3\}$ . **6. a)**  $x \in \{-6, -3, -2, -1\}$ ; **b)**  $x \in \{-11, -1, 1, 3, 5, 7, 9, 19\}$ ; **e)**  $x - 1 / x \Rightarrow x - 1 / (x - 1) + 1 \Rightarrow x - 1 / 1 \Rightarrow 1 \cdot x - 1 \in \{-1, 1\}$  etc; **f)**  $x + 1 / 3x - 1 \Rightarrow x + 1 / 3(x + 1) - 4 \Rightarrow x + 1 / 4$  etc; **g)**  $x \in \{-6, 6\}$ . **7. b)**  $359$  și  $-361$ . **8. a)**  $(x, y) \in \{(-17, 4), (-1, -12), (1, 22), (17, 6)\}$ ; **b)**  $(x, y) \in \{(-13, -4), (-1, 8), (1, -18), (13, -6)\}$ . **c)**  $(x, y) \in \{(-19, 0), (-12, -1), (-7, -6), (-6, -13), (-4, 15), (-3, 8), (2, 3), (9, 2)\}$ . **d)**  $xy + x + y = 8 \Leftrightarrow xy + x + y + 1 = 9 \Leftrightarrow x(y + 1) + (y + 1) = 9 \Leftrightarrow (x + 1)(y + 1) = 9 = (-9)(-1) = (-1)E(-9) = (-3)(-3) = 3 \cdot 3$  etc. **e)**  $x \in \{2, -3\}$ ; **f)**  $x \in \{-3, 4\}$ ; **g)**  $x \in \{-2, 8\}$ .

I.4. Ecuații în  $\mathbb{Z}$ . Probleme 1. **a)**  $\emptyset$ ; **b)**  $-4$ ; **c)**  $5$ ; **d)**  $\emptyset$ ; **e)**  $\emptyset$ ; **f)**  $\emptyset$ ; **g)**  $5$ . **2. a)**  $8$ ; **b)**  $-3$ ; **c)**  $7$ ; **d)**  $-9$ ;

**e)**  $-49$ ; **f)**  $-50$ ; **g)**  $4$ ; **h)**  $-7$ . **3. a)**  $0$ ; **b)**  $\emptyset$ ; **c)**  $4$ ; **d)**  $3$ ; **e)**  $2$ ; **f)**  $-7$ ; **g)**  $1$ ; **h)**  $1$ ; **i)**  $1$ ; **j)**  $-5$  și  $5$ ; **k)**  $0$ ; **l)**  $-4$  și  $4$ ; **m)**  $-5$  și  $5$ ; **n)**  $-4$  și  $4$ . **4. a)**  $(x - 3)y = 31 = (-31)(-1) = (-1)(-31) = 1 \cdot 31 = 31 \cdot 1$ ;  $(x, y) \in \{(-28, -1), (2, -31), (4, 31), (34, 1)\}$ ; **b)**  $(x, y) \in \{(-7, 3), (-1, 9), (1, -5), (7, 1)\}$ ; **c)**  $(x, y) \in \mathbb{G} \{(-3, -11), (-8, -6), (-4, -8), (-5, -7), (4, -4), (-1, 1), (0, -2), (1, -3)\}$ ; **d)**  $xy - x - y = 20 \Leftrightarrow xy - x - y + 1 = 21 \Leftrightarrow x(y - 1) - (y - 1) = 21 \Leftrightarrow (x - 1)(y - 1) = 21 = (-21)(-1) =$

