Artur Bălăucă

Adrian Boţan **Cătălin Budeanu** **Ioan Ciobanaşu**
Gabriel Mîrşanu **Mariana Ciobanaşu** **Sebastian Mihalache**

20
DE EDIŢII ALE CONCURSULUI INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ „DIMITRIE POMPEIU“ BOTOŞANI
(2001 – 2022)

CLASELE III - XI

534 probleme

Editura TAIDA
– 2023, IAŞI –

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN „DIMITRIE POMPEIU”

EDIŢIA I – 2 iunie 2001

CLASA a V-a

1. La o împărţire de numere naturale, suma dintre împărţitor, cât şi rest este egală cu deîmpărţitul. Să se arate că împărţitorul este egal cu câtul.

2. Să se determine un număr impar de numere naturale consecutive a căror sumă este 2001.

3. Fie numerele naturale a şi b astfel încât $a < b$. Să se arate că $a^{n+1} + b^n \le a^n + b^{n+1}$, oricare ar fi $n \in N^*$.

CLASA a VI-a

4. Fie triunghiul ÇABC cu măsurile unghiurilor direct proporţionale cu numerele 2, 4 şi 6 $(\sphericalangle A > \sphericalangle B > \sphericalangle C)$. Dacă M este simetricul vârfului A faţă de dreapta BC, iar bisectoarea unghiului rBMC intersectează dreapta AB în N, să se demonstreze că $AM \equiv AN$ şi să se calculeze măsurile unghiurilor triunghiului MNC.

5. a) Rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi ecuaţia:

$$3xy + 2x = 5y + 1.$$

b) Să se arate că pentru orice număr natural nenul n are loc inegalitatea: $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{3n} \ge \frac{5}{6}$.

6. Arătaţi că nu există trei numere naturale prime astfel încât adunându-le două câte două să se obţină sume ce au 2, 3 şi, respectiv, 5 divizori naturali.

CLASA a VII – a

7. Să se determine $x \in Z$, $y, z \in Z^*$ ce verifică relaţia: $x + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2001$.

8. Să se arate că: **a)** $\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{6+\sqrt{6}}} \geq \frac{5}{6}$;

b) $\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \frac{3}{\sqrt{6+\sqrt{6}}} + \ldots + \frac{n+1}{\sqrt{n(n+1)+\sqrt{n(n+1)}}} \geq n, n \in N^*$.

(*Niculai Solomon*)

9. Fie *ABCD* un patrulater convex, punctele *M* şi *P* pe laturile *AB* şi, respectiv, *CD* astfel încât $\frac{AM}{AB} = \frac{CP}{CD} = k$. Construim $MN \| AC$, $N \in BC$ şi $MQ \| BD$, $Q \in AD$.

a) Demonstraţi că *MNPQ* este paralelogram.

b) Aflaţi valoarea raportului ariilor patrulaterelor *MNPQ* şi *ABCD* în funcţie de *k*.

c) Aflaţi *k* astfel încât raportul ariilor patrulaterelor să aibă valoarea maximă.

CLASA a VIII - a

10. Să se rezolve în $\mathbb{R}$:

a) $x + [x] = 2x \cdot [x] + \frac{1}{2}$;

b) $x + [x] > x[x]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real *x*.

11. Fie funcţia $f : [a,b] \to \mathbb{R}; a < b$;

$$f(x) = m \cdot x + n;\ m, n \in \mathbb{R}, m \neq 0.$$

a) Arătaţi că valoarea maximă a funcţiei *f* este: *max* (*f*(*a*), *f*(*b*)).

b) Dacă *x, y, z, a, b, c* $\in [0,1]$, demonstraţi inegalitatea:

$$ax + by + cz - abxy - acxz - bcyz - 1 \leq 0.$$

33. Punctul M este situat în interiorul bazei $ABCD$ a paralelipipedului dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, Ştiind că $MA = a$, aria bazei $ABCD$ este $4a^2$, r BMC' = r $A'MD = 90^0$, iar $A'B \perp C'M$, să se afle aria totală a paralelipipedului.

(*Ştefan Smarandache*, Bucureşti)

EDIŢIA a IV-a, 15 mai 2004

Clasa a V-a

34. 1. Se dau cinci numere naturale cu proprietatea că suma oricăror două dintre ele se divide cu 5. Arătaţi că fiecare dintre cele cinci numere se divide cu 5.

2. Determinaţi cel mai mare număr de elemente din mulţimea A = {1; 2; 3; ... ; 100} care au proprietatea că suma oricăror două dintre ele se divide cu 6. ***

35. 1. Câte numere naturale de forma $\overline{abcd}$ (a @ 0), au proprietatea că suma cifrelor oricărui număr este 27, şi una dintre cifre este 2?

