Redactare: Alina Scurtu
Tehnoredactare computerizată: Emil Stoica, Cristina Aprodu

Date despre autor

Emil Stoica este autorul lucrărilor: *Calculatoare electronice şi sisteme de operare*, curs, 2 vol. (coautor, Facultatea de Cibernetică, 1972); *Baze logice pentru calculatoare numerice* (Editura Tehnică, Bucureşti, 1978); *Tomografia computerizată* (revista „Ştiinţă şi tehnică”, 1989); *Algebra. Sinteze ale elementelor teoretice de bază* (Editura Odeon, Bucureşti, 1996); *Algebra. Ghid practic* (Editura Eikon, Cluj-Napoca, 2007); *Trigonometria* (Editura Corint, Bucureşti, 2009).

ISBN 978-973-135-502-3

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
STOICA, EMIL
Algebra: elementele de bază în rezolvarea de exerciţii şi probleme: culegere de exerciţii şi probleme aplicative: pentru gimnaziu şi liceu / Emil Stoica. - Bucureşti: Corint, 2009
Bibliogr.
ISBN 978-973-135-502-3

512

Emil Stoica

ALGEBRA

Elementele de bază în rezolvarea de exerciţii şi probleme

Culegere de exerciţii şi probleme aplicative

PENTRU GIMNAZIU ŞI LICEU

CORINT

PREFAȚĂ

Dintotdeauna, şi mai ales în ultimii ani, s-au scris şi s-au publicat numeroase culegeri de exerciții şi probleme, care acoperă toate capitolele matematicii, atât pentru fixarea şi aprofundarea materialului expus în lecțiile predate în şcoli, cât şi pentru pregătirea examenelor de admitere la liceu, a examenului de bacalaureat sau a examenelor de admitere în diverse forme specializate de învățământ, inclusiv învățământul superior.

Aceste culegeri au fost şi sunt considerate materialul cel mai solicitat în pregătirea elevilor, practica rezolvării de exerciții şi probleme fiind de o indiscutabilă utilitate în vederea susținerii majorității formelor de examinare; această practică este şi obiectivul principal în toate formele de pregătire, individuală sau, mai ales, asistată (de tip „meditații”).

Rezolvarea de exerciții şi probleme constă însă în punerea în aplicare a unor instrumente care sunt furnizate doar de teoria matematicii, absolut şi evident indispensabile oricărei tentative de a aborda — fundamentat, creativ şi nu mecanic — practica rezolvării a ceea ce propun culegerile amintite.

Publicațiile sintetice de tip „Tabele şi formule matematice”, prin forma foarte concentrată a conținutului, nu pot constitui un material de studiu, fiind foarte utile doar după parcurgerea acestuia.

În aceste condiții (şi în mod curent), baza pregătirii teoretice a elevilor o constituie manualele şcolare, care urmăresc (cronologic, cu inevitabila dispersie) o programă analitică eşalonată pe toată perioada pregătirii şcolare.

În fața unui examen, elevii au la dispoziție şi utilizează în general, pentru partea teoretică, doar multitudinea manualelor şcolare; acestea oferă un bogat conținut informațional (foarte util primului contact), dar sunt de o eficiență redusă pentru un scop recapitulativ sau pentru aprofundare; la fel, în practica rezolvării de exerciții şi probleme.

În PARTEA I, lucrarea de față își propune să ofere — într-o formă compactă, dar nu sumară, şi evitând intenționat o prezentare sofisticată — sinteza elementelor teoretice de bază ale instrumentarului practic din ALGEBRA învățământului mediu; la provocarea „CE" a culegerilor de exerciții şi probleme se intenționează a se da răspunsul „CU CE" şi „CUM".

Scopul principal urmărit este punerea la dispoziția elevilor (şi nu numai) a unui material uşor accesibil şi unitar, sintetic, însă suficient de detaliat încât să poată constitui un material de însuşire, de aprofundare sau de recapitulare — cu aplicare practică directă şi prin studiu individual — a informațiilor furnizate în mai mulți ani de şcolarizare.

Fără stăpânirea acestor informații (evident greşit catalogate uneori ca „teorie sterilă"), tentativa rezolvării practice de exerciții şi probleme este un demers aproape inutil sau, cel mult, mecanic.

Prezentarea noțiunilor teoretice este însoțită de exemple şi sugestii de aplicare, dându-se soluții sau metode de rezolvare a celor mai frecvent întâlnite cazuri în practica rezolvării de exerciții şi probleme; din acest punct de vedere, lucrarea constituie un GHID PRACTIC aplicativ, care poate fi consultat şi utilizat eficient chiar în timpul rezolvării unui exercițiu sau a unei probleme concrete.

În PARTEA a II-a sunt prezentate exerciții şi probleme aplicative, cu indicații de rezolvare şi răspunsuri corelate cu, şi cu trimitere la PARTEA I, precum şi exerciții şi probleme aplicative fără indicații şi răspunsuri.

Modul de prezentare vizează un nivel mediu de pregătire prealabilă, urmărind eficiența percepției, înțelegerea fondului noțiunilor — cu scop aplicativ în practica rezolvării de exerciții şi probleme — şi intenționând ca lucrarea să fie utilă elevilor atât în pregătirea şcolară curentă, cât şi, mai ales, în pregătirea premergătoare diverselor forme de testare sau examinare.

Autorul

CUPRINS

PARTEA I. Elementele de bază

PARTEA I. Elementele de bază

MULŢIMI

În sens matematic, o mulţime, fie ea M, se defineşte ca fiind o grupare sau o colecţie, ale cărei componente se numesc ELEMENTE ale mulţimii, şi care este privită, considerată şi tratată ca un ansamblu unitar prin una dintre următoarele modalităţi:
– specificarea unei caracteristici / proprietăţi comune tuturor elementelor mulţimii definite;
– indicarea / specificarea concretă a elementelor care compun mulţimea definită, fie ele $m_1, m_2, m_3, \dots m_n$; se scrie $M = \{m_1, m_2, m_3, \dots m_n\}$

După numărul, finit sau infinit, de elemente, mulţimile pot fi mulţimi finite sau, respectiv, mulţimi infinite.
Mulţimea VIDĂ: o mulţime fără niciun element; se notează cu Ø.