### C. Centrul de greutate al unui triunghi.

1.  $AC = 2AE = 8$  cm;  $BG = 2GE = 6$  cm;  $BE = 9$  cm. 2.  $DE$  este linie mijlocie în  $\triangle ABC$ , deci  $DE = \frac{AB}{2} = 5$  cm.  $G$  este centru de greutate, prin urmare,  $GE = \frac{AG}{2} = 4$  cm, iar  $GD = \frac{1}{3}BD = 3$  cm.  $\mathcal{P}_{\triangle GED} = 12$  cm. 3. Prin vârfurile triunghiului  $MNP$  se construiesc paralelele la laturile opuse. 4. Se aplică teorema liniei mijlocii și teorema reciprocă a liniei mijlocii în triunghi. a)  $PE = \frac{1}{2}FC = BF$  și rezultă că patrulaterul  $BFEP$  este paralelogram. b) Patrulaterul  $BFEP$  este paralelogram deci  $BF = PE$  etc.;  $\frac{1}{2} = \frac{BF}{FC}$ . 5. Fie punctul  $M$  mijlocul laturii  $[AC]$ . Atunci

$G \in (BM)$  și  $\frac{BG}{GM} = 2$ . Se aplică teorema lui Thales în  $\triangle BMA$ , etc.  $AB = 9$  cm,  $AD = 3$  cm,  $BE = 8$  cm,  $BC = 12$  cm. 6.  $AB = 18$  cm,  $BC = 12$  cm,  $AC = 15$  cm. 7. Punctele  $P$  și  $Q$  sunt centrele de greutate ale triunghiurilor  $ABD$  și, respectiv,  $ACD$ , deci  $\frac{AP}{PM} = \frac{2}{1} = \frac{AQ}{QN}$  etc.

8. Se arată că  $BEDF$  este paralelogram și rezultă că  $BF \parallel DE$ . Fie  $\{M\} = AC \cap BF$  și  $\{N\} = AC \cap DE$ . Din  $[AF] \equiv [FD]$  și  $FM \perp DN$ , rezultă  $[AM] \equiv [MN]$ . Analog,  $[MN] \equiv [NC]$  (figura 239). 9. Se arată că patrulaterul  $BMCG$  este paralelogram și rezultă  $BM \parallel GC$  (1). În  $\triangle AMN$ ,  $GC$  este linie mijlocie, deci  $MN \parallel GC$  (2). Din (1) și (2) rezultă că punctele  $B, M, N$  sunt coliniare (axioma lui Euclid). 10. În triunghiul  $ABC$ ,  $[BO]$ ,  $[CM]$  și  $[AN]$  sunt mediane. Cum  $P \in CM \cap BO$ , rezultă că  $P \in AN$ . 11. a)  $\triangle DMA \equiv \triangle EMB$  (U.L.U.)  $\Rightarrow [DM] \equiv [ME]$  (1) și  $[AD] \equiv [BE]$  (2); b) din (1) și  $[AD] \equiv [BC]$  se obține  $[BE] \equiv [BC]$  (se poate utiliza și reciproca teoremei liniei mijlocii); c) dreptele  $DB, CM, EN$  conțin medianele triunghiului  $ECD$ , deci sunt concurente (figura 240). 12. În  $\triangle ABC$ ,  $[BO]$  este mediană. Se arată că  $OM = \frac{BM}{2}$  și rezultă că  $M$  este centrul de greutate al triunghiului  $ABC$ , de unde se deduce că  $P$  este mijlocul segmentului  $[AB]$ . Analog,  $Q$  este mijlocul segmentului  $[DC]$  etc.