2. Arătaţi că, dacă suma cifrelor numărului $\overline{abcd}$ este 27, atunci numărul N = $\overline{abcd}$ + $\overline{dcba}$ se divide cu 27. ***

36. a) Din numărul 1 se scad, pe rând, toate numerele de forma $\overline{0,abc}$ ($a + b + c$ @ 0), apoi se adună rezultatele obţinute. Care este suma finală?

b) Arătaţi că, printre oricare 500 de numere de forma $\overline{0,abc}$ ($a + b + c$ @ 0), există două a căror sumă este egală cu 1.

(*Mircea Fianu*, Bucureşti)

Clasa a VI-a

37. Perechea (m; n) i ü x ü se numeşte soluţie a ecuaţiei $ax + by = c$, (a, b, c i ü) dacă $a \cdot m + b \cdot n = c$.

a) Pentru ecuaţia $29x - 23y = 1$, determinaţi soluţia de forma (4 ; n);

b) Determinaţi o soluţie a ecuaţiei $29x - 23y = -47$;

c) Arătaţi că ecuaţia $29x - 23y = -47$ are o singură soluţie, (m ; n), cu proprietatea că $|m| \le 10$ şi $|n| \le 10$. (*Mircea Fianu,* Bucureşti)

EDIŢIA a XIX-a, 11-13 mai 2019

Clasa a III-a

467. Alina are de şase ori mai mulţi bani decât jumătate din suma de bani pe care o are Mihnea. Ce sumă de bani are fiecare dacă Alina are cu 200 de lei mai mult decât Mihnea? *(xxx)*

468. a) Dacă înaintea unui număr de o cifră scriem cifra 4, numărul obţinut este cu 9 mai mic decât numărul care se obţine dacă scriem cifra 4 la sfârşitul lui. Care este acel număr?
b) Care este numărul format din trei cifre consecutive care adunat cu răsturnatul său dă 888? *(G.M. Nr. 1/2019)*

469. Ştefan şi-a propus să rezolve 150 de probleme. În prima zi a rezolvat două probleme, în a doua zi a rezolvat cu trei probleme mai multe, în a treia zi a rezolvat cu trei probleme mai multe decât în a doua zi, şi tot aşa, în fiecare zi a rezolvat cu trei probleme mai multe decât în ziua precedentă, până când a terminat de rezolvat cele 150 de probleme.
a) Câte probleme a rezolvat Ştefan în total în primele 6 zile?
b) În câte zile a terminat de rezolvat cele 150 de probleme şi câte probleme a rezolvat în ultima zi? *(xxx)*

470. Cheile de la Pensiune. Proprietarul unei pensiuni conduce 10 familii la camerele lor, ale căror numere sunt de la 1 la 10. Din păcate cheile nu sunt numerotate, iar proprietarul a încurcat ordinea lor. Care este numărul maxim de încercări pe care trebuie să le facă proprietarul pentru a deschide toate uşile? *(xxx)*

Clasa a IV-a

471. Ioana, Maria şi Dana şi-au propus să amenajeze o grădină de flori. Lucrând fiecare singură, Ioana ar termina în 4 ore, Maria în 6 ore, iar Dana în 12 ore. În câte ore s-ar termina lucrarea dacă ar lucra împreună toate trei? *(G.M. Nr. 1/2019)*

Clasa a IX-a

491. Într-un paralelogram *ABCD* notăm mijloacele laturilor *BC* şi *CD* cu *M*, respectiv *P*. Ştiind că *AM* = *BP* şi *AM* ⊥ *BP* demonstraţi că *ABCD* este pătrat. *(Gazeta Matematică)*

492. Fie funcția $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ care verifică următoarele condiții: **(a)** $x\left(f(x+1)-f(x)\right)=f(x)$, pentru orice $x \geq 0$;
(b) funcția $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x+1)-f(x)$ este crescătoare.