RELAŢII

– Elementele m_k ale unei mulţimi M sunt legate de aceasta prin relaţia de **APARTENENŢĂ**; se scrie:

$$\mathbf{m_k \in M}$$

(elementul m_k „aparţine” mulţimii M)

O mulţime M' este SUBMULŢIME a unei mulţimi M dacă toate elementele mulţimii M' sunt şi elemente ale mulţimii M, adică avem:

$$m_k' \in M' \text{ implică } m_k' \in M, \text{ pentru orice } m_k'$$

– Submulţimea M' a unei mulţimi M este legată de aceasta prin relaţia de **INCLUZIUNE** (relaţie reflexivă, antisimetrică, tranzitivă, vezi pag. 12); se scrie:

$$\mathbf{M' \subset M}$$

(mulţimea M' este „inclusă” în mulţimea M)

Mulţimea COMPLEMENTARĂ a unei submulţimi M' faţă de o mulţime M în care este inclusă ($M' \subset M$): mulţimea ale cărei elemente aparţin mulţimii M dar nu aparţin şi submulţimii M'.
Se mai numeşte şi DIFERENŢĂ, şi se notează

$$C_M M' = M - M' \text{ (complementara mulţimii M' în M).}$$

Exemplu: $M = \{a, b, c, d\}$; $M' = \{b, d\}$; $C_M M' = M - M' = \{a, c\}$

OPERAŢII

– Operaţia de **REUNIRE**: operaţia prin care, din două mulţimi date, M_1 şi M_2, se obţine ca rezultat o mulţime M, numită REUNIUNE, care are ca elemente toate elementele, comune şi necomune, ale mulţimilor date, luate câte o singură dată. Se scrie:

$$\mathbf{M_1 \cup M_2 = M}$$

Exemplu:

$$\{a, b, c, x, y, z\} \cup \{b, c, d, x, v, w\} = \{a, b, c, d, x, y, z, v, w\}$$

OBS.: mulţimea vidă Ø este element neutru pentru operaţia de reunire,

$M \cup Ø = Ø \cup M = M$, pentru orice M (vezi pag. 16).

– Operaţia de **INTERSECTARE**: operaţia prin care, din două mulţimi date, M_1 şi M_2, se obţine ca rezultat o mulţime M, numită INTERSECŢIE, care are ca elemente elementele comune ale mulţimilor date, luate câte o singură dată. Se scrie:

$$\mathbf{M_1 \cap M_2 = M}$$

Exemplu:

$$\{a, b, c, x, y, z\} \cap \{b, c, d, x, v, w\} = \{b, c, x\}$$

Mulţimi disjuncte (fie ele M_1 şi M_2) – nu au niciun element comun; rezultă că intersecţia lor este mulţimea vidă:

$$M_1 \cap M_2 = Ø$$

PRODUS CARTEZIAN a două mulţimi date, A şi B: o mulţime M ale cărei elemente sunt perechi formate din elemente aparţinând, respectiv, mulţimilor date. Se scrie: $\mathbf{A \times B = M}$

Dacă $a \in A$ şi $b \in B$ rezultă $(a, b) \in M$

De notat: în perechile (a, b), elementele a şi b sunt ordonate strict în ordinea indicată de ordinea factorilor din produsul cartezian; inversarea ordinii factorilor conduce la formarea altor perechi, (b, a), diferite de perechile iniţiale, deci produsul cartezian rezultat este diferit în consecinţă, având alte elemente. Prin urmare, produsul cartezian este (în general) necomutativ.

Un exemplu elocvent de produs cartezian este mulţimea M a coordonatelor (x, y) ale punctelor din planul format de axele absciselor, $x \in X$, şi ordonatelor, $y \in Y$, cu $M = X \times Y$ şi $(x, y) \in M$.

Corespondenţa / punerea în corespondenţă a două mulţimi (M_1 şi M_2)

– corespondenţă UNIVOCĂ: fiecărui element din M_1 îi corespunde, prin „ataşare”, un element din M_2, dar nu şi reciproc;
– corespondenţă BI-UNIVOCĂ: corespondenţă UNIVOCĂ în ambele sensuri, pentru elementele celor două mulţimi.

MULŢIMI NUMERICE: mulţimi ale căror elemente sunt numere.

– Mulţimea numerelor **NATURALE**, notată **N**: mulţimea, definită extensiv, a numerelor 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

Se notează **N*** mulţimea **N** din care se exclude numărul 0; este mulţimea numerelor naturale nenule

$$\mathbf{N^*} = \mathbf{N} - \{0\} \qquad \mathbf{N^*} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

– Mulţimea numerelor **ÎNTREGI**, notată **Z**: mulţimea numerelor naturale reunită cu mulţimea numerelor algebrice (cu „semn”, pozitive sau negative) a căror valoare absolută este mulţimea **N**.

– Mulţimea numerelor **RAŢIONALE**, notată **Q**: mulţimea numerelor care se pot scrie sub forma $\frac{a}{b}$, cu a şi b numere întregi ($b \neq 0$).
Altfel, numere iraţionale.

– Mulţimea numerelor **REALE**, notată **R**: mulţimea numerelor care nu conţin „unitatea imaginară” / radicali de indice par din numere negative.
Este reuniunea numerelor raţionale cu numerele iraţionale.
Se reprezintă prin puncte pe axa numerelor reale.

– Mulţimea numerelor **COMPLEXE**, notată **C**: mulţimea numerelor care acceptă radicali de indice par şi impar oricare ar fi semnul algebric al expresiei de sub radical / admit „unitatea imaginară” (vezi Cap. 3).
Este reuniunea numerelor reale cu numerele imaginare.
Se reprezintă prin puncte în planul complex.
Avem relaţiile de incluziune:

$$\mathbf{N^* \subset N \subset Z \subset Q \subset R \subset C}$$

Mulţimile numerelor FRACŢIONARE, IRAŢIONALE, IMAGINARE constituie mulţimile complementare ale, respectiv, mulţimilor numerelor ÎNTREGI, RAŢIONALE, REALE, (ale căror definiţii le contrazic), faţă de mulţimile de nivel imediat superior în relaţiile de incluziune de mai sus; nu au simboluri / notaţii proprii consacrate.

MULŢIME ORDONATĂ: o mulţime nevidă, fie ea M, pe care (între elementele căreia) se defineşte o relaţie binară „ ≤ ”, zisă de ordine dacă, pentru orice a, b, c ∈ M, sunt verificate următoarele condiţii: reflexivitatea (a ≤ a), antisimetria (a ≤ b şi b ≤ a implică a = b) şi tranzitivitatea (a ≤ b şi b ≤ c implică a ≤ c).

Mulţimea **N** a numerelor naturale este o mulţime infinită şi ordonată.
(Uzual, se consideră ca fiind mulţime ordonată o mulţime nevidă ale cărei elemente sunt puse în corespondenţă bi-univocă cu mulţimea **N** a numerelor naturale, sau cu o submulţime finită şi ordonată a acesteia).