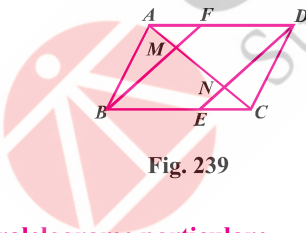


Fig. 239

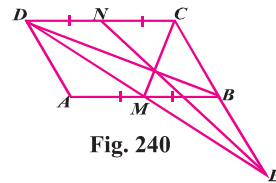


Fig. 240

### II.3. Paralelograme particulare.

#### A. Dreptunghiul. Proprietăți.

1. b) Se construiește triunghiul dreptunghic  $ABC$  (cazul I.C.) etc. c)  $AD = 4$  cm;  $AB = 2$  cm. Se construiește triunghiul dreptunghic  $ABD$  (C.C.) etc. 2. Un patrulater convex este dreptunghi dacă și numai dacă diagonalele sale sunt congruente și au același mijloc etc. 3. a) 42 cm; b)  $90^\circ$ ; c) 30 cm. 4. Dreptunghi. 5. Propoziția este adevărată. Se demonstrează prin reducere la absurd. 6. Dreptunghi. 7. Fie un paralelogram  $ABCD$  și  $m$  mediatoarea comună a două laturi ale acestuia. Dacă presupunem că  $m$  este mediatoarea laturii  $[AB]$ , atunci ea este și mediatoarea laturii  $[CD]$ . Dacă notăm cu  $M$  și  $N$  mijloacele laturilor  $[AB]$  și  $[CD]$ , atunci  $MN \perp BC$  și rezultă  $m(\angle B) = 90^\circ$ , condiție suficientă pentru ca  $ABCD$  să fie dreptunghi. 8.  $\triangle ADM \setminus \triangle BCM$  (L.L.L.)  $\Rightarrow \angle D \setminus \angle C$  etc. 9.  $\triangle ADN \equiv \triangle BCM$  (L.L.L.)  $\Rightarrow \angle A \equiv \angle B$  etc.

**10. a)**  $[AC] \equiv [DB]$ ; se construiește mai întâi  $\triangle ABD$  (I.U.) **b)**  $m(\angle DOC) = 50^\circ$ ; se construiește  $\triangle ODC$  isoscel cu baza  $DC = 3$  cm și  $m(\angle O) = 50^\circ$ . **11.** Se arată că  $[BD] \equiv [AC]$ .

**12.** Fie  $M$  mijlocul segmentului  $[AO]$ . Atunci  $EM = \frac{AO}{2}$ ,  $FM = \frac{AO}{2}$  și rezultă  $EM + FM = AO = \frac{AC}{2}$  și, cum  $EF = \frac{AC}{2}$ , rezultă că  $M \in (EF)$ . Rezultă că diagonalele patrulaterului

$AEOF$  au același mijloc  $M$ . **13.**  $ANMP$  este paralelogram, deci avem:  $[NP] \equiv [AM] \Leftrightarrow m(\angle A) = 90^\circ$ . **14.** Dreptunghi. **15.** Fie  $\{O\} = AC \cap BD$ ,

$AE \perp BD$ ,  $E \in BD$ ,  $DF \perp AC$ ,  $F \in AC$ . Atunci în  $\triangle AOD$ , înălțimile din  $A$  și  $D$  sunt congruente, deci  $[AO] \equiv [OD]$  etc.

**16. a)** Presupunem că  $AB > AD$ . Fie  $M, N, P, Q$  cele patru puncte de intersecție (fig. 241). Se arată că  $MNPQ$  are trei unghiuri drepte. **b)** Se consideră  $E \in AM \cap CD$  și  $F \in CP \cap AB$ , se arată că  $AECF$  este paralelogram,  $M$  este mijlocul lui  $[AE]$  și  $P$  este mijlocul lui  $[CF]$  etc.