Să se arate că există un număr $k \geq 0$, astfel încât $f(x)=kx$, pentru orice $x \geq 0$. *(Vladimir Cerbu, Mihai Piticari)*

493. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ numere reale din intervalul [1; 3]. Știind că $x_1+x_2+\ldots+x_{100}=120$ şi $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{100}^2=180$, arătați că $x_1^3+x_2^3+\ldots+x_{100}^3=360$. *(xxx)*

494. Problema suplimentară. Fie *a*, *n*, *p* trei numere naturale cu $a \geq 2$, $n \geq 2$ şi *p* număr prim.

Să se arate că fracția $\dfrac{a^n-1}{a^{p-1}+a^{p-2}+\ldots+a^2+a+1}$ este reductibilă dacă şi numai dacă *p* divide *n* sau *p* divide $a-1$. *(xxx)*

Clasa a X-a

495. Fie *a* şi *b* numere complexe şi *k* un număr întreg nenul astfel încât $|a+k|+|b-k|+|a+b-k|=1$. Demonstraţi că *a* şi *b* sunt numere reale. *(Gazeta Matematică)*

496. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$\sqrt{\left(2^x+\lg 2\right)\left(2^{-x}+\lg 2\right)}+\sqrt{\left(2^x+\lg 5\right)\left(2^{-x}+\lg 5\right)}=3.$$

(xxx)

502. Problema suplimentară. Un patrulater convex $ABCD$ are aria $\frac{3}{2}$ iar punctele A, B, C, D au ambele coordonate întregi. Justificaţi că patrulaterul este trapez. *(Adrian Boțan)*

EDIŢIA a XX-a, 13-15 mai 2022

Clasa a III-a

503. a) Dacă ar cumpăra 5 trandafiri, lui Matei i-ar rămâne 14 lei, iar dacă ar cumpăra 9 trandafiri, i-ar mai trebui 30 de lei. Câți lei are Matei?
b) Suma a trei numere naturale este 970. Suma primelor două numere este mai mare decât al treilea număr cu 670. Primul număr este mai mare decât al treilea număr cu 122. Care sunt numerele?

504. a) Bogdan și Mara au citit același număr de pagini, dar din două cărți diferite. Bogdan mai are de citit 45 de pagini, iar Mara 23 de pagini. Cele două cărţi au împreună 156 de pagini. Câte pagini are fiecare carte?
b) Pentru o problemă rezolvată corect, Mihnea primește 8 puncte, iar pentru o problemă rezolvată greșit se scad 2 puncte. Băiatul a primit în total pentru cele 23 de probleme rezolvate doar 134 de puncte. Câte probleme a rezolvat corect și câte a rezolvat greșit?

505. Amfiteatrul școlii în care învață Radu, are șapte rânduri cu același număr de scaune, numerotate de la stânga la dreapta. Știind că Radu stă pe rândul din mijloc, pe scaunul cu numărul 45, iar în dreptul lui, pe ultimul rând, pe scaunul cu numărul 81 stă Costel, aflați câte scaune sunt în amfiteatrul școlii.

506. Problema suplimentară. În prima zi a lunii mai 2022, duminică, Andrei își activează căsuța de email. În zilele de luni, marți, miercuri și joi primește câte 6 mesaje pe zi, iar vineri și sâmbătă câte 12 mesaje pe zi. Duminică le citește pe toate și șterge jumătate dintre ele. Câte mesaje vor fi în ziua de 31 mai 2022, la ora 23:59, dacă în fiecare duminică se întâmplă la fel ?

SOLUŢII, INDICAŢII, RĂSPUNSURI, COMENTARII

1. Fie I, C, R, D împărţitorul, câtul, restul şi, respectiv, deîmpărţitul. Din relaţiile $D = I \cdot C + R$, $R < I$ şi $I + C + R = D$ rezultă $I + C = I \cdot C$, de unde $I(C\text{-}1) = C$, adică $C\text{-}1 / C$ sau $C\text{-}1 / (C\text{-}1) + 1$, $C\text{-}1/1 \Rightarrow C = 2$ şi $I = 2$.

2. Fie $n + 1$, $n + 2$, …, $n + (2k + 1)$ numerele consecutive. Avem: $(n + 1) + (n + 2) + \ldots + (n + 2k + 1) = 2001 \Rightarrow \underbrace{n + n + \ldots + n}_{2k+1 \text{ termeni}} + 1 +$

$$+ 2 + \ldots + (2k + 1) = (2k + 1)n + \frac{(2k+1)(2k+2)}{2} = (2k + 1) \cdot (n + k + 1) =$$

$= 2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29 \Rightarrow 2k + 1 \in \{1, 3, 23, 29, 69, 87, 667, 2001\}$. Se obţine soluţie pentru $2k + 1 \in \{3, 23, 29\}$. Numerele sunt: 666, 667, 668 sau 76, 77,…, 98 sau 55, 56, …,83.