Relaţie reflexivă, antisimetrică, tranzitivă

În general, într-o mulţime nevidă, fie ea M, o relaţie, notată aici „**rel**”, între elementele sale este:

– reflexivă, dacă a **rel** a, pentru orice a ∈ M
– antisimetrică, dacă a **rel** b şi b **rel** a implică a = b, pentru orice a, b ∈ M
– tranzitivă, dacă a **rel** b şi b **rel** c implică a **rel** c, pentru orice a, b, c ∈ M

Observaţie: a, b, c pot fi considerate mulţimi, cu M reuniunea lor, caz în care proprietăţile de mai sus se menţin ca proprietăţi ale unor relaţii între mulţimi (vezi relaţia de INCLUZIUNE, pag. 9).

NOTĂ

Conceptul de mulţime este un concept de bază şi esenţial pentru definirea fundamentelor matematicii (vezi şi pag. 17).

OPERAŢII ALGEBRICE

În sens matematic, o operaţie – definită ca lege de compoziţie pe o mulţime dată – este procedeul, strict şi complet definit, prin care, pornind de la numere (expresii) date, se generează un număr (expresie), direct şi exclusiv legat de numerele (expresiile) date prin însuşi procedeul care l-a generat.
Se scrie:

A § B = C

unde:

A, B numerele (expresiile) date – OPERANZI
§ simbolul operaţiei, indicând univoc fiecare operaţie concretă (+, -, x, :, etc)
C numărul (expresia) generat prin operaţie – REZULTAT

Operaţia asociază rezultatul la operanzi daţi, după un procedeu determinat, bine şi strict definit.
(Într-o exprimare simplistă, operaţia este „reţeta” prin care se obţine REZULTATUL din OPERANZI).

Operaţiile se diferenţiază în funcţie de ceea ce se urmăreşte prin efectuarea lor, cu consecinţe directe asupra procedeului în sine, a valorii rezultatului şi, evident, a simbolului (particulare fiecărei operaţii).

A defini o operaţie înseamnă de fapt a defini procedeul practic de obţinere a rezultatului său, din operanzi daţi.

Primele operaţii matematice au fost operaţiile aritmetice, apărute ca şi corespondente ale unor operaţii fizice cu obiecte concrete; introducerea numerelor, care caracterizează sub aspect cantitativ obiecte sau grupări de obiecte, a transformat operaţiile cu obiecte fizice în operaţii cu echivalentele cantitative ale acestora, adică în operaţii matematice cu numere, ignorând natura fizică a obiectelor şi deci generalizând, prin abstractizare, operaţiile fizice.

Operaţiile matematice fac mult mai comodă şi substituie efectuarea operaţiilor fizice când este urmărit doar aspectul cantitativ; în plus, ele devin operaţii de sine stătătoare cu numere, deci cu orice poate fi reprezentat sub formă de număr.

Se realizează astfel abstractizarea şi generalizarea, prin ignorarea – în operaţie – a naturii fizice a ceea ce e reprezentabil prin numere sau un echivalent convenit al acestora; se operează cu numere pur şi simplu, ceea ce a permis matematicii să se dezvolte ca teorie abstractă independentă care a creat astfel instrumente utile şi valorificabile în domeniul care a născut-o de fapt, domeniul fizic, practic, concret.

Matematica este o ştiinţă care utilizează, în esenţă, două instrumente fundamentale:

– raţionamentul, bazat pe principiile logicii;
– calculul, bazat pe operaţiile matematice.

Dacă raţionamentul este „împrumutat” din logică (ştiinţă cu care matematica este esenţial înrudită), calculul este un produs propriu al matematicii, prin însăşi definirea şi utilizarea operaţiilor matematice.

În definirea operaţiilor matematice se respectă strict legile logicii, legi care fac de fapt legătura corectă cu realitatea fizică, pe care operaţiile trebuie să o respecte şi să o reflecte.

Matematica realizează astfel legătura bi-sens dintre realul fizic concret şi „realul” abstract (având, ca fundamentare şi elemente de legătură, principiile logicii): se „inspiră” din concret, „creează” în abstract şi valorifică în acelaşi concret fizic de la care a pornit (vezi aplicaţiile matematicii în fizică).

Matematica nu este abstractă! Abstractul este doar forma şi mediul în care matematica produce şi evoluează, dar, dintotdeauna, matematica a plecat de la şi s-a întors – prin ceea ce a produs – la concretul fizic, fiind astfel un exponent al gândirii şi imaginaţiei intelectuale precum şi, poate, cel mai productiv instrument în evoluţia, dirijată de om, a lumii fizice.

Definirea operaţiilor, ca instrumente de calcul, este un proces creativ; calculul, care înseamnă efectuarea operaţiilor, este un proces „mecanic”, de uzură, şi este practic preluat de mijloace de calcul mecanice sau electronice, auxiliare (dar produse ale) inteligenţei umane.

Operaţia este definită ca lege de compoziţie pe o mulţime dată.
Considerând o mulţime nevidă M şi două elemente oarecare ale acesteia, $m_1 \in M$ şi $m_2 \in M$, o operaţie § pe M asociază fiecărei perechi (m_1, m_2) un element $r = m_1 \S m_2$; $r \in M$ şi este rezultatul operaţiei § asupra operanzilor m_1 şi m_2.

Mulţimea perechilor (m_1, m_2) este însă produsul cartezian $M \times M$ (vezi pag. 10).

Rezultă atunci că o operaţie algebrică § pe mulţimea M este o funcţie definită pe produsul cartezian $M \times M$, şi cu valori în M (vezi şi Cap. 6):

$$\S : M \times M \to M$$

Această funcţie asociază fiecărei perechi $(m_1, m_2) \in M \times M$ elementul unic $(m_1 \S m_2) \in M$.

