John D. Barrow (1952–2020) a studiat matematică și fizică la Universitatea din Durham și a obținut la Oxford titlul de doctor în astrofizică. Pe lângă activitatea de cercetare – a publicat peste cinci sute de articole de cosmologie, fizică teoretică și matematică –, Barrow a predat la mai multe universități de prestigiu, iar din 1999 a condus la Cambridge proiectul Millennium Mathematics, care urmărea îmbunătățirea predării matematicii și aplicațiilor ei. A scris numeroase cărți de popularizare a științei, între care *Originea universului* și *Cartea infinitului*, publicate la Humanitas. În 2015 a primit Premiul Dirac și Medalia de Aur a Institutului Britanic de Fizică, iar în 2016 Medalia de Aur a Societății Regale de Astronomie.

Cuprins

Lui Stephen, care construiește, numără și joacă

Dacă oamenii nu cred că matematica e simplă
este numai pentru că nu pricep cât de complicată e viața.
—John von Neumann

Notă asupra ediției

John D. Barrow a scris această carte în ultimele luni de viață (a decedat în septembrie 2020) pentru editura italiană il Mulino. Prima versiune a manuscrisului, redactată în engleză, a fost tradusă în italiană de Pino Donghi, fiind apoi completată de autor, pentru a fi publicată la il Mulino. Traducerea românească a fost făcută după ediția italiană și confruntată cu versiunea în engleză.

Prefață

Aveți în față ultima mea carte, alta nu voi mai putea scrie. E vorba despre numere. Numerele numără. Multora li se pare că o operație ca 1 + 1 = 2 e prea simplă ca să merite atenție. Adunarea aceasta elementară are totuși anumite complicații pe care le vom explora. Vom examina subtilitățile care însoțesc suma unor obiecte diferite. Pe parcurs, vom întâlni câțiva dintre cei mai mari matematicieni ai secolelor XIX și XX, oameni care s-au lovit de această problemă, și vom înțelege cum s-au gândit s-o rezolve, lămurind chestiunea adunării. Așa făcând, vom ajunge să luăm în discuție chestiuni destul de neobișnuite, ca studiul infiniturilor, cum pot fi ele adunate, și vom urmări controversele în legătură cu însăși legitimitatea considerării lor drept o parte a matematicii. Vom arunca o privire peste celebrele teoreme de incompletitudine ale lui Gödel și, în fine, peste aprinsa dezbatere despre ce este, până la urmă, matematica: „ceva ce am descoperit, ori am inventat?“ Mai întâi însă, ne vom întoarce la încercările populațiilor antice de a dezvolta sisteme de numerație, la diferitele modalități în care numărau, începând chiar cu *unu* care, adunat cu alt *unu*, trebuie să dea *doi*. Cum au reușit să meargă mai departe? Vom descoperi că diferite societăți primordiale au dezvoltat diferite modalități de numărare și că acelea care au trecut prin număratul cu unu și doi au sfârșit, aproape toate, descoperind sistemul zecimal, pe modelul celor care-și foloseau cele zece degete de la mâini. În fine, vom observa câteva proprietăți neașteptate ale numerelor *unu* și *doi*, descoperite de Simon Newcomb și cunoscute azi drept „legile lui Benford“, înțelegând de ce corespund ele realității.

Nu doar pe numere se poate conta.* Persoanele sunt mult mai importante. Cele mai importante pe care pot conta eu sunt draga mea Elisabeth, soția mea de patruzeci și cinci de ani, dar pe care o cunosc de cel puțin cincizeci și cinci, copiii noștri David, cu soția lui, Emma, Roger, cu soția lui Sophie, și Louise, cu soțul ei, Stephen, și toți nepoțeii noștri, Tilly, Darcey, Mahler, Guy și Poppy.

Mulțumiri speciale fiului nostru Roger, care ne-a fost de mare ajutor în perioada aceasta atât de grea, dând dovadă de o putere fără margini. Trebuie să mul-

---

* Joc de cuvinte: *contare* înseamnă și „a număra“, și „a conta“. (*N. t.*)

țumesc în mod deosebit lui Pino și Jo pentru a fi dus mai departe proiectul acestei cărți și pentru a-i fi urmărit traducerea cu ajutorul unor prieteni matematicieni. N-aș fi putut-o scoate la capăt fără ajutorul lor. Fie ei toți binecuvântați.

„Ca un torent al cărui curs e blocat de o stâncă, așa suntem azi despărțiți, dar știu că până la capăt ne vom întâlni din nou“ (*A Hundred and Seventy Chinese Poems*, îngrijită de Arthur Waley).