3. $a^{n+1} + b^n \le a^n + b^{n+1} \Leftrightarrow a^n(a-1) \le b^n(b-1)$; $a = 0$ şi $b = 1 \Rightarrow a^{n+1} + b^n = a^n + b^{n+1}$. Dacă $a = 0$ şi $b > 1 \Rightarrow b^n(b - 1) > 0$ şi $a^n(a - 1) = 0$ etc. Dacă $a = 1$ atunci $b \ge 2$ şi $b^n(b - 1) > 0$, iar $a^n(a - 1) = 0$ etc. Dacă $a > 1$, cum $b > a$ rezultă $b^n > a^n$ şi $b - 1 > a - 1$ etc.

4. m(r A) = 90^0, m(r B) = 60^0, m(r C) = 30^0. În triunghiul ÇAMN, m(r AMN) = m(r ANM) = 15°. Triunghiul ANC este dreptunghic isoscel, m(r NMC) = 45°, m(r MNC) = 30°, m(r MCN) = 150°.

5. **a)** $3xy + 2x = 5y + 1 \Leftrightarrow x(3y + 2) = 5y + 1 \Leftrightarrow 3x(3y + 2) = 5 \cdot 3y + 3 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3x(3y + 2) = 5(3y + 2) - 7$. Deci $3y + 2 \,/\, 7$, de unde $3y + 2 \in \{-7; -1; 1; 7\}$, etc.

b) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n} \ge \frac{5}{6} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) +$

$$+ \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \ldots + \frac{1}{3n}\right) \ge \frac{5}{6}.$$

$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \ge \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$ şi $\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \ldots + \frac{1}{3n} \ge \frac{n}{3n} = \frac{1}{3}$ etc.

6. Presupunem că există numerele a, b, c ($a \le b$) cu proprietatea din enunţ. Dacă $a + b$ are 2 divizori, atunci $a + b$ este prim şi $a = 2$, iar b este impar.

I. Dacă $a + c$ are 3 divizori şi $b+c$ are 5 divizori, atunci $a + c = q^2$, q prim şi $b + c = p^4$, p prim, de unde rezultă $c = 2$, contradicţie pentru că $c > 2$.

II. Dacă $a + c$ are 5 divizori şi $b + c$ are 3 divizori, atunci $a + c = m^4$, m prim şi $b + c = n^2$, n prim, de unde $c = 2$, contradicţie pentru că $c > 2$.

7. $x + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2001 \Leftrightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2001 - x \in \mathbb{Z}$; $y, z \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow |z| \ge 1$ şi $|y| \ge 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{|z|} \le 1 \text{ şi } \frac{1}{|y|} \le 1 \Rightarrow -2 \le \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \le 2 \text{ şi } \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}.$$

NO este linie mijlocie în ΔAMC, deci $NO = \frac{CM}{2} = \frac{CC'}{4} = \frac{a}{4}$.

$NO' = OO' - ON = \frac{3}{4}a$. $OE \parallel O'C'$ implică $\Delta OEN \sim \Delta O'C'N \overset{\text{t.f.a.}}{\Rightarrow}$

$\overset{\text{t.f.a.}}{\Rightarrow} \frac{EO}{O'C'} = \frac{NO}{NO'}$, de unde $EO = \frac{a\sqrt{2}}{6}$ și $EC = OC + EO = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$. Din

ΔELC dreptunghic isoscel rezultă că $2LC^2 = CE^2$, de unde $LC = 2\frac{a}{3}$. (1p)

Secțiunea în cub cu planul $(NC'D')$ este patrulaterul $KLC'D'$ care este dreptunghi pentru că $D'C' = KL$, $D'C' \parallel KL$ și $D'C' \perp C'L$ $(D'C' \perp (BCC'))$. (1p)

Din $\Delta C'CL$ dreptunghic rezultă că $LC' = \sqrt{a^2 + \frac{4a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{13}}{3}$.

$\mathcal{A}_{\text{secțiunii}} = KL \cdot L'C = \frac{a^2\sqrt{13}}{3}$ (unități de arie). (1p)

b) Planul $(NC'D')$ împarte cubul în două corpuri (poliedre); prismele $LCC'KDD'$ și $BLC'B'AKD'A'$ cu bazele triunghiul LCC' și, respectiv, trapezul $BLC'B'$ și înălțimea CC'.