PROPRIETĂŢI GENERALE ALE OPERAŢIILOR

Se spune despre o operaţie § (pe M) că este:

– **ASOCIATIVĂ**, dacă o parte din operanzi pot fi „asociaţi” în operare şi înlocuiţi prin rezultatul aceleaşi operaţii efectuate asupra operanzilor respectivi, adică, pentru orice $a, b, c \in M$:

$$(a \S b) \S c = a \S (b \S c) = a \S d, \text{ cu } d = b \S c$$

– **COMUTATIVĂ**, dacă rezultatul operaţiei nu se schimbă schimbând ordinea operanzilor în operaţie („comutându-le” poziţia), adică, pentru orice $a, b \in M$:

$$a \S b = b \S a$$

Se spune despre o operaţie $\S_1$ (pe M) că este

– **DISTRIBUTIVĂ** faţă de o operaţie $\S_2$ (pe M) dacă, pentru orice $a, b, c \in M$:

$$a \S_1 (b \S_2 c) = (a \S_1 b) \S_2 (a \S_1 c) \qquad \text{(distributivă „la stânga”)}$$

şi

$$(b \S_2 c) \S_1 a = (b \S_1 a) \S_2 (c \S_1 a) \qquad \text{(distributivă „la dreapta”)}$$

(Operaţia $\S_1$ se „distribuie” asupra operanzilor operaţiei $\S_2$)

Exemplu:

operaţia de înmulţire este distributivă faţă de operaţia de adunare, adică avem

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

şi

$$(b + c) \times a = b \times a + c \times a$$

Fiecare operaţie are reguli de efectuare şi simbol proprii; de asemenea, are proprietăţi, specifice sau comune unui grup de operaţii, şi restricţii de efectuare / valabilitate, restricţiile decurgând în principal din condiţiile de existenţă impuse rezultatului şi / sau operanzilor (adică din condiţiile care, într-un context dat, fac posibilă efectuarea operaţiei).

ELEMENT NEUTRU ($\mathbf{e}$) al unei operaţii § pe o mulţime M:

dacă există, este un element $\mathbf{e} \in M$, unic, astfel încât, pentru orice $m \in M$, să avem

$$m \S \mathbf{e} = \mathbf{e} \S m = m$$

ELEMENT SIMETRIZABIL. SIMETRICUL UNUI ELEMENT

Considerând o operaţie §, pe o mulţime M şi cu elementul neutru $\mathbf{e}$, un element $m \in M$ este simetrizabil faţă de operaţia § dacă există un element $m_s \in M$, numit „simetricul" lui m faţă de operaţia §, astfel încât

$$m \S m_s = m_s \S m = \mathbf{e}$$

De notat: dacă există $\mathbf{e}$, atunci $\mathbf{e}_s = \mathbf{e}$

Exemple:

Operaţia algebrică de

– ÎNSUMARE

$$\mathbf{e} = \mathbf{0} \qquad X + \mathbf{0} = \mathbf{0} + X = X$$

$$X_s = -X \qquad X + (-X) = (-X) + X = \mathbf{0}$$

$(-X)$ este „opusul" lui X

– ÎNMULŢIRE
(RIDICARE LA PUTERE)

$$\mathbf{e} = \mathbf{1} \qquad Y \times \mathbf{1} = \mathbf{1} \times Y = Y$$

$$Y^0 = \mathbf{e} = 1$$

$$Y_s = \frac{1}{Y} = Y^{-1} \qquad Y \times \frac{1}{Y} = \frac{1}{Y} \times Y = \mathbf{1}$$

$\frac{1}{Y} = Y^{-1}$ este „inversul" lui Y $\quad (Y^1 \times Y^{-1} = Y^0 = \mathbf{1})$

– REUNIRE

$$\mathbf{e} = \varnothing \qquad M \cup \varnothing = \varnothing \cup M = M$$

(cu restricţiile de existenţă X_s, Y_s în mulţimile asociate operaţiilor;
vezi şi pag. 17, grup / monoid).

Asocierea dintre conceptul de operaţie algebrică şi conceptul de mulţime constituie baza de definire, axiomatică, a STRUCTURILOR ALGEBRICE, fundamentale în matematică (şi magnifice prin „complexitatea" şi universalitatea simplităţii lor – Niels Henrik ABEL, 1802-1829 şi Evariste GALOIS, 1811-1832).
Structura algebrică (în speţă, teoria grupurilor) constituie conceptul care a permis tranziţia de la algebra tradiţională, care se ocupa doar de numere, spre o generalizare care implică şi permite operaţii între elemente de orice fel. (O reconfirmare a „realismului", înalt abstractizat, al matematicii! Vezi pag. 14 şi Bibliografia [2]).

Tratarea exhaustivă a acestui subiect nu intră în obiectivul lucrării de faţă. Vom reaminti însă definiţiile:

STRUCTURĂ ALGEBRICĂ – un cuplu format dintr-o mulţime nevidă, fie ea M, şi (cel puţin) o operaţie algebrică, fie ea §, pe această mulţime, operaţie care satisface una sau mai multe axiome.
Se scrie: (M, §)

– SEMIGRUP: o structură algebrică (M, §) în care operaţia § satisface axioma, unică: 1) este asociativă (vezi pag. 15).

Dacă, suplimentar, operaţia § este şi comutativă, semigrupul se numeşte semigrup comutativ.

– MONOID: o structură algebrică (M, §) în care operaţia § satisface două axiome: 1) este asociativă; 2) are element neutru (vezi pag. 16).

Dacă, suplimentar, operaţia § este şi comutativă, monoidul se numeşte monoid comutativ.

Exemple: $(\mathbf{N}, +)$; $(\mathbf{N^*}, \times)$; $(\mathbf{Z}, \times)$; $(\mathbf{Q}, \times)$

– GRUP: o structură algebrică (M, §) în care operaţia § satisface trei axiome: 1) este asociativă; 2) are element neutru; 3) orice element $m \in M$ este simetrizabil faţă de operaţia § (vezi pag. 16).

Dacă, suplimentar, operaţia § este şi comutativă, grupul se numeşte grup comutativ (sau grup abelian).

Exemple: $(\mathbf{Z}, +)$; $(\mathbf{Q}, +)$

Ridicarea la putere; puterea

DEFINIŢII

Operaţia de RIDICARE LA PUTERE derivă din operaţia de înmulţire, ca un caz particular al acesteia când factorii sunt identici, şi presupune efectuarea produsului:

$$(1) \quad P = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ factori identici}}$$

(numărul a înmulţit cu el însuşi de n ori)

Se spune: „ridicarea numărului a la puterea n" şi se scrie, ca simbol al operaţiei de ridicare la putere, a^n.

Simbolul a^n se numeşte PUTERE, cu:

a – BAZA puterii
n – EXPONENTUL puterii

şi indică efectuarea operaţiei de ridicare la putere:

Simbol		Operaţie
a^n	⟶	RIDICARE LA PUTERE
PUTERE		

Date: a, n ----------▶ RIDICARE LA PUTERE ----------▶ rezultă: P
(vezi şi pag. 29)

Numărul P (valoarea produsului (1)) este rezultatul operaţiei de ridicare la putere şi reprezintă valoarea numerică a expresiei algebrice PUTERE, a^n, pentru a şi n date.

NOTA

Puterea naturală a^n ($a^n = a \times a \times \ldots \times a$, de n ori) a unui element a este un element care aparţine monoidului multiplicativ $(M, \times)$, cu $a \in M$ şi $n \in \mathbf{N^*}$ (puterea a n-a a elementului a).