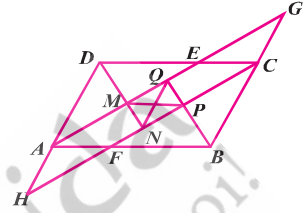


Fig. 241

### B. Rombul. Proprietăți.

**1. a)** Se aplică definiția rombului; **b)** Triunghiul  $ABC$  este isoscel deoarece mediana  $BO$  este inclusă în bisectoarea  $(BD)$ . Deci  $(AB) \setminus (BC)$ , iar  $ABCD$  este paralelogram, rezultă (conform definiției) că  $ABCD$  este romb. **d)**  $(AB) \setminus (CD)$  și  $AB \nparallel CD$  rezultă că  $ABCD$  este paralelogram, apoi se aplică definiția rombului. **2. a)** Se construiește triunghiul isoscel  $ABC$  (L.L.L.) sau triunghiul dreptunghic  $AOB$ , unde  $\{O\} = AC \cap BD$  ș.a.m.d.; **b)** Se construiește triunghiul dreptunghic  $AOB$  etc. **3. a) i)** 5,2 m; **ii)** 16 m; **b)**  $80^\circ$ ; **c)**  $90^\circ$ ; **d)**  $AC = 6$  cm; **e)** 8 cm. **4.** Se arată că  $BC = 5$  cm etc. **5. a)**  $m(\angle A) = 80^\circ$ ;  $AB = 3$  cm; **b)** Se construiește  $\triangle ABD$  echilateral; **c)** Se construiește triunghiul isoscel  $ABC$  cu  $AC = 6$  cm și  $AB = BC = 4$  cm, apoi se determină vârful  $D$ ; **d)**  $[AC]$  și  $[BD]$  au același mijloc și  $AC \perp BD$ ; **e)** Se construiește  $\triangle ABD$  isoscel cu baza  $BD = 3$  cm și unghiurile alăturate bazei de câte  $55^\circ$ . **6.** Se arată că  $m(\angle BAO) = 30^\circ$ ,  $m(\angle AOB) = 90^\circ$  și rezultă  $AB = 6$  cm.  $P_{ABCD} = 24$  cm. **7.**  $MANB$  este paralelogram cu  $[MA] \equiv [MB]$ . **8.** Da (Se arată că  $[AB] \equiv [AD]$ ,  $[BC] \equiv [CD]$ ,  $[AB] \equiv [BC]$ ).

**9.** Se arată că  $[OE] \equiv [OF] \Leftrightarrow [AB] \setminus [AD] \Leftrightarrow ABCD$  este romb  $\Leftrightarrow AC \perp BD$ . **10.** Se arată că  $[OM] \equiv [ON] \Leftrightarrow \angle MAO \setminus \angle NAO \Leftrightarrow ABCD$  este romb  $\Leftrightarrow AC \perp BD$ . **11.**  $APMN$  este romb, deci  $(AM)$  este bisectoarea unghiului  $BAC$ . **12.** Se arată că  $\triangle MAC \equiv \triangle NAC$  (U.L.U.) și se obține  $[MA] \equiv [NA]$  și  $[MC] \equiv [NC]$ , de unde se deduce că  $AC$  este mediatoarea segmentului  $MN$  etc. **13.** Se arată că diagonalele patrulaterului  $MNPQ$  este paralelogram și cum  $PQ \perp MN$  rezultă că  $PMQN$  se înjumătățesc și sunt perpendiculare. **14.**  $O$  fiind centrul de simetrie al paralelogramului, avem  $[OM] \setminus [ON]$  și  $[OP] \setminus [OQ]$  și cum  $PQ \perp MN$  rezultă patrulaterul  $PMQN$  este romb. **15.** Romb. **16.** Presupunem că  $[AB] \setminus [CD]$ . Dacă  $BD$  este axă de simetrie a patrulaterului  $ABCD$ , atunci  $[AB] \setminus [BC]$  și  $[AD] \setminus [DC]$  și rezultă că  $ABCD$  este romb, deci are cel puțin încă o axă de simetrie.

### C. Pătratul. Proprietăți.

**1. a)** A; **b)** F; **c)** F; **d)** A; **e)** A; **f)** A; **g)** A; **h)** F; **i)** A; **j)** F. **2. a)** Construiți triunghiul dreptunghic isoscel  $ABC$  (I.U.) etc. **3.**  $ABCD$  este romb cu un unghi drept. **4.** Se arată că patrulaterul  $AMDN$  este dreptunghi și  $(ND) \setminus (DM)$  (proprietatea punctelor de pe bisectoarea unui unghi) etc.