$\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_{[LCC'KDD']} = \mathcal{A}_{\Delta LCC'} \cdot C'D' = a \cdot \frac{2a}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a = \frac{a^3}{3}$. (1p)

$\mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_{[BLC'B'AKD'A']} = \mathcal{V}_{\text{cub}} - \mathcal{V}_1 = a^3 - \frac{a^3}{3} = \frac{2a^3}{3}$. Deci, $\frac{\mathcal{V}_1}{\mathcal{V}_2} = \frac{1}{2}$. (1p)

c) Fie punctul P mijlocul segmentului MC. Cum $AC \perp (BDD')$ și $A'C' \perp (BDD')$ rezultă că $\text{pr}_{(BDD')}\, CC' = OO'$ și $\{N\} = \text{pr}_{(BDD')}\{P\}$. Deci $NP \perp (BDD')$ și $NP \perp D'F$, iar $d(CM, D'F) = NP = OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (unități de lungime). (1p)

274. Pasul 1. Fie $AC \cap BD = \{O\}$, $AD \cap BC = \{E\}$, $EO \cap AB = \{P_0\}$ și $EO \cap CD = \{Q_0\}$. În triunghiul ΔEAB cu teorema lui **Thales** și cu teorema lui **Ceva** se obține $AP_0 \equiv P_0B$, adică P_0 este mijlocul laturii AB. În triunghiul ΔABE, EP_0 este mediană și cum $CD \parallel AB$ și $EP_0 \cap CD = \{Q_0\}$ rezultă că Q_0 este mijlocul bazei CD (**fig. 51**).

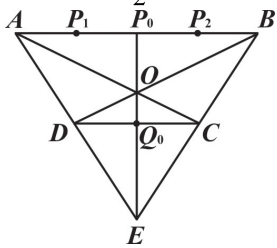
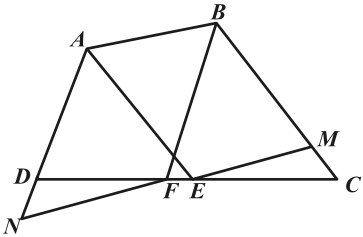
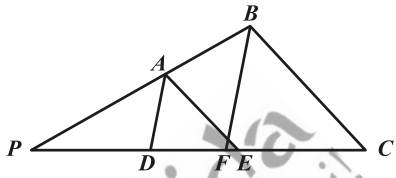


Fig. 51

521. a) Cercurile $\mathscr{C}_1$ și $\mathscr{C}_2$ sunt secante $\Leftrightarrow \left|\sqrt{5}-2\sqrt{5}\right| < AB < \sqrt{5}+2\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow \sqrt{5} < \sqrt{25} < \sqrt{45}$ adevărat. Notăm $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 = \{M, N\}$ și $MN \cap AB = \{P\}$.
AB este mediatoarea MN, triunghiul ANB este dreptunghic în M.
$MP = 2$ cm $\Rightarrow MN = 4$ cm.





b) Dacă $AB \parallel CD$, atunci $AB = CE = DF$ și evident $AB^2 = CE \cdot DF$. Dacă $AB \nparallel CD$, construim $EM \parallel AB$, $M \in BC$ și $FN \parallel AB$, $N \in AD$. Deoarece $ABCD$ este patrulater inscriptibil avem $\mathrm{r}A + \mathrm{r}C = 180°$ și $\mathrm{r}B + \mathrm{r}D = 180°$. Folosind proprietățile unghirilor din paralelogramele $ABME$ și $ABFN$, se arată că triunghiurile MCE și DNF au două unghiuri respectiv congruente. Din asemănarea triunghiurilor MCE și DNF obținem $ME \cdot NF = CE \cdot DF$, de unde se deduce $AB^2 = CE \cdot DF$.

Soluție alternativă:

Dacă $AB \parallel CD$, atunci $AB = CE = DF$ și evident $AB^2 = CE \cdot DF$. Dacă $AB \nparallel CD$, notăm $AB \cap CD = \{P\}$. Aplicând **teorema lui Thales** în triunghiurile PBC și, respectiv, PBF se obțin relațiile $AB = \dfrac{PB \cdot EC}{PC}$ și respectiv $AB = \dfrac{PB \cdot DF}{PF}$. Se demonstrează că triunghiurile PBC și PFB sunt asemenea, se obține $PB^2 = PC \cdot PF$, de unde se deduce $AB^2 = CE \cdot DF$.

523. $\begin{cases} a+b-c=2 \\ c^2-2ab=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=a+b-2 \\ (a+b-2)^2-2ab=1. \end{cases}$

$(a+b-2)^2 - 2ab + 1 \Leftrightarrow (a-2)^2 + (b-2)^2 = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)^2=1 \\ (b-2)^2=4 \end{cases}$ sau $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)^2=4 \\ (b-2)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-2 \in \{-1; 1\} \\ b-2 \in \{-2; 2\} \end{cases}$ sau $\begin{cases} a-2 \in \{-2; 2\} \\ b-2 \in \{-1; 1\} \end{cases} \Leftrightarrow$