Vorbim despre puteri naturale ($n \in \mathbf{N^*}$) ale unui element, sau puteri întregi ($n \in \mathbf{Z}$) ale unui element simetrizabil (inversabil) în monoid / grup.
(Vezi pag. 16 şi 17)

Fie expresia $C \times a^n$,
în care se defineşte C ca fiind COEFICIENTUL puterii a^n.

Expresiile $C_1 \times a^n$ şi $C_2 \times a^n$ sunt PUTERI ASEMENEA, deoarece au, independent de coeficient:
– aceeaşi bază
– acelaşi exponent.

EGALITĂŢI

$a^m = b^n$ doar dacă au aceeaşi valoare numerică, adică, simultan,

$$a^m = P \text{ şi } b^n = P$$

OBS.: nu rezultă, cu necesitate, că $a = b$ şi $m = n$

$a^m = a^n$ implică $m = n$
$a^n = b^n$ implică $a = b$

$a^0 = 1$ pentru orice a
$a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ pentru orice $a \neq 0$

(Vezi şi pag. 16)

OPERAŢII

Avem:

$$C_1 \times (C_2 \times a^n) = (C_1 \times C_2) \times a^n = C \times a^n, \text{ cu } C = C_1 \times C_2$$

Exemple: $-3 \times (C \times a^n) = (-3 \times C) \times a^n$;
$-3(12a^n) = -36a^n$; $\dfrac{12a^n}{3} = \dfrac{1}{3}(12a^n) = 4a^n$

Adunare / scădere (însumare algebrică): posibilă doar între puteri / termeni asemenea şi se efectuează prin însumarea algebrică a coeficienţilor acestora, puterea comună păstrându-se în suma algebrică rezultat:

$$\mathbf{C_1\, a^n \pm C_2\, a^n} = C_1\, a^n + (\pm\, C_2)\, a^n = \mathbf{[C_1 + (\pm\, C_2)]\, a^n}$$

Exemplu: $3\, a^5 - 4\, a^5 = 3\, a^5 + (-4)\, a^5 = [3 + (-4)]\, a^5 = -\, a^5$

Înmulţire / împărţire – posibile doar între puteri cu aceeaşi bază şi se efectuează:

înmulţirea – prin înmulţirea coeficienţilor şi însumarea exponenţilor

$$\mathbf{C_1\, a^m \times C_2\, a^n = (C_1 \times C_2)\, a^{m+n}}$$

Exemple: $-\, a^3 \times 4\, a^5 = -\, 4\, a^8$; $a^7 = a^5 \times a^2 = a^4 \times a^3 = a^4 \times a^2 \times a$

împărţirea – prin împărţirea coeficienţilor şi scăderea exponenţilor

$$\mathbf{C_1\, a^m : C_2\, a^n = (C_1 : C_2)\, a^{m-n}}$$

Exemple: $6\, a^8 : (-2)\, a^5 = -\, 3\, a^3$; $a^3 = a^5 : a^2 = a^{10} : a^7$

în ambele cazuri păstrându-se, în rezultat, baza comună a operanzilor.

Ridicarea la putere a unei puteri – caz particular de înmulţire de puteri; se efectuează prin reproducerea bazei şi înmulţirea exponenţilor:

$$(\, \mathbf{a^m}\,)^{\mathbf{n}} = \underbrace{a^m \times a^m \times .... \times a^m}_{n \text{ factori identici}} = \underbrace{a^{m + ... + m}}_{n \text{ termeni identici}} = \mathbf{a^{n \times m}}$$

Exemple: $(a^4)^3 = (a^6)^2 = (a^2)^6 = (a^3)^4 = a^{12}$; $(a^2)^{-3} = a^{-6} = \dfrac{1}{a^6}$

Extragerea de rădăcină; radicalul

DEFINIŢII

Operaţia de EXTRAGERE A RĂDĂCINII DE ORDINUL n este operaţia inversă operaţiei de RIDICARE LA PUTERE CU EXPONENT n; permite determinarea bazei a a unei puteri când se cunoaşte valoarea P a puterii şi exponentul n al acesteia ($a^n = P$).

Se spune: „extragerea rădăcinii de ordinul n din numărul P" şi se scrie, ca simbol al operaţiei de extragere a rădăcinii, $\sqrt[n]{P}$.

Simbolul $\sqrt[n]{P}$ se numeşte RADICAL de ordinul / indice n din P, cu:

n – INDICELE radicalului
P – EXPRESIA DE SUB radical

şi indică efectuarea operaţiei de extragere a rădăcinii:

Simbol Operaţie

$\sqrt[n]{P}$ ⟶ EXTRAGERE DE RĂDĂCINĂ

RADICAL

Date: a, n ----------▶ RIDICARE LA PUTERE ----------▶ rezultă: P
Date: P, n ----------▶ EXTRAGERE DE RĂDĂCINĂ ----------▶ rezultă: a
(vezi şi pag. 29)

Considerând numărul P ca valoare numerică a unei puteri cu baza a şi exponent n, $P = a^n$, valoarea numerică asociată simbolului RADICAL DE ORDINUL / INDICE n DIN P este numărul a, adică, prin definiţie:

$$\sqrt[n]{P} = a \quad \text{astfel încât (deoarece)} \quad a^n = P$$

Rezultă $\sqrt[n]{a^n} = a$ şi $(\sqrt[n]{P})^n = P$

Numărul a este rezultatul operaţiei de extragere a rădăcinii, şi reprezintă valoarea numerică a expresiei algebrice RADICAL, $\sqrt[n]{P}$, pentru P şi n date. Se numeşte „rădăcină de ordinul n din P” (de unde provine şi denumirea operaţiei).

<u>De notat</u> n este exponent la putere şi indice la radical; permite determinarea bi-sens, prin operaţiile corespunzătoare:

$$a \;\overset{a^n = P}{\longrightarrow}\; P$$
$$a \;\overset{n}{\longleftarrow}\; P$$
$$a = \sqrt[n]{P}$$

Convenţional, RADICALUL, ca simbol al operaţiei inverse operaţiei de ridicare la putere, se mai simbolizează şi printr-o PUTERE cu exponent fracţionar:

$$(1) \qquad \sqrt[n]{P} = P^{\frac{1}{n}} \qquad \left(\frac{1}{n} \text{ este inversul lui } n\right)$$

În general, $\sqrt[n]{P^m} = P^{\frac{m}{n}}$, deci radicalii se pot trata şi ca puteri.

Expresiile algebrice care conţin radicali sunt expresii algebrice iraţionale (ca şi radicalii).