John D. Barrow

Pentru traducerea terminologiei și a unor pasaje matematice din acest volum am beneficiat de sfaturile dragului meu prieten Alessandro Giuliani, căruia îi sunt foarte recunoscător. Pentru întreaga muncă editorială, îi mulțumesc lui Carlo Toffalori, care nu doar că a verificat corectitudinea terminologică, dar m-a și ajutat constant, sugerându-mi inclusiv importante ajustări ale textului original, pe care autorul le-a luat în considerare, însușindu-și-le. O lecție de matematică din care toți am avut ceva de învățat, eu mai mult decât toți.

Pino Donghi

1. 1+1: e chiar atât de greu?

One is one and all alone
and evermore shall be so.
—*Green Grow the Rushes, O*
(cântec popular englez)[1]

Cum trecem pragul școlii elementare, toți dăm nas în nas cu prima formulă: 1 + 1 = 2, tema discuției din cartea aceasta. E prima treaptă a educației matematice. Și, la urma urmei, ce atâta tevatură cu formula asta? Nu e evidentă? Este doar definiția a ceea ce înțelegem prin 2. Dacă o privim totuși mai îndeaproape, observăm că nu e chiar atât de evident ce ne spune. Cât face un măr cu o pară? Două... ce anume? Nici două pere, dar nici două mere. Două chestii, pur și simplu? Dar simbolurile astea, + și =, ele ce sunt? Ce înseamnă ele, de fapt? Dacă adunăm două unde identice care sunt defazate astfel încât crestele uneia să coincidă cu văile celeilalte, rezultatul e zero, nu două unde. Dacă adunăm o cantitate nulă cu o altă cantitate nulă, obținem două cantități nule care, luate împreună, sunt... nimic. Dacă încercăm să adunăm un infinit cu alt infinit, ceea ce obținem e infinit. Nici una dintre aceste sume nu se conformează modelului potrivit căruia dacă adăugăm unu lui unu avem două lucruri. Lucrurile – scuzați încurcătura – nu sunt așa simple cum par. Avem nevoie de reguli pentru unitățile lucrurilor care se adună, dacă vrem să obținem ca rezultat doi.

Toate sistemele de numerație din lume, dimpreună cu impresionantele construcții științifice și tehnice ridicate pe baza lor, se sprijină, în ultimă analiză, pe ceea ce începe adăugând unu lui unu. Multe sisteme primitive n-au trecut de simpla și reiterata adunare între ei a diferiților „unu", folosind eventual degetele de la mâini și picioare ca model pentru a pune laolaltă grupe de „cinci", de „zece" sau chiar de „douăzeci", obținând astfel mulțimi mai ușor de ținut minte. În engleză, statutul special al lui „doi" apare limpede când observăm pletora de cuvinte diferite care pot ține locul lui „doi": *pair*, *duo*, *brace*, *double*, *twin*, *duet*, *couple*, *yoke*, *twosome*, *dyad*, *tandem*, *duplet* și *twain*.* În mod obișnuit, fiecare dintre aceste cuvinte trimite la semnificația unui „doi" care se referă la anumite accepțiuni. De exemplu: în engleză, spunem „o pereche (*brace*) de fazani", „un jug (*yoke*) de boi", „o pereche (*pair*) de mănuși" sau „un cuplu (*couple*) de balerini", dar n-am folosi niciodată *brace* pentru pantofi, sau *couple* pentru mănuși.[2] Ceea ce ne arată că, la început, cuvântul ales pentru a însemna „doi" nu era deloc indiferent față de lucrurile pe care le număra. Urcând treptat scara numerelor,

* În engleză, în original. (*N. t.*)

întâlnim cuvinte specifice pentru „trei“, ca „triplet“, „terțet“ sau „trio“, dar, avansând cu numărătoarea, diferitele substantive de felul acesta tind să fie din ce în ce mai rare: nu există o abundență echivalentă de cuvinte pentru numere ca șapte sau unsprezece. În modelele de cuvinte ca „unu“ și „primul“, „doi“ și „secund“ din patru limbi europene: engleză, franceză, germană și italiană, observăm același fenomen. În fiecare dintre aceste limbi, acele cuvinte n-au nici o relație unul cu celălalt, în timp ce, dacă ne uităm la cuvintele „trei“ și „al treilea“, „patru“ și „al patrulea“, descoperim că sunt strâns legate, sau chiar derivate unul din celălalt. Iată schema primelor patru numere întregi:

Engleză: one/first, two/second, three/third, four/fourth...
Franceză: un/premier, deux/second (sau deuxième), trois/troisième, quatre/quatrième...
Germană: ein/erste, zwei/ander (sau zweite), drei/dritter, vier/vierte...
Italiană: uno/primo, due/secondo, tre/terzo, quattro/quarto...

În toate limbile indoeuropene cunoscute, numerele mai mari decât 4 sunt substantive niciodată folosite ca adjective care să-și poată schimba forma potrivit lucrurilor la care se referă – aspect care confirmă natura arhaică a unor concepte ca unitate sau pereche, față de cantitățile mai mari. Ceea ce ține, poate, de