CONJUGATA unei expresii iraţionale date este expresia care, prin înmulţire cu expresia dată, generează o expresie algebrică raţională (fără radicali), operaţia respectivă numindu-se „raţionalizare” (pag. 24).

COEFICIENT C al unui radical – se defineşte ca la puteri,

$$C\sqrt[n]{P}$$

Radicali ASEMENEA sunt radicalii care au, independent de coeficient:

– acelaşi indice
– aceeaşi expresie de sub radical.

<u>Notă</u>: dacă indicele $n = 2$, nu se mai scrie explicit în simbolul radicalului.

<u>EGALITĂŢI</u>

Radicali EGALI – doar dacă au aceeaşi valoare numerică.

În particular:

$$\sqrt[m]{P} = \sqrt[n]{P} \quad \text{implică } m = n$$
$$\sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{B} \quad \text{implică } A = B$$

<u>OPERAŢII</u>

<u>Adunare / scădere</u> (însumare algebrică): ca la puteri; posibilă doar între radicali asemenea.

<u>Înmulţire / împărţire</u>: posibile doar între radicali cu acelaşi indice şi se efectuează prin, respectiv, înmulţirea / împărţirea expresiilor de sub radicali, păstrându-se indicele comun.

<u>Ridicarea la putere</u> a unui radical: se ridică la putere expresia de sub radical.

(Revine la ridicarea la putere a unei puteri – vezi (1), pag. 21).

Avem:

$$(\sqrt[n]{P})^m = (P^{\frac{1}{n}})^m = P^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{P^m}$$

Implicit, $$(\sqrt[n]{A^m})^p = \sqrt[n]{A^{mp}}$$

<u>Radicalul</u> unui radical – este un radical al cărui indice este produsul indicilor radicalilor:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{P}} = \sqrt[mn]{P}$$

(se deduce din (1), pag. 23, operând cu radicalii sub formă de puteri).

Aducerea radicalilor la acelaşi indice: revine la aducerea la numitor comun a unor fracţii (care sunt exponenţii radicalilor scrişi ca puteri).

Fie radicalii (cu indicii $m \neq n$):

$$\sqrt[m]{P} = P^{\frac{1}{m}} \quad \text{şi} \quad \sqrt[n]{P} = P^{\frac{1}{n}}$$

Avem:

$$\frac{1}{m} = \frac{n}{\mathbf{mn}} \quad \text{şi} \quad \frac{1}{n} = \frac{m}{\mathbf{mn}}$$

deci $\sqrt[m]{P} = \sqrt[mn]{P^n}$ şi $\sqrt[n]{P} = \sqrt[mn]{P^m}$

Raţionalizări (vezi şi pag. 22)

Se utilizează, în principal, pentru raţionalizarea numitorilor iraţionali de fracţii, prin amplificarea fracţiei cu conjugata numitorului.

Se vor avea în vedere identităţile (a şi/sau b considerându-se radicali):

1. $(a \pm b)(a \mp b) \equiv a^2 - b^2$, pentru radicali de indice **2**

(Expresiile $a + b$ şi $a - b$ sunt, fiecare, conjugata celeilalte)

Exemple: $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1 \quad (\in \mathbf{Q})$

$(\sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{3} - \sqrt{5}) = 3 - 5 = -2 \quad (\in \mathbf{Q})$

2. $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) \equiv a^3 \pm b^3$, pentru radicali de indice **3**

(Expresiile $a \pm b$ şi $a^2 \mp ab + b^2$ sunt, fiecare, conjugata celeilalte)

Exemple: $(2 - \sqrt[3]{5})(4 + 2\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{25}) = 8 - 5 = 3 \quad (\in \mathbf{Q})$

$(2 + \sqrt[3]{5})(4 - 2\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{25}) = 8 + 5 = 13 \quad (\in \mathbf{Q})$

De notat**:**

în mulţimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale şi pentru indicele n număr par,

radicalul $\sqrt[n]{A}$ impune condiţia de existenţă $A \geq 0$;

(din $\sqrt[n]{A} = B$ rezultă $A = B^n$ dar, cu n par, $B^n \geq 0$ pentru orice $B \in \mathbf{R}$).

Logaritmarea; logaritmul

DEFINIŢII

Operaţia de LOGARITMARE ÎN BAZA a permite determinarea exponentului, n, al unei puteri când se cunosc valoarea puterii, P, şi baza acesteia, a ($a^n = P$).

Se spune: „logaritmarea numărului P în baza a ” şi se scrie, ca simbol al operaţiei de logaritmare, $\log_a P$.

Simbolul $\log_a P$ se numeşte LOGARITM în baza a din P cu:

a – BAZA logaritmului.

P – ARGUMENTUL logaritmului / EXPRESIA logaritmată.

şi indică efectuarea operaţiei de logaritmare:

Simbol Operaţie

$\log_a P \longrightarrow$ LOGARITMARE

LOGARITM

Date: a, n ----------▶ RIDICARE LA PUTERE ----------▶ rezultă: P

Date: P, a ------------------▶ LOGARITMARE ------------------▶ rezultă: n

(vezi şi pag. 29)

Considerând numărul P ca valoare numerică a unei puteri cu baza a şi exponent n, $P = a^n$, valoarea numerică asociată simbolului LOGARITM ÎN BAZA a DIN P este numărul n adică, prin definiţie,

$$\log_a P = n \quad \text{astfel încât (deoarece)} \quad a^n = P$$

Cu alte cuvinte, logaritmul unui număr este exponentul puterii la care trebuie ridicată baza logaritmului pentru a obţine acel număr, adică

$$A^{\log_A B} = B$$

Exemplu: $5^{\log_5 99} = 99$

Numărul n este rezultatul operaţiei de logaritmare, simbolizată prin logaritm, şi reprezintă valoarea numerică a expresiei algebrice LOGARITM, $\log_a P$, pentru P şi a date.

Din definiţia logaritmului rezultă că:

– nu există logaritmi în baza 1;
(cum $1^n = 1$ pentru orice n, ar rezulta că $P = 1$ pentru orice P)
– nu există logaritmi în baza 0;
(cum $0^n = 0$ pentru orice n, ar rezulta că $P = 0$ pentru orice P)
– nu există logaritmi în bază negativă.

<u>Concluzie</u>: baza oricărui logaritm este strict pozitivă şi diferită de 1:

$$\mathbf{a > 0} \text{ şi } \mathbf{a \neq 1}$$

– nu există logaritmi ai numerelor negative
(dacă $a > 0$, $P = a^n > 0$ pentru orice n finit)
– nu există logaritm, cu valoare finită, a numărului 0
($P = 0$ implică $n \to \pm\infty$).

<u>Concluzie</u>: argumentul oricărui logaritm este strict pozitiv:

$$\mathbf{P > 0}$$

<u>EGALITĂŢI</u>

Logaritmi egali – doar dacă au aceeaşi valoare numerică.
În particular:

$$\log_a P = \log_b P \quad \text{implică} \quad a = b;$$
$$\log_a A = \log_a B \quad \text{implică} \quad A = B;$$

<u>OPERAŢII</u>

Pentru orice bază a ($a > 0$ şi $a \neq 1$), avem:

$$\mathbf{\log_a 1 = 0} \quad (a^0 = 1 \text{ pentru orice } a)$$
$$\mathbf{\log_a a = 1} \quad (a^1 = a \text{ pentru orice } a)$$

$$\mathbf{\log_a (A \times B) = \log_a A + \log_a B}$$

deci $\mathbf{\log_a A^m = m \log_a A}$ $\quad (\log_a A^m = \log_a \underbrace{(A \times A \times \ldots \times A)}_{\text{de } m \text{ ori}})$

şi $\mathbf{\log_a \sqrt[n]{A^m} = \frac{m}{n} \log_a A}$ $\quad$ (radicalul scris ca putere: $\sqrt[n]{A^m} = A^{\frac{m}{n}}$)

$$\mathbf{\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B}$$

<u>SCHIMBAREA BAZEI LOGARITMILOR</u>

Este utilizată pentru aducerea unor logaritmi la aceeaşi bază, în vederea efectuării de operaţii sau pentru comparări valorice (de tip „>" sau „<").

Fie: a – baza „veche" (iniţială)
b – baza „nouă" (în care se doreşte trecerea, prin schimbarea bazei).
Avem relaţia de transformare <u>în</u> logaritmi în baza „b", <u>din</u> logaritmi în baza „a":

$$(1) \quad \log_{\mathbf{b}} P = \frac{1}{\log_{\mathbf{a}} \mathbf{b}} \times \log_{\mathbf{a}} P$$

baza „nouă" **b** ¦ baza „veche" **a**

unde expresia $\frac{1}{\log_a b}$ se numeşte MODUL DE TRANSFORMARE, deoarece „transformă" logaritmul, prin înmulţire cu acesta, din baza „veche" în baza „nouă", păstrându-i argumentul neschimbat.
Dacă în (1) considerăm/facem $P = a$, rezultă $\log_b a = 1 / \log_a b$, adică, pentru orice $a, b > 0$ şi $a, b \neq 1$ avem:

$$(\log_{\mathbf{a}} \mathbf{b}) \times (\log_{\mathbf{b}} \mathbf{a}) = 1$$

În funcţie de valoarea bazei, logaritmii se numesc :
– cu baza = 10 logaritmi zecimali (vulgari), notaţi $\lg$
– cu baza = numărul „e" logaritmi naturali (neperieni, Neper), notaţi $\ln$

FUNCŢIA LOGARITMICĂ
(Vezi şi Cap. 6)

$$y = f(x) = \log_a x \qquad (x > 0;\ a > 0 \text{ şi } a \neq 1)$$

Se comportă diferit (şi va fi tratată ca atare) depinzând de valoarea bazei a:

$\mathbf{0 < a < 1}$ funcţie strict **descrescătoare**;
$\mathbf{a > 1}$ funcţie strict **crescătoare**,

afectând în consecinţă şi alura graficului funcţiei, deci reprezentarea sa grafică. (Se reaminteşte că, în orice caz, $a > 0$ şi $a \neq 1$).

Acest comportament se va avea în vedere şi la compararea valorică a unor logaritmi daţi care, în prealabil, au fost aduşi la aceeaşi bază.

Exemplu:
ce relaţie valorică (>, <) există între

$\log_a 3$ şi $\log_a 5$?

– dacă $0 < a < 1$, $\log_a 3 > \log_a 5$
– dacă $a > 1$, $\log_a 3 < \log_a 5$

NOTĂ: Baza a este un parametru şi nu o variabilă a funcţiei logaritmice.

Calculul valoric al logaritmilor. Tabele de logaritmi zecimali

Pentru valoarea numerică b a logaritmului unui număr dat x ($x > 0$), $\lg x = b$, se definesc:
caracteristica – partea întreagă:
– dacă x este întreg, caracteristica este (numărul cifrelor lui x) - 1;
– dacă $x < 1$, caracteristica este ordinul primei cifre semnificative (nenule);
mantisa – partea zecimală:
– precalculată şi obţinută din tabele.

Calculul valoric al unor logaritmi în alte baze decât baza 10 presupune schimbarea prealabilă a bazei în baza 10 şi apoi calculul uzând de cele de mai sus.

De notat

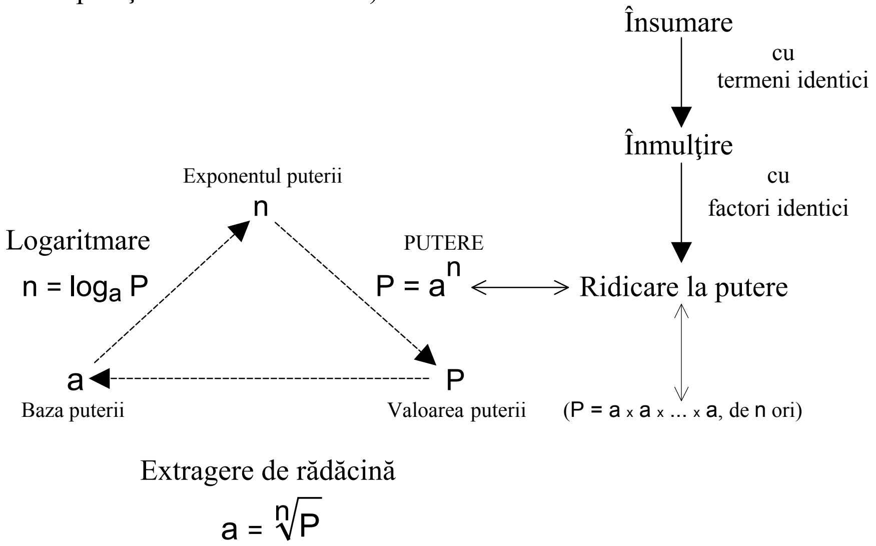
În aritmetică, operaţiile de bază sunt adunarea, cu scăderea ca operaţie inversă a adunării.

În algebră, operaţia de bază este însumarea algebrică; prin introducerea numerelor algebrice (cu semn algebric, + sau -), operaţia de scădere devine o operaţie de adunare (însumarea algebrică) între un număr pozitiv şi un număr negativ: $a - b = a + (-b)$; în general,

$$a - (\pm b) = a + (\mp b)$$

Practic, însumarea algebrică a două numere de semn contrar revine la efectuarea unei operaţii aritmetice de scădere între valorile lor absolute (valoarea mai mică din valoarea mai mare), valori care sunt numere aritmetice, iar semnul rezultatului este semnul ataşat celei mai mari dintre aceste valori.

În ambele cazuri, celelalte operaţii sunt operaţii derivate din operaţiile de bază, ca şi cazuri particulare ale acestora sau ale subsecventelor acestora.
(Înmulţirea este o însumare repetată, cu termeni identici; împărţirea este o scădere repetată, deci tot o însumare, algebrică; ridicarea la putere este o înmulţire, cu factori identici, iar extragerea de rădăcină şi logaritmarea sunt operaţii adiacente acesteia)



Exemple de aplicaţii

1) $-2a^2 + 3b^2 + 3a^2 - 8b^2 - 4a^2 - 9b^2 =$

$[-2a^2 + 3a^2 + (-4a^2)] + [3b^2 + (-8b^2) + (-9b^2)] =$

$= \quad (-2 + 3 - 4)a^2 \quad + \quad (3 - 8 - 9)b^2 \quad = -3a^2 - 14b^2$

2) $(3a^2)\,[(a^3)^4 + \frac{1}{3a} + (2b^2)^2 + \frac{1}{a^5} + \frac{4}{3a^2}] =$

$= 3a^2 a^{12} + a^2 a^{-1} + 12a^2 b^4 + 3a^2 a^{-5} + 4a^2 a^{-2} =$

$= 3a^{14} + a + 12a^2 b^4 + \frac{3}{a^3} + 4$

3) $\sqrt[4]{a^{26}} = \sqrt[4]{a^{24+2}} = a^{\frac{24+2}{4}} = a^{6+\frac{1}{2}} = a^6\, a^{\frac{1}{2}} = a^6\sqrt{a}$

4) $\sqrt[3]{a\sqrt{a}} = \sqrt[3]{\sqrt{a^3}} = \sqrt[6]{a^3} = a^{\frac{3}{6}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

5) $\sqrt{18} + \sqrt{12} + \sqrt{32} + \sqrt{48} =$

$= \sqrt{9 \times 2} + \sqrt{4 \times 3} + \sqrt{16 \times 2} + \sqrt{16 \times 3} =$

$= 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 4\sqrt{2} + 4\sqrt{3} = 7\sqrt{2} + 6\sqrt{3}$

6) $\frac{2}{2-\sqrt{3}} = \frac{2(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{2(2+\sqrt{3})}{4-3} = 2(2+\sqrt{3})$

7) $\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{(2\sqrt{2}-\sqrt{3})(2\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(2\sqrt{2}+\sqrt{3})(2\sqrt{2}-\sqrt{3})} = \frac{8-4\sqrt{6}+3}{8-3} = \frac{11-4\sqrt{6}}{5}$

8) $\log_a (a^6\sqrt{a}) = \log_a a^6 + \log_a \sqrt{a} = 6\log_a a + \log_a a^{\frac{1}{2}} =$

$= 6\log_a a + \frac{1}{2}\log_a a = \frac{13}{2}\log_a a = \frac{13}{2}$

9) $\log_a \frac{a^3b^5}{\sqrt[3]{ab}} = \log_a a^3b^5 - \log_a \sqrt[3]{ab} = 3 + \log_a b^5 - \frac{1}{3}\log_a ab =$

$= 3 + 5\log_a b - \frac{1}{3}(1 + \log_a b) = 3 + 5\log_a b - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\log_a b =$

$= \frac{8}{3} - \frac{14}{3}\log_a b = \frac{2}{3}(4 - 7\log_a b)$

NUMERE COMPLEXE

În mulţimea **R** a NUMERELOR REALE, pentru orice $x \in$ **R** şi n par ($n = 2k$, $k \in$ **N***) avem $x^n \geq 0$; în consecinţă, pentru n par, $\sqrt[n]{y} = x$ există doar pentru $y \geq 0$ ($y = x^n \geq 0$, $y \in$ **R**), ceea ce constituie o condiţie restrictivă impusă operaţiei de extragere a rădăcinii din orice număr real.

Răspunsul matematicii la această restricţie, cu intenţia eliminării ei şi a generalizării operaţiei de extragere a rădăcinii (de orice ordin) asupra tuturor numerelor reale (pozitive şi negative), este:
dacă $y < 0$, atunci $y = (-1)\,y'$, cu $y' > 0$; în consecinţă,

$$\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{(-1)\,y'} = \sqrt[n]{(-1)}\,\sqrt[n]{y'}$$

Dacă n este par, $n = 2k$ ($k \in$ **N***) şi $\sqrt[n]{y'}$ există pentru orice y' (deoarece $y' > 0$), iar $\sqrt[n]{(-1)} = [\sqrt{(-1)}\,]^{\frac{1}{k}}$

Cum însă, în mulţimea numerelor reale, $\sqrt{(-1)}$ nu are sens, „blocând” astfel operaţia de extragere a rădăcinii de ordin / indice par din numere reale negative, s-a întrodus în matematică o noţiune nouă, denumită (prin corespondenţă cu „unitatea reală”, **1**) „UNITATEA IMAGINARĂ”, notată **i**: $\quad \mathbf{i} = \sqrt{(-1)}$

iar numerele de forma **b** x **i**, cu $b \in$ **R**, se numesc NUMERE IMAGINARE, (prin corespondenţă cu numerele reale, de forma **a** x **1**, **1** fiind „unitatea reală” iar $a \in$ **R**).
Rezultă:
– pentru n par ($n = 2k$, $k \in$ **N***),

$\sqrt[n]{y}$ există pentru orice $y \geq 0$ şi

$\sqrt[n]{y} = \mathbf{i}^{\frac{1}{k}}\sqrt[n]{y'}$ pentru orice $y < 0$, $y' = -y > 0$ (exemplu: $\sqrt{-3} = \mathbf{i}\sqrt{3}$);

– pentru n impar ($n = 2k + 1$, $k \in$ **N***), $\sqrt[n]{y}$ există pentru orice $y \in$ **R**,

adică: prin definirea unităţii imaginare **i**, operaţia $\sqrt[n]{y}$ devine posibilă şi are sens pentru orice n, par sau impar, şi orice $y \in$ **R**, pozitiv sau negativ.

Reuniunea mulţimii numerelor reale cu mulţimea numerelor imaginare este mulţimea NUMERELOR COMPLEXE, notată **C**.